فیزیک ۲

الکتریسیته و مغناطیس

دکترشه روز نصیریان

مراجع:

۱- فیزیک ۲، الکتریسیته و مغناطیس، نویسندگان: دیوید هالیدی، رابرت رزنیک

۲- فیزیک ۲، الکتریسیته و مغناطیس، نویسنده: هایک قولتوقچیان

۳- فیزیک ۲، الکتریسیته و مغناطیس، نویسندگان: جلیل راشد محصل، علی معینی

٤- تمام کتاب های دانشگاهی فیزیک ۲، الکتریسیته و مغناطیس

جمع و تفریق بردارها:

بردار دارای خصوصیات زیر است:

۱- اندازه، ۲- جهت، ۳- نقطه اثر و ٤- تبعیت از قوانین جمع برداری

$$\vec{A} = |A|\,\hat{n}_A \qquad\qquad |\vec{A}| = A$$

طول بردار　　　　بردار نرمال

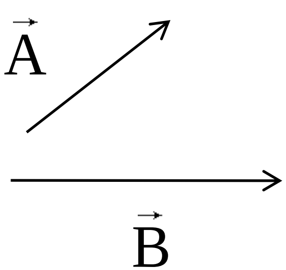
بردار نرمال، برداری در جهت بردار اصلی است و اندازه ی واحد دارد.

$$\hat{n}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

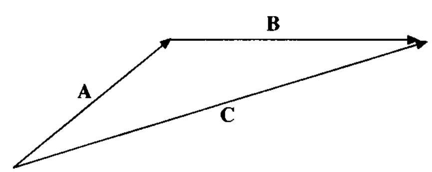
روش های جمع برداری:

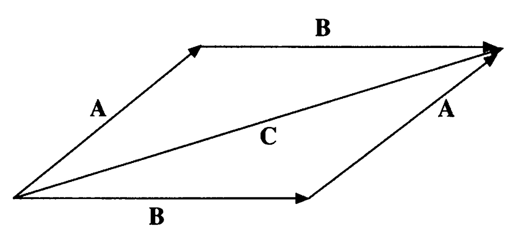
۱- قاعده ی مثلثی (روش قرار گیری ابتدای بردار دوم در انتهای بردار اول)

۲-قاعده متوازی الاضلاع

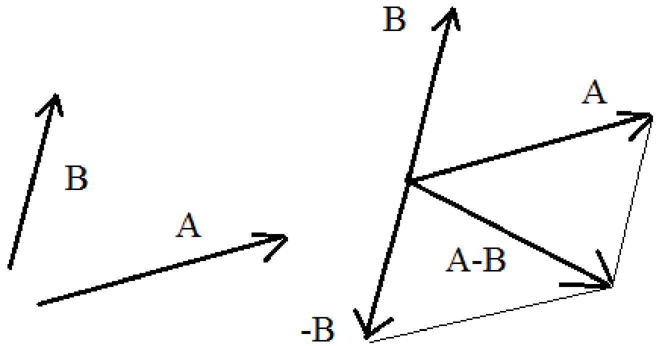


$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$





تفریق دو بردار

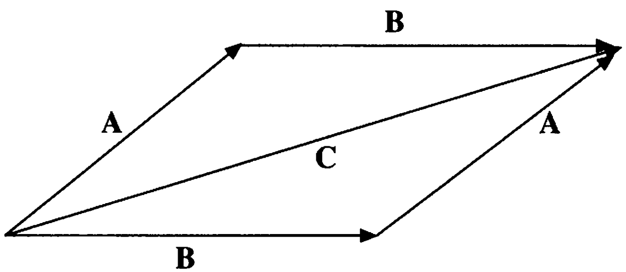


$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

قوانین جمع برداری:

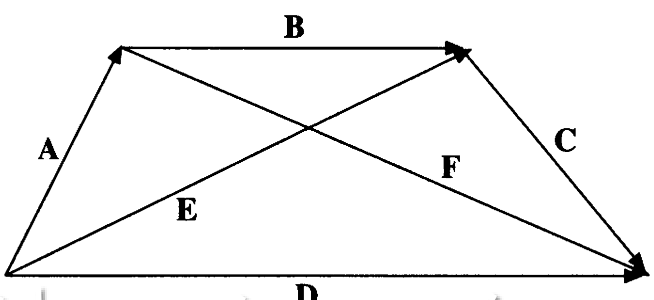
۱- قانون جابجایی

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$



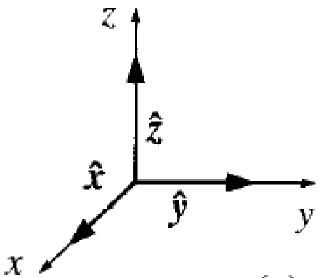
۲- قانون انجمنی

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

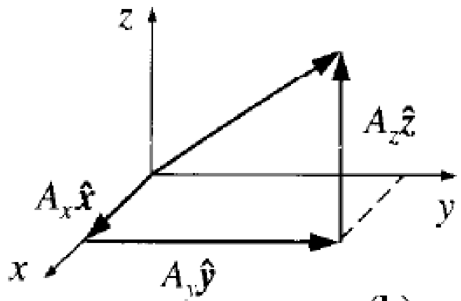


$$\mathbf{D}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C},$$
$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{E}.$$
$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+\mathbf{C}.$$
$$\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{F}.$$
$$\mathbf{D}=\mathbf{A}+\mathbf{F}.$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}).$$

$$\boxed{\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{x}} = \hat{\mathrm{n}}_x = \hat{\mathrm{a}}_x = \hat{\mathrm{e}}_x \quad \& \quad \hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{y}} = \hat{\mathrm{n}}_y = \hat{\mathrm{a}}_y = \hat{\mathrm{e}}_y \quad \& \quad \hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{z}} = \hat{\mathrm{n}}_z = \hat{\mathrm{a}}_z = \hat{\mathrm{e}}_z}$$



(a)



(b)

$$\vec{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_x \hat{\mathrm{i}} + \mathrm{A}_y \hat{\mathrm{j}} + \mathrm{A}_z \hat{\mathrm{k}} \quad \text{or}$$

$$\vec{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_x \hat{\mathrm{x}} + \mathrm{A}_y \hat{\mathrm{y}} + \mathrm{A}_z \hat{\mathrm{z}}$$

$$\boxed{|\mathbf{A}| = \left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)^{1/2}.}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) + (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}})$$

$$= (A_x + B_x)\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{z}}.$$

$$a\mathbf{A} = (aA_x)\hat{\mathbf{x}} + (aA_y)\hat{\mathbf{y}} + (aA_z)\hat{\mathbf{z}}.$$

$$\mathbf{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x)\hat{\boldsymbol{x}} + (A_y + B_y)\hat{\boldsymbol{y}} + (A_z + B_z)\hat{\boldsymbol{z}},$$

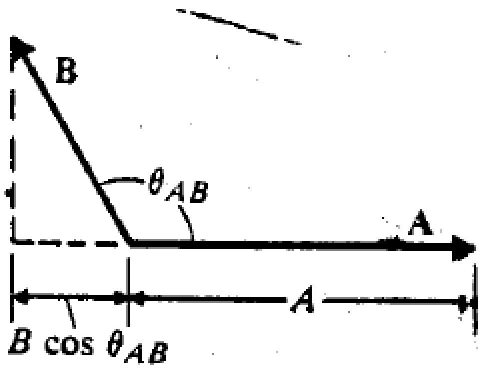
$$\mathbf{A} - \boldsymbol{B} = (A_x - B_x)\hat{\boldsymbol{x}} + (A_y - B_y)\hat{\boldsymbol{y}} + (A_z - B_z)\hat{\boldsymbol{z}},$$

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}}(A_x \pm B_x) + \hat{\mathbf{y}}(A_y \pm B_y) + \hat{\mathbf{z}}(A_z \pm B_z).$$

ضرب بردارها

۱- ضرب عددی یا داخلی

$$\vec{A}.\vec{B} = A\,B\,\mathrm{Cos}(\theta_{\text{between A and B}}) = \vec{B}.\vec{A}$$



$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2$$

$$A = \sqrt[+]{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}.$$

Commutative law: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

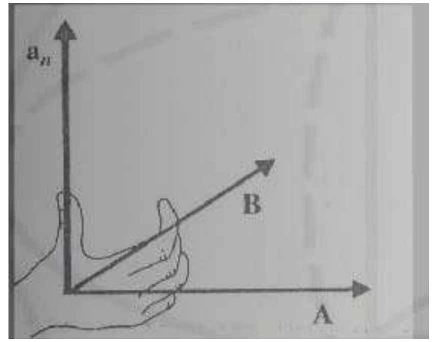
Distributive law: $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$.

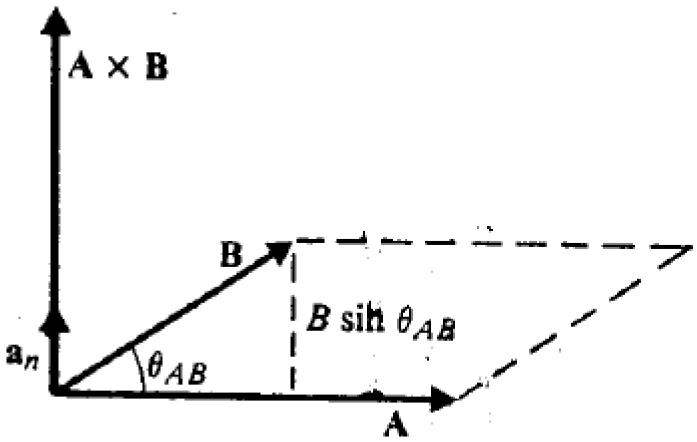
$$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 1, \qquad \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = 0.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}})\cdot(B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z.\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2, \qquad \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{x}} = A_x,\ \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{y}} = A_y, \text{ and } \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{z}} = A_z$$

۲- ضرب برداری یا خارجی





$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \qquad \text{with } C = AB\sin\theta.}$$

حاصلضرب خارجی جابجا پذیر نیست.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0},$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}, \qquad \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}, \qquad \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}},$$
$$\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{z}}, \qquad \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}}, \qquad \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{y}}.$$

نمونه هایی از کاربرد این ضرب:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \qquad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad \tau = \mathrm{r} \times \mathrm{F} \qquad \mathbf{F}_M = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

خواص این ضرب:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C},$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C},$$

$$\mathbf{A} \times (y\mathbf{B}) = y\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (y\mathbf{A}) \times \mathbf{B}.$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}\equiv\mathbf{C}=(C_x,C_y,C_z)&=(A_x\hat{\mathbf{x}}+A_y\hat{\mathbf{y}}+A_z\hat{\mathbf{z}})\times(B_x\hat{\mathbf{x}}+B_y\hat{\mathbf{y}}+B_z\hat{\mathbf{z}})\\&=(A_xB_y-A_yB_x)\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}}+(A_xB_z-A_zB_x)\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}}\\&\quad+(A_yB_z-A_zB_y)\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}}$$

$$C_x=A_yB_z-A_zB_y,\qquad C_y=A_zB_x-A_xB_z,\qquad C_z=A_xB_y-A_yB_x,$$

or

$$C_i=A_jB_k-A_kB_j,\qquad i,j,k \text{ all different},$$

or

$$\mathbf{C}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{x}}&\hat{\mathbf{y}}&\hat{\mathbf{z}}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}\equiv\hat{\mathbf{x}}\begin{vmatrix}A_y&A_z\\B_y&B_z\end{vmatrix}-\hat{\mathbf{y}}\begin{vmatrix}A_x&A_z\\B_x&B_z\end{vmatrix}+\hat{\mathbf{z}}\begin{vmatrix}A_x&A_y\\B_x&B_y\end{vmatrix},$$

مثال: اگر $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ باشد، حاصل عبارات زیر را محاسبه نمایید.

$\vec{A}.\vec{C} = ?$, $\vec{B}.\vec{C} = ?$, $\vec{C}.\vec{C} = ?$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} &= \mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\\ &= A_x(A_yB_z - A_zB_y) + A_y(A_zB_x - A_xB_z) + A_z(A_xB_y - A_yB_x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0.$$

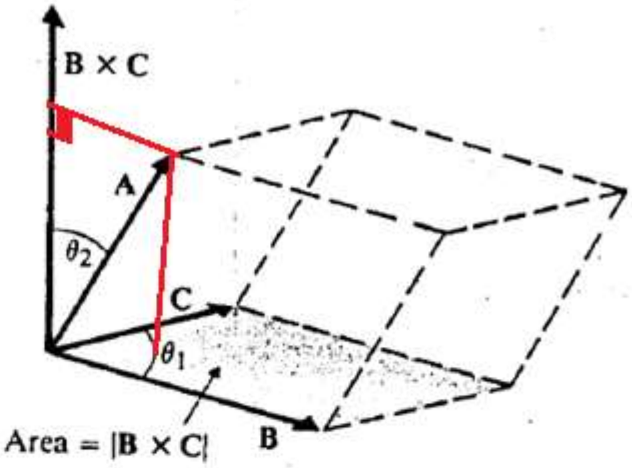
$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= A^2B^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2\\ &= A^2B^2 - A^2B^2\cos^2\theta\\ &= A^2B^2\sin^2\theta.\end{aligned}$$

۳- ضرب سه بردار: $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} &= A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)\\ &= \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{A} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B}\\ &= -\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{B} = -\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{A} = -\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{C},\ \text{and so on.}\end{aligned}$$

مثال: محاسبه حجم متوازی السطوح:

متوازی السطوح، قاعده ای با مساحت معادل $|\mathbf{B} \times \mathbf{C}| = |BC \sin \theta_1|$



و ارتفاعی برابر با $|A \cos \theta_2|$ دارد.

پس حجم متوازی السطوح می شود: $|ABC \sin \theta_1 \cos \theta_2|$

پس حاصلضرب $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ حجم متوازی السطوح را می دهد.

دو رابطه ی مفید:

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

تکلیف: مطلوبست محاسبه ی ضرب های زیر برای بردارهای داده شده.

$$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{K} \quad , \quad \vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{K} \quad , \quad C = -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{K}$$

$$\vec{B}\times\vec{C} = ? \quad , \quad \vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = ? \quad , \quad \vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B}) = ? \quad , \quad \vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A}) = ?$$

مثال: A ، B و C سه برداری هستند که مبداء آنها در مبداء مختصات قرار دارند. نشان دهید که بردار زیر بر صفحه ای که از نقاط A، B و C می گذرد، عمود است.

$$\vec{D}=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)+(\vec{B}\times\vec{C})+\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)$$

A-B و B-C دو بردار متفاوت واقع در صفحه هستند. می بایست ثابت نماییم که این دو بردار بر D عمودند. پس ضرب زیر را تشکیل می دهیم:

$$K=\vec{D}.\left(\vec{A}-B\right)=\left[\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)+(\vec{B}\times\vec{C})+\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\right].\left(\vec{A}-\vec{B}\right)=$$

$$\underbrace{\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).\vec{A}}_{=0}+(\vec{B}\times\vec{C}).\vec{A}+\underbrace{\left(\vec{C}\times\vec{A}\right).\vec{A}}_{=0}-\underbrace{\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).\vec{B}}_{=0}-\underbrace{(\vec{B}\times\vec{C}).\vec{B}}_{=0}-\left(\vec{C}\times\vec{A}\right).\vec{B}\Rightarrow$$

$$K=(\vec{B}\times\vec{C}).\vec{A}-\left(\vec{C}\times\vec{A}\right).\vec{B}\xrightarrow{\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{C}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}.\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)}K=0$$

$$K'=\vec{D}.\left(\vec{B}-\vec{C}\right)=\left[\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)+(B\times\vec{C})+\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\right].\left(\vec{B}-\vec{C}\right)=$$

$$\underbrace{\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).\vec{B}}_{=0}+\underbrace{(\vec{B}\times\vec{C}).\vec{B}}_{=0}+\left(\vec{C}\times\vec{A}\right).\vec{B}-\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).\vec{C}-\underbrace{(\vec{B}\times\vec{C}).\vec{C}}_{=0}-\underbrace{\left(\vec{C}\times\vec{A}\right).\vec{C}}_{=0}\Rightarrow$$

$$K'=\left(\vec{C}\times\vec{A}\right).\vec{B}-\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).\vec{C}\xrightarrow{\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{C}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}.\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)}K'=0$$

$$\therefore K=K'$$

انواع توابع:

۱- تابع اسکالر (f): تنها از پارامترها تشکیل شده و خصوصیات برداری ندارد، مانند :

$$f(x) = x\,\mathrm{Sin}\left(x^2\right) \;\;\&\;\; f(x,y,z) = xyz + x^2\sqrt{y}\,z^{\frac{1}{5}}$$

۲- تابع برداری (F): اگر برای هر مقدار در نظر گرفته شده به وسیله ی متغیر اسکالر u بردار متناظر $A(u)$ وجود داشته باشد، آنگاه $A(u)$ تابع برداری نسبت به u نامیده می شود. یعنی $A(u)$ از ترکیب پارامترها و بردارها تشکیل می شود، مانند:

$$\vec{F}(x) = x\,\mathrm{Sin}\left(x^2\right)\hat{j} \;\;\&\;\; \vec{F}(x,y,z) = xyz\,\hat{i} + x^2\sqrt{y}\,z^{\frac{1}{5}}\,\hat{j} + \frac{1}{xyz}\hat{k}$$

مشتق های توابع برداری:

مشتق $A(u)$ بر حسب پارامتر u به فرم زیر تعریف می گردد:

$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u}$$

مشتق تابع برداری $A(u)$ در صورت وجود حد، برحسب پارامتر u بصورت زیر است (u می تواند x یا y یا z باشد):

$$\vec{A}(u) = A_x(u)\hat{i} + A_y(u)\hat{j} + A_z(u)\hat{k} \Rightarrow \frac{\vec{A}(u)}{du} = \frac{A_x(u)}{du}\hat{i} + \frac{A_y(u)}{du}\hat{j} + \frac{A_z(u)}{du}\hat{k}$$

اگر f تابع اسکالر و A و B توابع برداری باشند، مشتق های زیر برقرار است:

$$\frac{d}{du}\left(f\,\vec{A}\right)=\frac{df}{du}\vec{A}+f\,\frac{d\vec{A}}{du}\quad (u=x \text{ or } y \text{ or } z)$$

$$\frac{d}{du}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{du}.\vec{B}+\vec{A}.\frac{d\vec{B}}{du}$$

$$\frac{d}{du}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du}$$

انتگرال تابع برداری A(u)، بصورت زیر است:

$$\text{if}:\quad \vec{A}(u)=A_x(u)\hat{i}+A_y(u)\hat{j}+A_z(u)\hat{k}\Rightarrow$$

$$\int\vec{A}(u)\,du=\hat{i}\int A_x(u)\,du+\hat{j}\int A_y(u)\,du+\hat{k}\int A_z(u)\,du\quad (u=x \text{ or } y \text{ or } z)$$

$$\text{if}:\quad \vec{A}(x,y,z)=A_x(x)\hat{i}+A_y(y)\hat{j}+A_z(z)\hat{k}\Rightarrow$$

$$\int\vec{A}(x,y,z)\,du=\hat{i}\int A_x(x)\,dx+\hat{j}\int A_y(y)\,dy+\hat{k}\int A_z(z)\,dz$$

تکلیف: اگر f تابع اسکالر و A و B توابع برداری به صورت زیر باشند،

$$f = x\,y^2 z^3$$

$$\vec{A}(x,y,z) = (xyz)\,\hat{i} + (xz)\,\hat{j} + (xy)\,\hat{k}$$

$$\vec{B}(x,y,z) = (x+y+z)\,\hat{i} + (xyz)\,\hat{j} + (x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}})\,\hat{k}$$

مطلوبست محاسبه:

(الف) اندازه ی بردارهای A و B در نقطه (x=۱و y=۲و z=−۱).

(ب) زاویه بین دو بردار A و B در نقطه (۱و۲و۳).

(پ) محاسبه ضرب داخلی و خارجی دو بردار A و B .

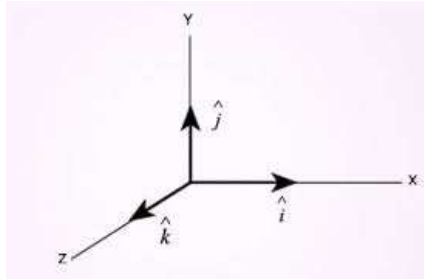
(ت) محاسبه مشتق توابع fA، fB، A.B و A×B در نقطه (۱و۱−و۲).

(ث) محاسبه انتگرال توابع برداری fAو Bدر نقطه (۱و۱و۱).

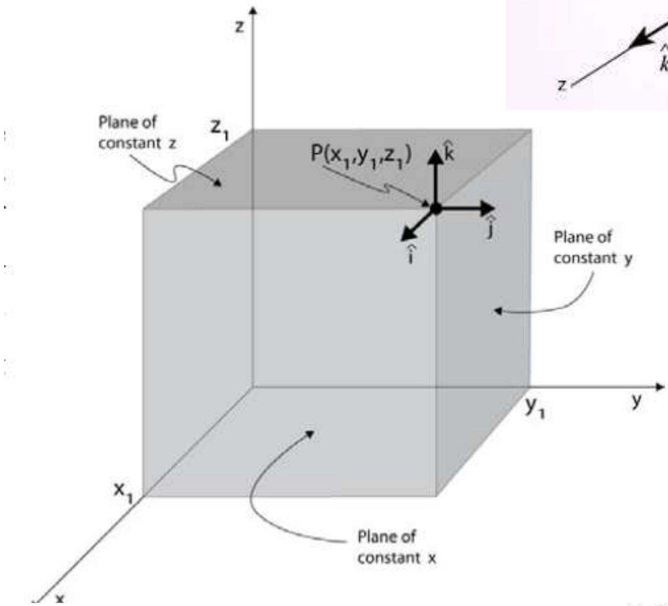
دستگاه مختصات کارتزین:

این دستگاه متعامد راستگرد است.

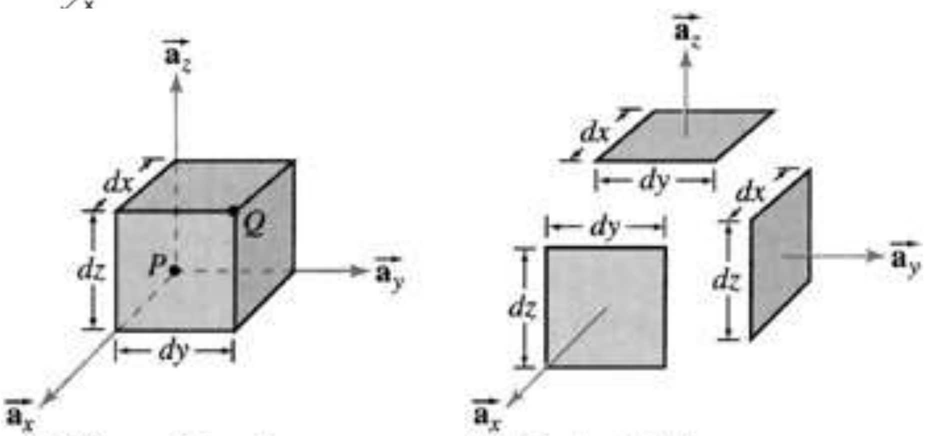
$$\boxed{\begin{array}{l} -\infty \langle x \langle \infty \\ -\infty \langle y \langle \infty \\ -\infty \langle z \langle \infty \end{array}}$$



$$\boxed{\begin{cases} |dL| = dx\,, \quad dy\,, \quad dz \\ d\vec{L} = |dL|\,\hat{n} = dx\,\hat{i}\,, \quad dy\,\hat{j}\,, \quad dz\,\hat{k} \end{cases}}$$



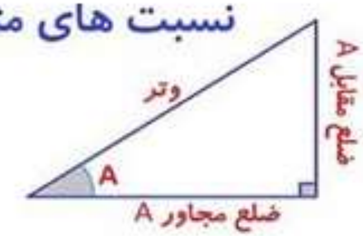
$$\begin{cases} |dS| = (dx\,dy)_{\text{up, down}} \\ \qquad\quad (dx\,dz)_{\text{right, left}} \\ \qquad\quad (dy\,dz)_{\text{front, back}} \\ \boxed{d\vec{S} = |dS|\,\hat{n}} \\ d\vec{S}_{up} = dx\,dy\left(\hat{k}\right) \;\; , \;\; d\vec{S}_{down} = dx\,dy\left(-\hat{k}\right) \\ d\vec{S}_{right} = dx\,dz\left(\hat{j}\right) \;\; , \;\; d\vec{S}_{left} = dx\,dz\left(-\hat{j}\right) \\ d\vec{S}_{front} = dy\,dz\left(\hat{i}\right) \;\; , \;\; d\vec{S}_{back} = dy\,dz\left(-\hat{i}\right) \end{cases}$$



a) Differential volume b) Exploded view

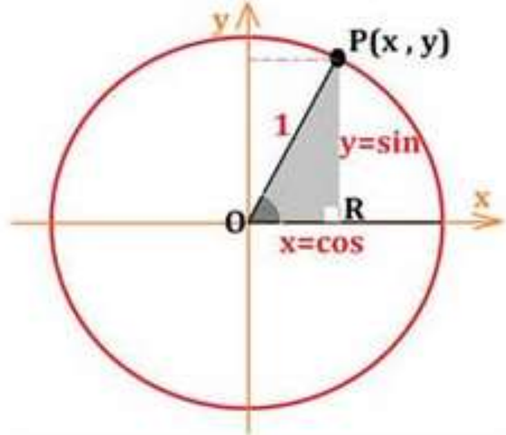
$$\boxed{|dV| = dx\,dy\,dz}$$

نسبت های مثلثاتی



$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل } A}{\text{وتر}} \qquad \cos A = \frac{\text{ضلع مجاور } A}{\text{وتر}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل } A}{\text{ضلع مجاور } A} \qquad \cot A = \frac{\text{ضلع مجاور } A}{\text{ضلع مقابل } A}$$



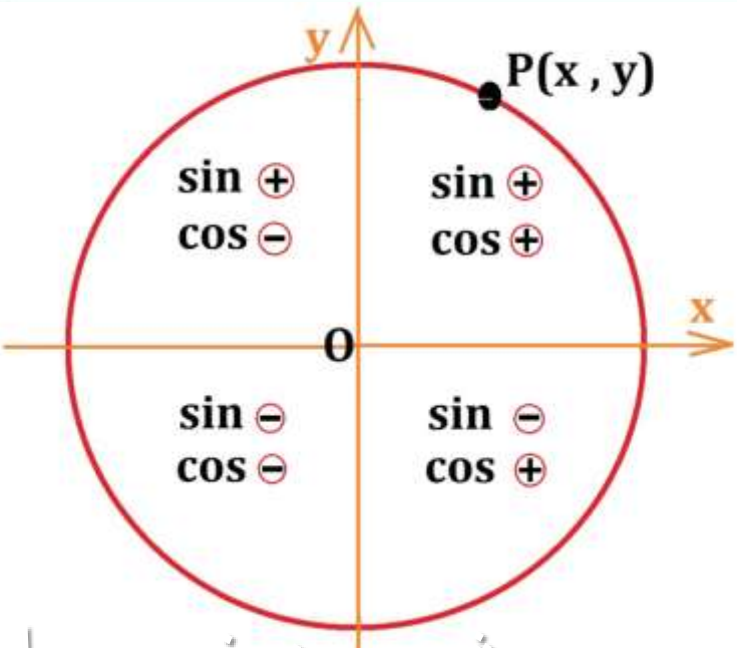
رابطه بین نسبت های مثلثاتی

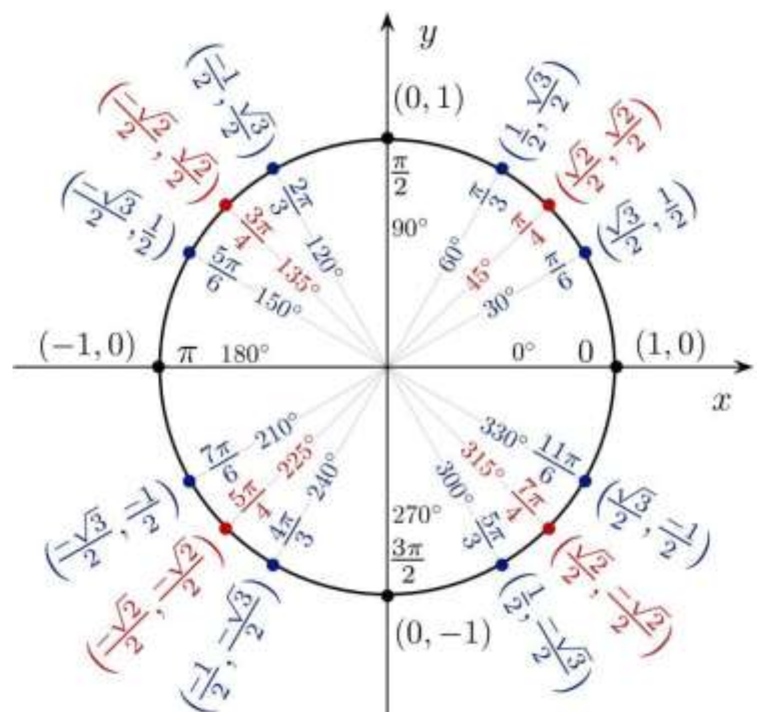
$$\sin^{۲}\theta = ۱ - \cos^{۲}\theta$$

$$\cos^{۲}\theta = ۱ - \sin^{۲}\theta$$

$$\cos^{۲}\theta = \frac{۱}{۱ + \tan^{۲}\theta}$$

$$\sin^{۲}\theta = \frac{۱}{۱ + \cot^{۲}\theta}$$





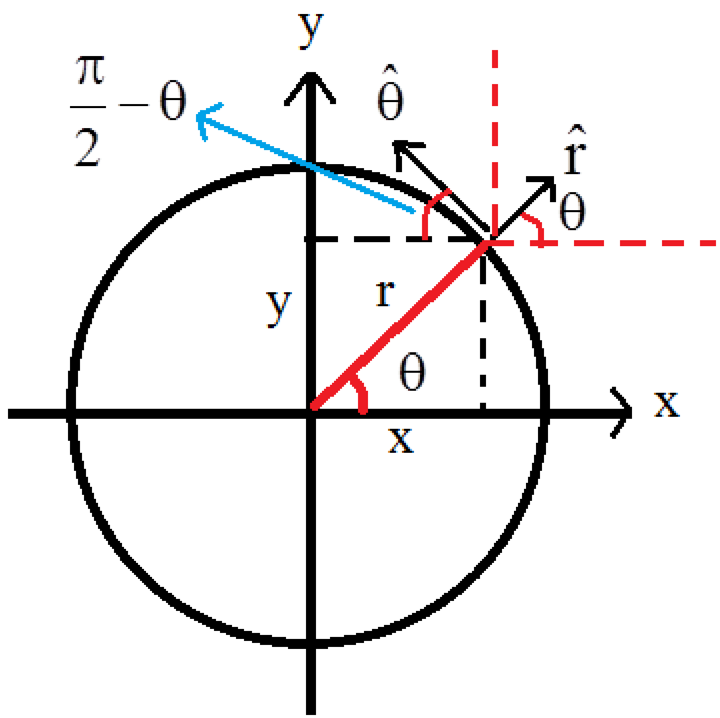
دستگاه مختصات قطبی (r,θ) :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \\ \tan(\theta) &= \frac{y}{x} \\ r &= \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}}$$

$$\hat{r} = \underbrace{|\hat{r}|}_{=1}\cos(\theta)\,\hat{i} + \underbrace{|\hat{r}|}_{=1}\sin(\theta)\,\hat{j} \Rightarrow \boxed{\hat{r} = \cos(\theta)\,\hat{i} + \sin(\theta)\,\hat{j}}$$

$$\hat{\theta} = \underbrace{|\hat{\theta}|}_{=1}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}_{=\sin(\theta)}\left(-\hat{i}\right) + \underbrace{|\hat{\theta}|}_{=1}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}_{=\cos(\theta)}\left(\hat{j}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{\theta} = -\sin(\theta)\,\hat{i} + \cos(\theta)\,\hat{j}}$$

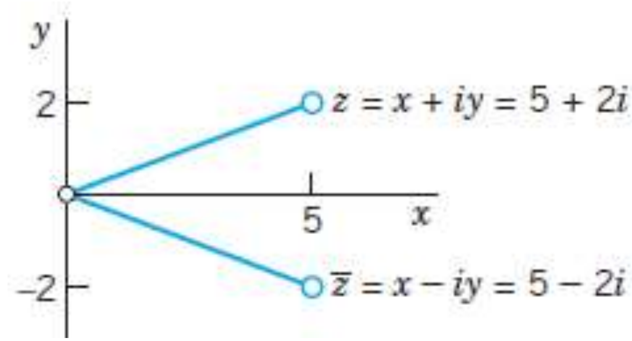


$$\boxed{\begin{aligned} &\text{if}: \quad \vec{r} = r\,\hat{r} \\ &\vec{r} = |\vec{r}|\cos(\theta)\,\hat{i} + |\vec{r}|\sin(\theta)\,\hat{j} \Rightarrow \\ &\vec{r} = r|\hat{r}|\cos(\theta)\,\hat{i} + r|\hat{r}|\sin(\theta)\,\hat{j} \Rightarrow \\ &\vec{r} = r\cos(\theta)\,\hat{i} + r\sin(\theta)\,\hat{j} \end{aligned}}$$

اعداد مختلط

$$z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

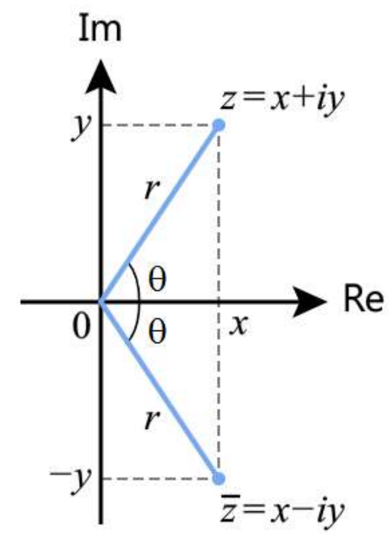
Complex Number: $\left.\begin{array}{l} \boxed{z = x + iy} \\ x = \mathrm{Real}(z) \\ y = \mathrm{Imagination}(z) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)}$



$\boxed{\text{Complex Number conjugate: } \quad z^* = \bar{z} = (x+iy)^* = x - iy}$

مزدوج مختلط :

Polar form: $\left.\begin{array}{l} z = x + iy \\ x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array}\right\} \Rightarrow z = r\cos(\theta) + i\,r\sin(\theta)$



$\boxed{\text{Euler's formula: } \begin{cases} e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta) \\ re^{i\theta} = r\cos(\theta) + i\,r\sin(\theta) = z = x + iy \end{cases}}$

$\boxed{\text{De Moiver's formula: } (\cos(\theta) + i\,\sin(\theta))^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\,\sin(n\theta)}$

$\boxed{\sin(n\theta) = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}}$ and $\boxed{\cos(n\theta) = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}}$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x|$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x|$$

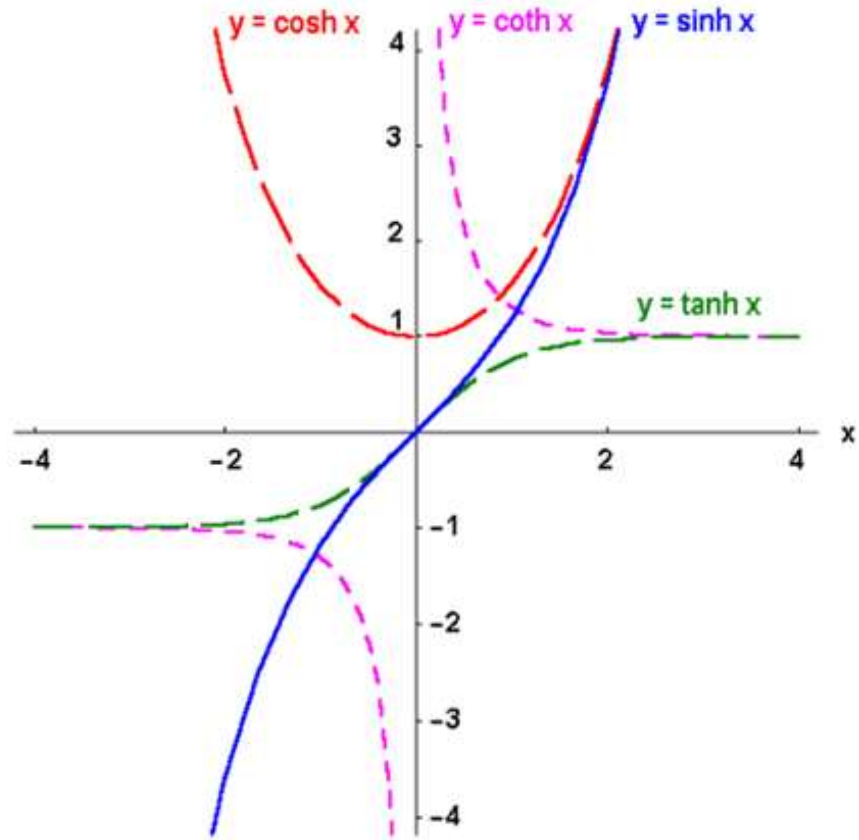
$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \coth^{-1} x$$

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$



انتگرال جزء به جزء:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

محاسبه چهارانتگرال پرکاربرد در فیزیک ۲:

$$\mathrm{I}_1 : \int_a^b \frac{dx}{\left(x^2+\ell^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \mathrm{I}_2 : \int \frac{dx}{\left(x^2+\ell^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad \mathrm{I}_3 : \int_a^b \frac{y\,dy}{\left(y^2+\ell^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \mathrm{I}_4 : \int_a^b \frac{x\,dx}{\left(x^2+\ell^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathrm{I}_1 : \int_a^b \frac{dx}{\left(x^2+\ell^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\ell^3}\int_a^b \frac{dx}{\left((\frac{x}{\ell})^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \quad ,$$

$$\frac{x}{\ell} = \tan\theta \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{\ell} = (1+\tan^2\theta)\,d\theta \rightarrow dx = \dfrac{\ell\,d\theta}{\cos^2\theta} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\ell}\right) \rightarrow \sin(\theta) = \sin\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}_1 : \frac{1}{\ell^3}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\dfrac{\ell\,d\theta}{\cos^2\theta}}{\left((\tan^2\theta+1) = \dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\ell^2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta\;d\theta = \frac{1}{\ell^2}\left[\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right]$$

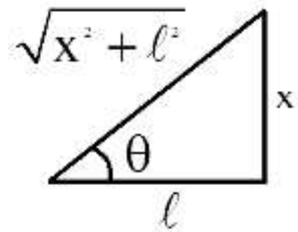
$$\sin\theta_1 = \sin\left[\tan^{-1}\left(\frac{a}{\ell}\right)\right] \quad , \quad \sin\theta_2 = \sin\left[\tan^{-1}\left(\frac{b}{\ell}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}_1 : \frac{1}{\ell^2}\left[\sin\left[\tan^{-1}\left(\frac{b}{\ell}\right)\right] - \sin\left[\tan^{-1}\left(\frac{a}{\ell}\right)\right]\right]$$

$$\frac{x}{\ell}=\tan\theta \rightarrow \frac{dx}{\ell}=(1+\tan^2\theta)\,d\theta \rightarrow dx=\frac{\ell\, d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$I_2:\ \int \frac{dx}{\left(x^2+\ell^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\ell}\int \frac{dx}{\left((\frac{x}{\ell})^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}\ ,$$

$$\sin(\theta)=\frac{x}{\sqrt{x^2+\ell^2}}$$



$$\Rightarrow I_2:\frac{1}{\ell}\int \frac{\frac{\ell d\theta}{\cos^2\theta}}{\left((\tan^2\theta+1)=\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}}=\int\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int\frac{d\theta}{\cos\theta}\times\frac{\cos\theta}{\cos\theta}=\int\frac{\cos\theta d\theta}{(1-\sin^2\theta)}=\int\frac{\cos\theta d\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$\xrightarrow[{[\cos\theta\times d\theta=du]}]{[\sin\theta=u]} I_2:\int\frac{du}{(1-u)(1+u)}$$

$$\boxed{\frac{1}{(1-u)(1+u)}=\frac{A}{(1+u)}+\frac{B}{(1-u)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\ A-B=0\end{cases}\Rightarrow A=B=\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow I_2:\left[\frac{1}{2}\int\frac{du}{(1+u)}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{(1-u)}\right]=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Ln}(1+u)-\mathrm{Ln}(1-u)\right]=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Ln}\frac{(1+u)}{(1-u)}\right]$$

$$\xrightarrow{[\sin\theta=u]} I_2:\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left[\frac{(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left[\frac{(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\ell^2}})}{(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+\ell^2}})}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left[\frac{(\sqrt{x^2+\ell^2}+x)}{(\sqrt{x^2+\ell^2}-x)}\right]$$

$$I_3 : \int_a^b \frac{y\,dy}{\left(y^2+\ell^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \left[y^2+\ell^2 = u^2 \Rightarrow y\,dy = u\,du \right]$$

$$\Rightarrow I_3 : \int_{u_1}^{u_2} \frac{u\,du}{(u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{u_1}^{u_2} u^{-2}du = -\left[\frac{1}{u}\right]_{u_1}^{u_2} = \left[\frac{1}{u}\right]_{u_2}^{u_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\ell^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+\ell^2}}$$

$$\boxed{u = \sqrt{y^2+\ell^2} = \begin{cases} u_1 = \sqrt{a^2+\ell^2} \\ u_2 = \sqrt{b^2+\ell^2} \end{cases}}$$

$$I_4 : \int_a^b \frac{x\,dx}{\left(x^2+\ell^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad \boxed{x^2+\ell^2 = u^2 \Rightarrow x\,dx = u\,du}$$

$$\Rightarrow I_3 : \int_{u_1}^{u_2} \frac{u\,du}{(u^2)^{\frac{1}{2}}} = \int_{u_1}^{u_2} du = [u]_{u_1}^{u_2} = [u_2 - u_1] = \sqrt{b^2+\ell^2} - \sqrt{a^2+\ell^2}$$

$$\boxed{u = \sqrt{x^2+\ell^2} = \begin{cases} u_1 = \sqrt{a^2+\ell^2} \\ u_2 = \sqrt{b^2+\ell^2} \end{cases}}$$

تکلیف– دو انتگرال زیر را محاسبه نمایید:

$$(1):\ \int_a^b \frac{dx}{\left(x^2+\ell^2\right)^n} \quad , \quad (2):\ \int_a^b \frac{x\,dx}{\left(x^2+\ell^2\right)^n} \quad , \left[n\in\mathbb{Z} \text{ and } \ell\in\mathbb{Z}\right]$$

$$(1):\ \int \sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta = \begin{cases} \int \sin(\theta)\,d\left(\sin(\theta)\right) = \dfrac{\sin^2(\theta)}{2} \\ -\int \cos(\theta)\,d\left(\cos(\theta)\right) = -\dfrac{\cos^2(\theta)}{2} \end{cases}$$

$$(2):\ \int \sin^n(\theta)\cos(\theta)\,d\theta = \int \sin^n(\theta)\,d\left(\sin(\theta)\right) = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}(\theta)$$

$$(3):\ \int \cos^n(\theta)\sin(\theta)\,d\theta = -\int \cos^n(\theta)\,d\left(\cos(\theta)\right) = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(\theta)$$

$$(4):\ \int \sin(2\theta)\ d\theta = \frac{1}{2}\int \sin(2\theta)\ d(2\theta) = -\frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

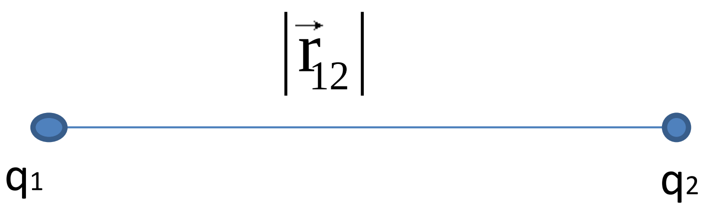
$$(5):\ \int \cos(2\theta)\ d\theta = \frac{1}{2}\int \cos(2\theta)\ d(2\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

قانون کولن: به تجربه مشاهده کردید وقتی دو میله ای شیشه ای را که به پارچه ای ابریشمی مالیده شده اند از تکیه گاهی آویزان نماییم دو میله یکدیگر را دفع می نمایند وحال اگر دو میله پلاستیکی را با پوست خز مالش دهیم آن دو نیز یکدیگر را دفع می نمایند در حالت سوم یک میله شیشه و یک میله پلاستیکی یکدیگر راجذب می نمایند. نتیجه این ازمایش ساده ان است که در اثر مالش در میله ها پدیده ای جدید به وجود می آید که خود می تواند عامل ایجاد نیرویی جدید باشد که این عوامل جدید را «بار الکتریکی» می گوییم و حال داریم :

اگر A، Bرا جذب نمایید Aو B بارهای غیر هم نام دارند و اگر A, B را دفع نماید A و B بارهای هم نام دارند.

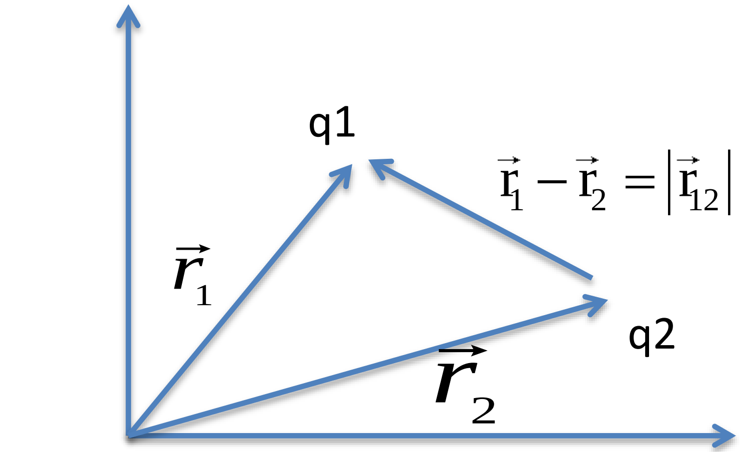
بار کوانتیزه :هر بار در عالم هستی ضریب صحیح از بار مرجع e(بار الکترون) است.

قانون کولن (قانون تجربی):



داریم :

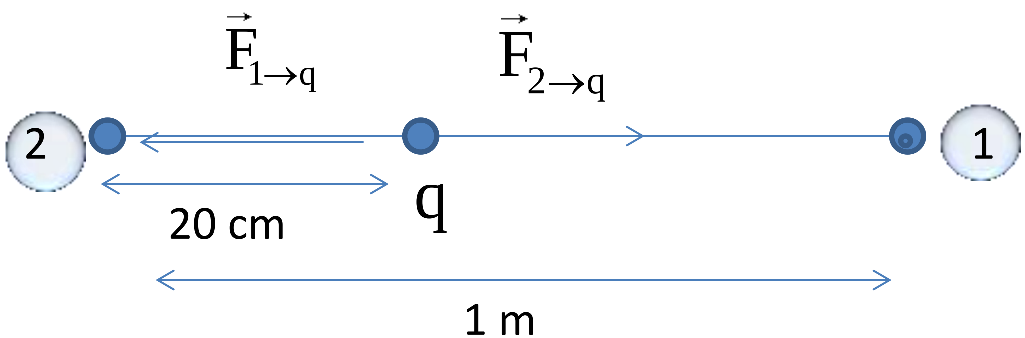
$$F \propto \begin{cases} q_1 q_2 \\ \dfrac{1}{|\vec{r}_{12}|^2} \end{cases}$$

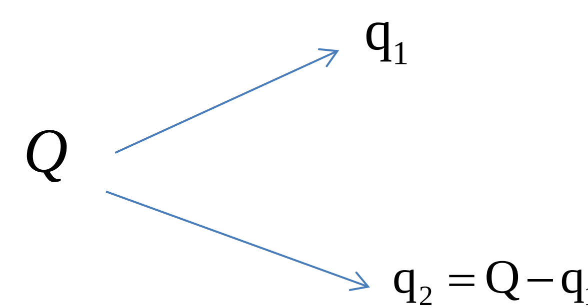


$$\vec{F}_{q_1q_2} \propto \frac{q_1q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{q_1q_2} = k\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}}$$

$$\begin{cases} \text{M.K.S}: & k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\,\dfrac{\text{nm}^2}{\text{c}^2} \\ \text{C.G.S}: & k = 1 \end{cases}$$

مثال) دو نقطه از یکدیگر ۱ متر فاصله دارند , بارواحد qدر فاصله 20 cm از نقطه ۲ قرار گرفته است بار Q را چگونه بین نقطه ۱و۲ تقسیم کنیم به نحوی که نیروی وارد بر q از طرف دوبار تقسیم شده برابر باشد ؟





$$\vec{F}_{1\to q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\,\frac{q_1 q}{(.8\text{m})^2}$$

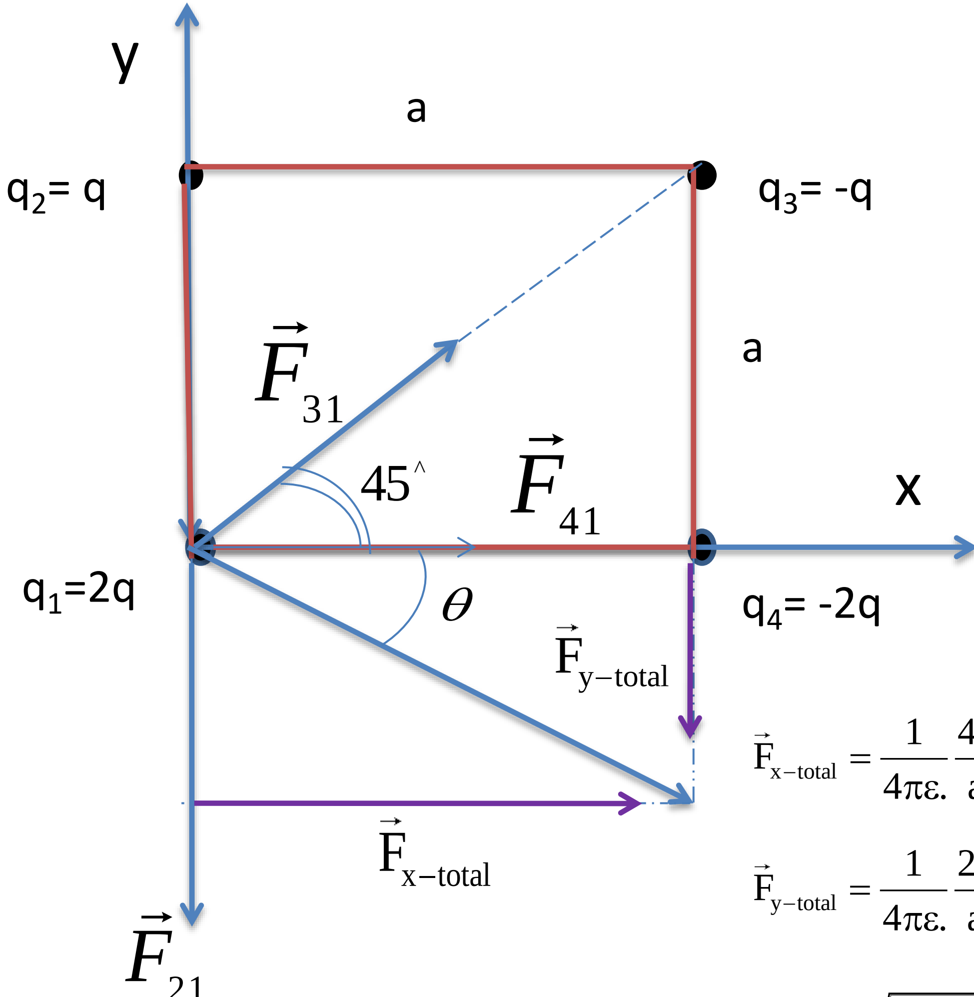
$$\vec{F}_{2\to q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\,\frac{q_2 q}{(.2\text{m})^2}$$

$$\xrightarrow{\vec{F}_{1\to q} = \vec{F}_{2\to q}}$$

$$\frac{q_1 q}{(0.8)^2} = \frac{q_2 q}{(0.2)^2} \Rightarrow \frac{q_1}{(0.8)^2} = \frac{(Q - q_1)}{(0.2)^2} \Rightarrow$$

$$q_1 = 4(Q - q_1) \Rightarrow q_1 = \frac{16}{17}Q \;,\; q_2 = \frac{1}{17}Q$$

مثال: چهار بار نقطه ای مطابق شکل در چهار راس مربعی به ضلع a قرار گرفته اند مطلوب است محاسبه ی مولفه ها ونیرو ی وارد بر بار 2q.



$$\vec{F}_{21} = \left| \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{q(2q)}{(a)^2} \right| (-\hat{j})$$

$$\vec{F}_{41} = \left| \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{2q(-2q)}{(a)^2} \right| (\hat{i})$$

$$\vec{F}_{31} = \left| \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{-q(2q)}{(\sqrt{2}a)^2} \right| (\cos 45\,\hat{i} + \sin 45\,\hat{j})$$

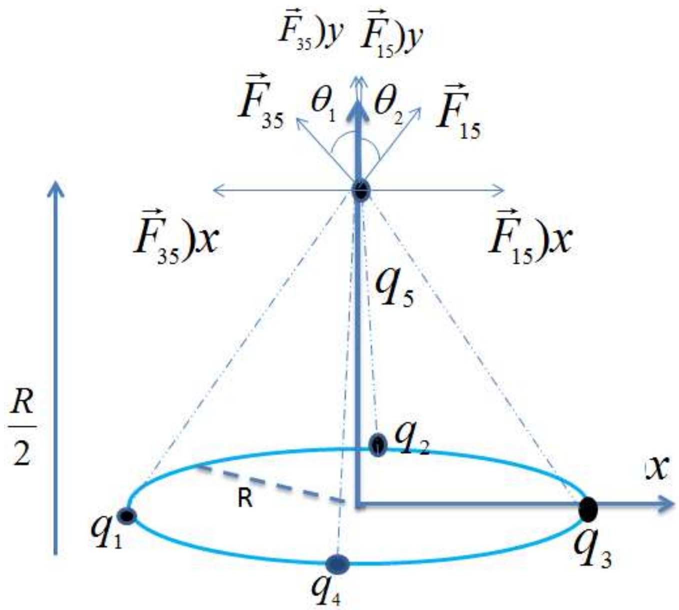
$$\vec{F}_{x-total} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{4q^2}{a^2}(\hat{i}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{\sqrt{2}q^2}{2a^2}(\hat{i}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{q^2}{2a^2}(\hat{i}) \left[\frac{8+\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$\vec{F}_{y-total} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{2q^2}{a^2}(-\hat{j}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{\sqrt{2}q^2}{2a^2}(\hat{j}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{q^2}{2a^2} \left[\frac{-4+\sqrt{2}}{2} \right] (\hat{j})$$

$$\left|F_{total}\right| = \sqrt{(\vec{F}_{x-total})^2 + (\vec{F}_{y-total})^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\circ}} \frac{q^2}{2a^2} \left(\sqrt{\left(\frac{8+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4+\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right) = \therefore$$

$$\tan\theta = \frac{-4+\sqrt{2}}{8+\sqrt{2}} = \therefore$$

مثال: چهار بار نقطه ای مطابق شکل بر روی دایره ای قرار گرفته اند نیروی برایند وارد بر بار پنجم چقدر است ؟



$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q$$

$$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \cos\theta_1 = \frac{\frac{R}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

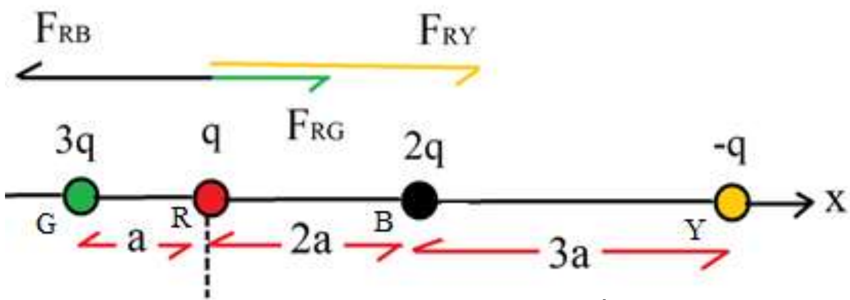
به دلیل تقارن $\vec{F}_{15})x$ و $\vec{F}_{35})x$ یکدیگر را حذف میکنند مانند همین برای $\vec{F}_{25}$ و $\vec{F}_{45}$ نیز داریم . پس تنها چهار مولف عمودی در راستای محور y از چهار نیرو باقی میماند.

$$\vec{F}_{15} = \vec{F}_{25} = \vec{F}_{35} = \vec{F}_{45} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(\frac{\sqrt{5}}{2}R)^2}$$

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{y-total} = 4\times[\vec{F}_{y-15}] = 4\times\frac{1}{4\pi\varepsilon.}\frac{q^2}{\frac{5}{4}R^2}\times\cos\theta_1\hat{j}$$

$$\vec{F}_{total} = \frac{4q^2}{5\pi\varepsilon.R^2}\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j} = \frac{4q^2}{5\sqrt{5}\pi\varepsilon.R^2}\hat{j}$$

مثال) مطابق شکل ٤ بار نقطه ای روی خطی مستقیم قرار دارند. مطلوبست محاسبه ی جهت و اندازه ی نیروی برآیند وارد بر بار q.



$$\vec{F}_{q_1q_2}=k\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\xrightarrow{k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}}\begin{cases}\vec{F}_{RG}=k\frac{q_Rq_G}{|\vec{r}_{RG}|^2}(\hat{i})=k\frac{q(3q)}{|a|^2}(\hat{i})=k\frac{(3q^2)}{|a|^2}(\hat{i})\\ \vec{F}_{RB}=k\frac{q_Rq_B}{|\vec{r}_{RB}|^2}(-\hat{i})=k\frac{q2q}{|2a|^2}(-\hat{i})=k\frac{(2q^2)}{4|a|^2}(-\hat{i})\\ \vec{F}_{RY}=k\frac{q_Rq_Y}{|\vec{r}_{RY}|^2}(\hat{i})=k\frac{q(|-q|)}{|5a|^2}(\hat{i})=k\frac{(q^2)}{25|a|^2}(\hat{i})\end{cases}$$

$$\Rightarrow\vec{F}_{total}=k\frac{(q^2)}{|a|^2}\left[\frac{3}{1}-\frac{2}{4}+\frac{1}{25}\right](\hat{i})=k\frac{(q^2)}{|a|^2}[2.54](\hat{i})$$

فصل دوم: میدان الکتریکی

داشتیم: $\vec{F}_{q_1.q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1.q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}$ و حال تعریف می شود:

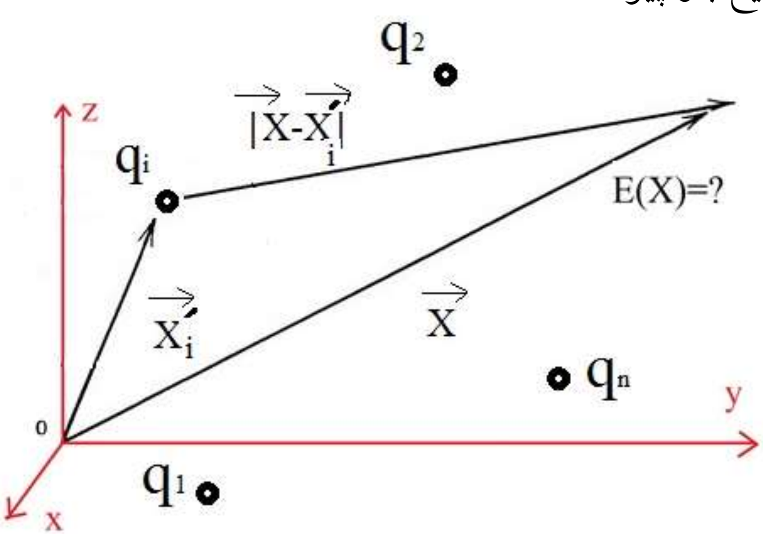
$$\vec{E} = \lim_{q\to 0}\vec{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}q_i}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum q_i}{|\vec{r}_{q_i}|^2}$$

q_i = بار موجود در هر نقطه از فضا.

r_{qi} = فاصله بار مورد نظر تا نقطه ای که میدان محاسبه می شود.

در طبیعت دو نوع توزیع بار موجود است:۱ – توزیع بار نقطه ای ۲– توزیع بار پیوسته

(الف) محاسبه میدان الکتریکی برای توزیع بار (نقطه ای)



برای محاسبه مقدار میدان الکتریکی ناشی از بار های نقطه ای به روش زیر عمل می نماییم:

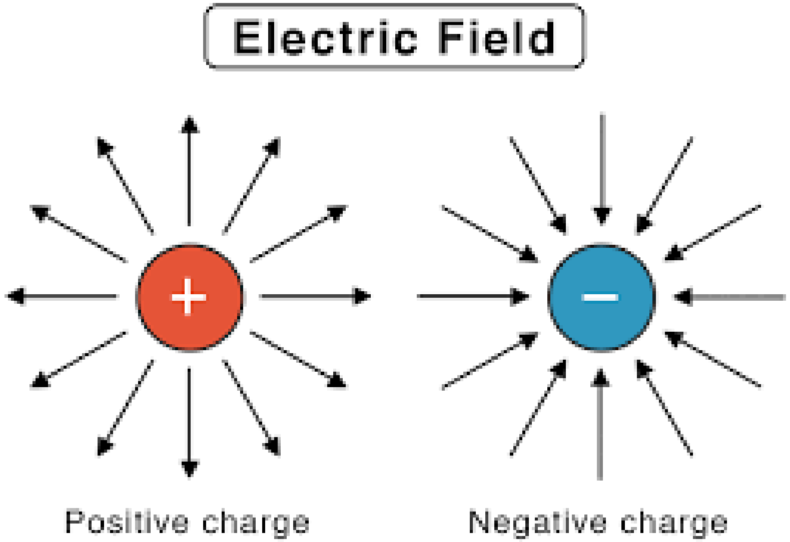
۱– انتخاب دستگاه مختصات مناسب (برای سهولت محاسبات ریاضی).

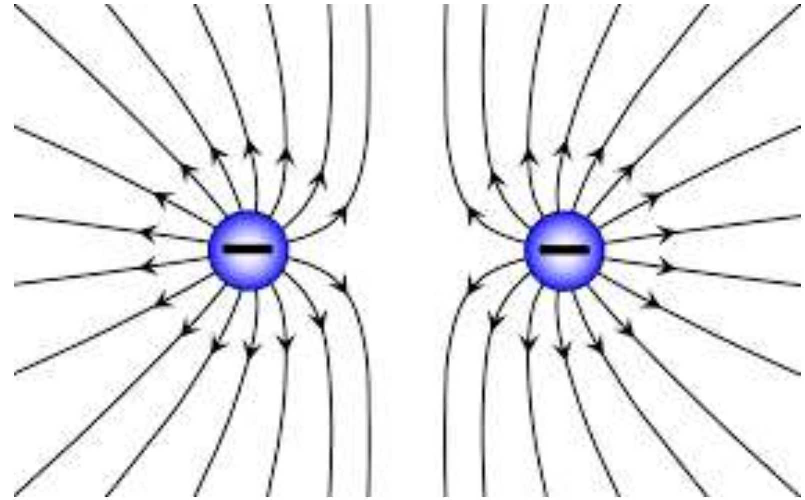
۲– بردار مکانی که مبدا مختصات را به نقطه ای که میدان الکتریکی در آنجا خواسته شده، وصل می کند را با بردار $\vec{X}$ نشان می دهیم.

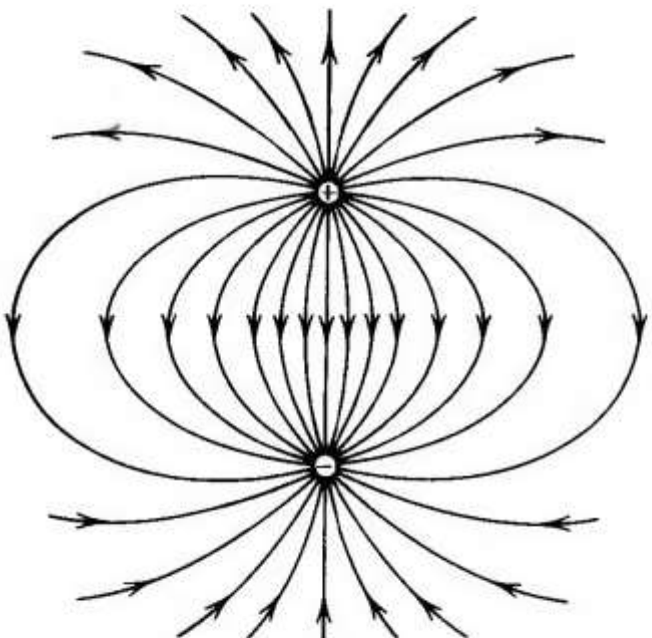
۳– بردار مکانی که از مبدا مختصات به مکان بار i ام متصل می شود را با $\vec{X}'_i$ نمایش می دهیم.

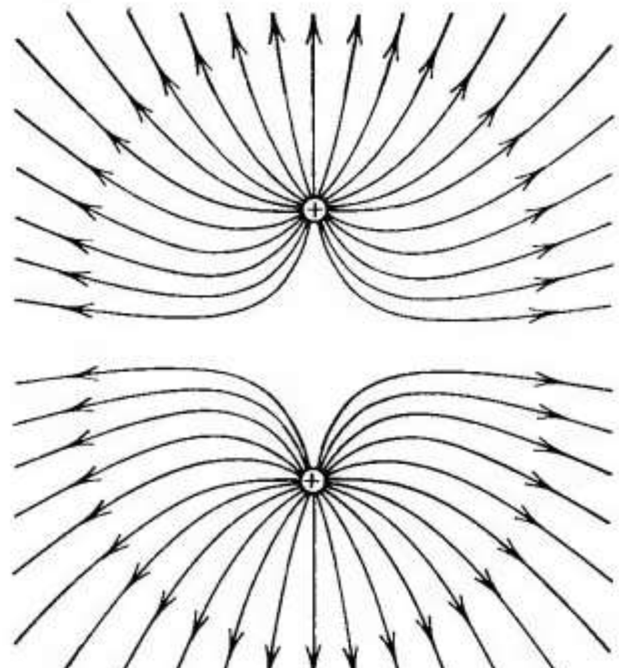
٤– استفاده از رابطه زیر برای محاسبه میدان

$$\vec{E}(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{X}-\vec{X}'_i)}{|\vec{X}-\vec{X}'_i|^3} \quad or \quad \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}'_i)}{|\vec{r}-\vec{r}'_i|^3}$$


Electric Field
Positive charge
Negative charge



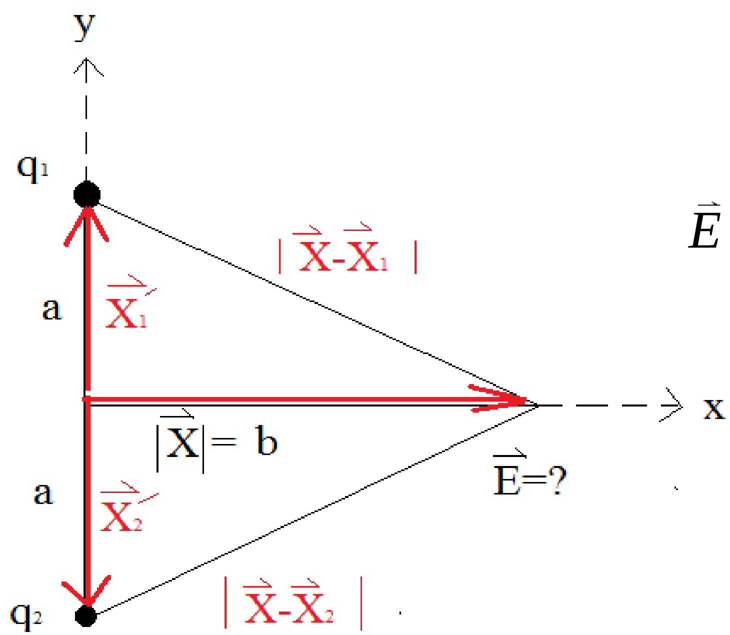




در حقیقت فرمول قبل رابطه ی روبروست:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}|^2}\hat{r}\ \xrightarrow{\hat{r}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}\ \vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

مثال) مطلوبست محاسبه میدان الکتریکی یک دو قطبی الکتریکی به فاصله 2a در نقطه ای واقع در خط عمود منصف خط واصل دو بار و به فاصله b از خط واصل.



داریم:

$$\vec{E}\left(\vec{X}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\vec{X}-\vec{X}_i'\right)}{\left|\vec{X}-\vec{X}_i'\right|^3}$$

$$\vec{X}=b\hat{i}\ ,\ \vec{X}_1'=a\hat{j}\ ,\ \vec{X}_2'=a(-\hat{j})\ ,$$

$$\left|\vec{X}-\vec{X}_1'\right|=\left|\vec{X}-\vec{X}_2'\right|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1\left(\vec{X}-\vec{X}_1'\right)}{\left|\left(\vec{X}-\vec{X}_1'\right)\right|^3}+\frac{q_2\left(\vec{X}-\vec{X}_2'\right)}{\left|\left(\vec{X}-\vec{X}_2'\right)\right|^3}\right]$$

$$\vec{E}(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q\left(b\,\hat{\mathrm{i}}-a\,\hat{j}\right)}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{-q\left(b\,\hat{\mathrm{i}}-a\,\hat{j}\right)}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\Rightarrow\vec{E}(x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left[b\hat{i}-a\hat{j}-b\hat{i}-a\hat{j}\right]$$

$$\Rightarrow\vec{E}(x)=\frac{q(2a)}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}}}(-\hat{\mathrm{j}})$$

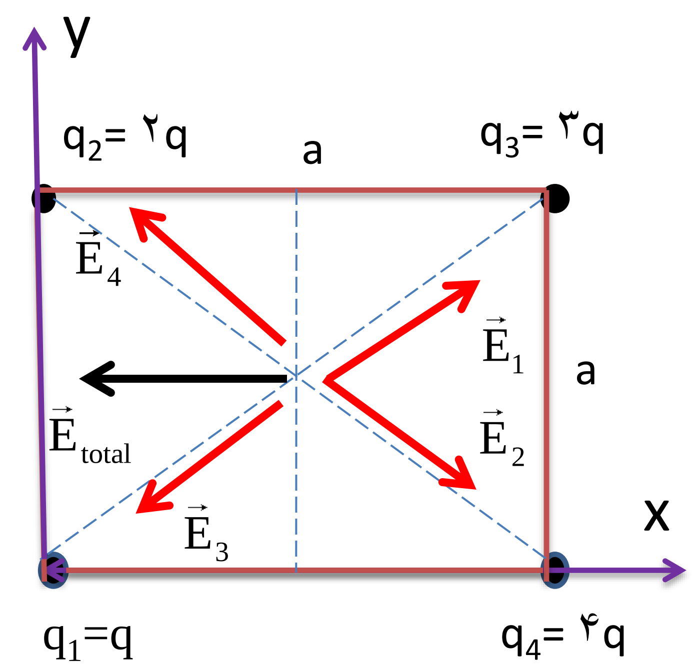
مثال) مطلوبست محاسبه میدان الکتریکی در مرکز مربع شکل زیر:

$$\vec{X}=\frac{a}{2}(\hat{\mathrm{i}}+\hat{\mathrm{j}})\ \ ,\ \ \vec{X}_1'=0\ \ ,\ \ \vec{X}_2'=a\hat{\mathrm{j}}\ ,$$

$$\vec{X}_3'=a(\hat{\mathrm{i}}+\hat{\mathrm{j}})\ \ ,\ \ \vec{X}_4'=a\hat{\mathrm{i}}$$

$$\vec{X}=\frac{\sqrt{2}}{2}a\left[\cos 45^{\circ}\,\hat{\mathrm{i}}+\sin 45^{\circ}\ \hat{\mathrm{j}}\right]$$

$$\left|\vec{X}-\vec{X}_1'\right|=\left|\vec{X}-\vec{X}_2'\right|=\left|\vec{X}-\vec{X}_3'\right|=\left|\vec{X}-\vec{X}_4'\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$



$$\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{X}})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\mathrm{i}=1}^{4}\frac{\mathrm{q_i}\left(\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{X}}'_{\mathrm{i}}\right)}{\left|\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{X}}'_{\mathrm{i}}\right|^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\left[\left(\frac{a}{2}\hat{\mathrm{i}}+\frac{a}{2}\hat{\mathrm{j}}-0\right)\right]}{(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{a})^3}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q\left(\frac{a}{2}\hat{\mathrm{i}}+\frac{a}{2}\hat{\mathrm{j}}-a\hat{\mathrm{j}}\right)}{(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{a})^3}$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3q\left(\frac{a}{2}\hat{\mathrm{i}}+\frac{a}{2}\hat{\mathrm{j}}-a\hat{\mathrm{i}}-a\hat{\mathrm{j}}\right)}{(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{a})^3}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q\left(\frac{a}{2}\hat{\mathrm{i}}+\frac{a}{2}\hat{\mathrm{j}}-a\hat{\mathrm{i}}\right)}{(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{a})^3}=\frac{q}{\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^2}\left[-2i\right]$$

$$\tan\theta=\frac{E_{\mathrm{x}}}{E_{\mathrm{y}}}=\frac{-2}{0}=\infty\Rightarrow\theta=0$$

ب) محاسبه میدان الکتریکی برای توزیع بار (پیوسته)

برای محاسبه مقدار میدان الکتریکی ناشی از بار های نقطه ای به روش زیر عمل می نماییم.

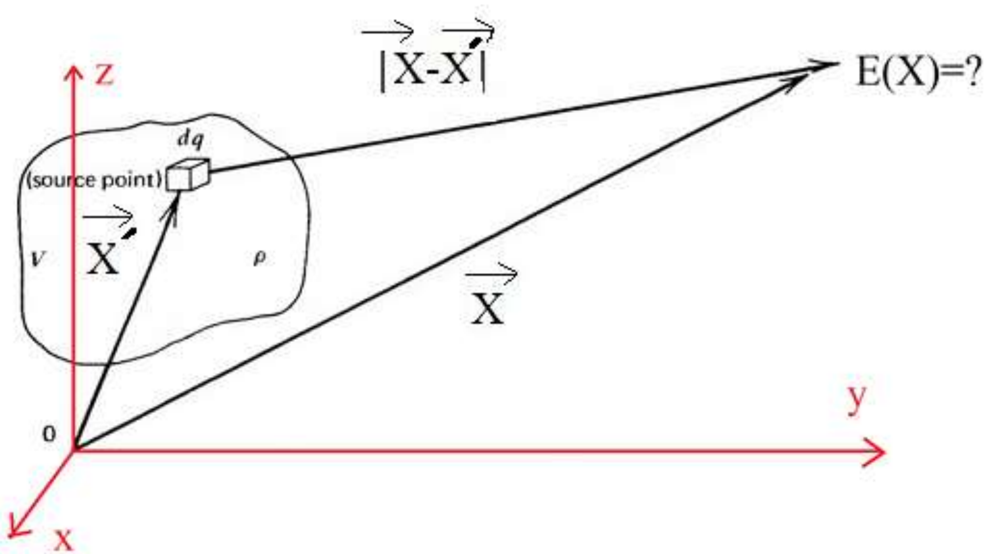
۱- انتخاب دستگاه مختصات مناسب (برای سهولت محاسبات ریاضی).

۲- بردار مکانی که مبدا مختصات را به نقطه ای که میدان الکتریکی در آنجا خواسته شده وصل می کند را با بردار $\vec{X}$ نشان می دهیم.

۳- بردار مکانی که از مبدا مختصات به مکان المان بار متصل می شود را با $\vec{X}'$ نمایش می دهیم.

٤- محاسبه $dq(\vec{X}')$ با توجه به تعریف نوع توزیع بار.

۵- استفاده از رابطه زیر برای محاسبه میدان الکتریکی $\boxed{\vec{E}(\vec{X})}$:



$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq\,(\vec{x}')\left(\vec{X}-\vec{X}'\right)}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3}}$$

در انتگرال بالا چون المان توزیع بار (dq) و مکان قرار گیری آن وابسته به ابعاد است، می بایست ارتباطی بین المان بار و ابعاد برقرار نمود.

محاسبه ی dq ها با توجه به نوع توزیع بار :

الف) اگر توزیع بار خطی باشد:

$$\lambda = \frac{Q}{L} \quad \text{or} \quad \lambda = \frac{dq}{dL} \Rightarrow dq = \lambda\, dL \quad ;\lambda : \text{linear charge density}$$

ب) اگر توزیع بار سطحی باشد:

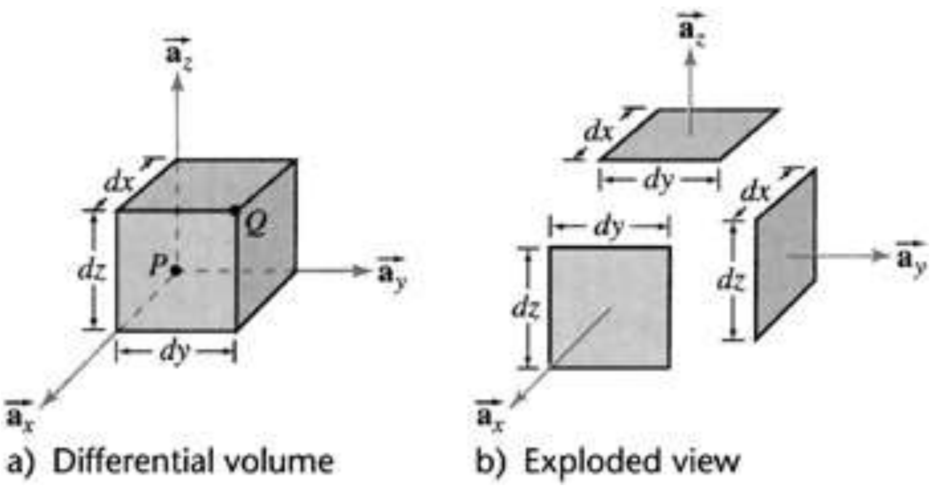
$$\sigma = \frac{Q}{S} \quad \text{or} \quad \sigma = \frac{dq}{dS} \Rightarrow dq = \sigma\, dS \quad ;\sigma : \text{surface charge density}$$

ج) اگر توزیع بار حجمی باشد:

$$\rho = \frac{Q}{V} \quad \text{or} \quad \rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho\, dV \quad ;\rho : \text{volume charge density}$$

dq در دستگاه های مختصات:

۱- دستگاه مختصات کارتزین (x, y, z)



$$\left.\begin{aligned} dL &= dx,\ dy \ \text{or} \ dz \\ dS &= dx\,dy,\ dx\,dz \ \text{or} \ dy\,dz \\ dV &= dx\,dy\,dz \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} dq &= \lambda dx,\ \lambda dy \ \text{or} \ \lambda dz \\ dq &= \sigma dx\,dy,\ \sigma dx\,dz \ \text{or} \ \sigma dy\,dz \\ dq &= \rho dx\,dy\,dz \end{aligned}\right.$$

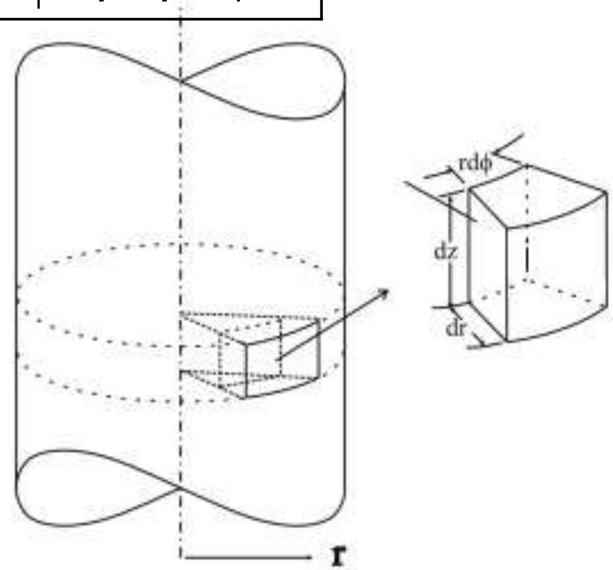
۲– دستگاه مختصات استوانه ای (ρ,θ,z)

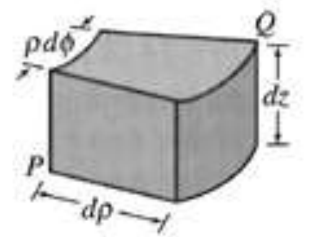
$$\begin{cases} |dL| = d\rho,\ \rho\, d\varphi \ \text{ or } \ dz \\ dL = d\rho\,\hat{\rho},\ \rho\, d\varphi\,\hat{\varphi} \ \text{ or } \ dz\,\hat{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dq = \lambda d\rho,\ \lambda\rho\, d\varphi \ \text{ or } \ \lambda dz \\ dq = \sigma d\rho\, dz,\ \sigma\rho\, d\varphi\, d\rho \ \text{ or } \ \sigma\rho\, d\varphi\, dz \\ dV = \boldsymbol{\rho}\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \end{cases}$$

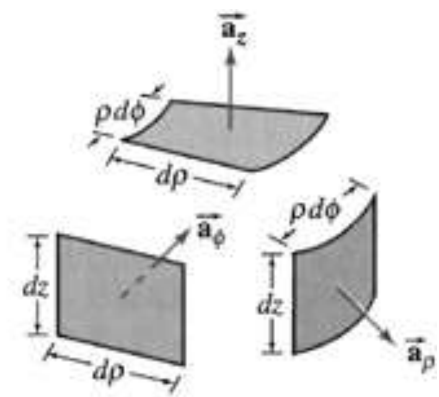
$$\begin{cases} |dS| = d\rho\, dz,\ \rho\, d\varphi\, d\rho \ \text{ or } \ \rho\, d\varphi\, dz \\ d\vec{S}_{front} = d\rho\, dz(-\hat{\varphi}),\ d\vec{S}_{back} = d\rho\, dz(\hat{\varphi}) \\ d\vec{S}_{right} = \rho\, d\varphi\, dz(\hat{\rho}),\ d\vec{S}_{left} = \rho\, d\varphi\, dz(-\hat{\rho}) \\ d\vec{S}_{up} = \rho\, d\varphi\, d\rho(\hat{k}),\ d\vec{S}_{down} = \rho\, d\varphi\, d\rho(-\hat{k}) \end{cases}$$

$$\boxed{|dV| = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}$$

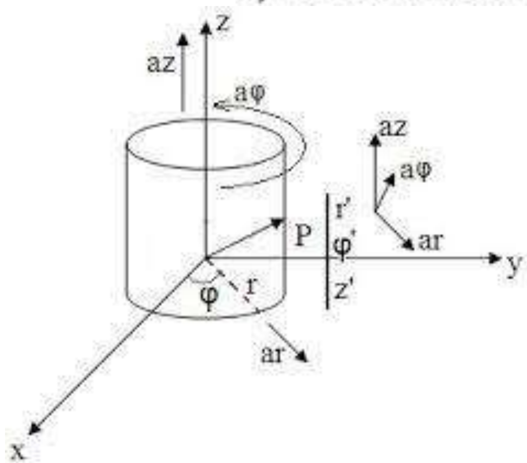


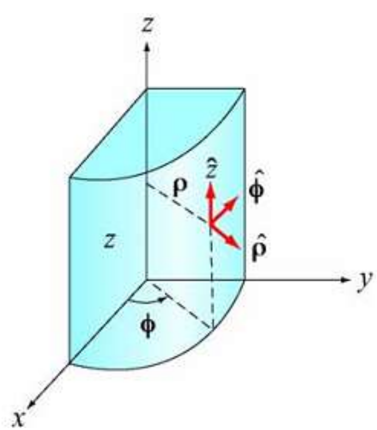


a) Differential volume

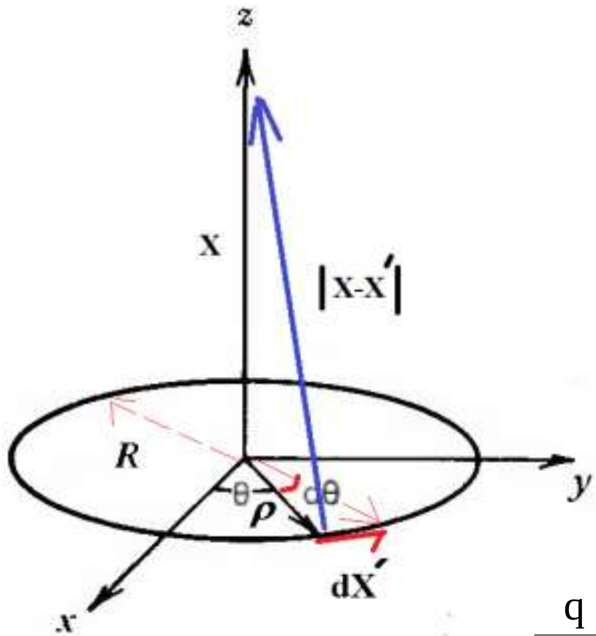


b) Exploded view





مثال) مطلوبست محاسبه میدان الکتریکی حلقه ای به شعاع R و حاوی بار q (یکنواخت) در فاصله L از مرکز حلقه و واقع بر خط عمود بر صفحه و گذرنده از مرکز آن.



$$\boxed{\vec{E}(\vec{X})=\int d\,\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq\left(\vec{X}'\right)\left(\vec{X}-\vec{X}'\right)}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3}}$$

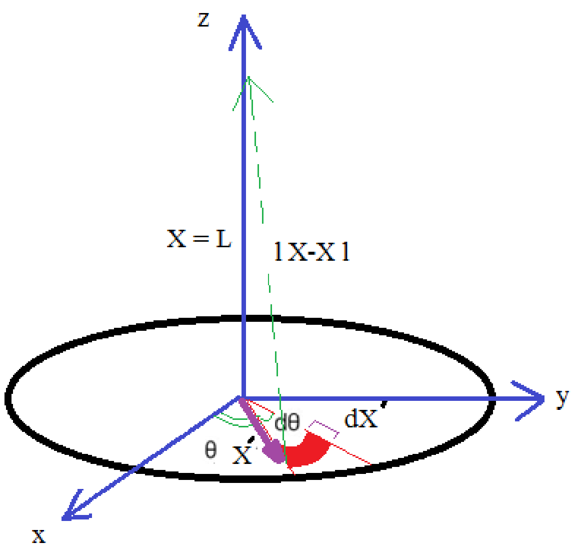
$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{X}=L\hat{k}\ \ ,\ \ \vec{X}'=\rho=R(\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j})\ \ ,\\ |dL|=\left|d\vec{X}'\right|=R\,d\theta\ \ ,\ \ \left|\vec{X}-\vec{X}'\right|=\sqrt{R^2+L^2}\\ dq(\vec{x}')=\lambda|dL|=\lambda\left|d\vec{X}'\right|=\dfrac{q}{2\pi R}(R\,d\theta)\end{array}}$$

$$\vec{E}(\vec{X})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\frac{q}{2\pi R}(R\,d\theta)\left(L\hat{k}-R(\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j})\right)}{(R^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow$$

$$\vec{E}(\vec{X})=\frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0(R^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\rightarrow\left[\int_{\theta=0}^{2\pi}L\hat{k}d\theta-\underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi}(R\hat{i})\cos\theta d\theta}_{=0}-\underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi}(R\hat{j})\sin\theta\,d\theta}_{=0}\right]\Rightarrow$$

$$\vec{E}(\vec{X})=\frac{qL\hat{k}}{8\pi^2\varepsilon_0(R^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\right]=\frac{qL\hat{k}(2\pi)}{8\pi^2\varepsilon_0(R^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow E(\vec{X})=\frac{qL\hat{k}}{4\pi\varepsilon_0(R^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال) مطلوبست محاسبه میدان الکتریکی دیسکی به شعاع R و حاوی بار q (یکنواخت) در فاصله L از مرکز دیسک و واقع بر خط عمود بر صفحه ی دیسک و گذرنده از مرکز آن.



$$\vec{E}(\vec{X})=\int d\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq\left(\vec{X}'\right)\left(\vec{X}-\vec{X}'\right)}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3}$$

$$\vec{X}=L\hat{k}\ ,\ \vec{X}'=\rho(\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j})\ ,\ d\vec{X}'=d\rho$$

$$\left|\vec{X}'\right|=\rho\ ,\ \left|ds\right|=\rho\, d\theta\, d\rho\ ,\ \left|\vec{X}-\vec{X}'\right|=\sqrt{\rho^2+L^2}$$

$$dq(\vec{x}')=\sigma\left|ds\right|=\frac{q}{\pi R^2}(\rho\, d\theta\, d\rho)$$

$$\vec{E}(\vec{X})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\frac{q}{\pi R^2}(\rho\, d\theta\, d\rho)\left(L\hat{k}-\rho(\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j})\right)}{(\rho^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow$$

$$\vec{E}(\vec{X})=\frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0R^2}\left[\int_{\rho=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{L\hat{k}\rho\, d\theta\, d\rho}{(\rho^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}-\int_{\rho=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{(\rho\hat{i})\cos\theta\rho\, d\theta\, d\rho}{(\rho^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}-\int_{\rho=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{(R\hat{j})\sin\theta\,\rho\, d\theta\, d\rho}{(\rho^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\Rightarrow$$

$$\vec{E}(\vec{X})=\frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0R^2}\left[\left(L\hat{k}\right)\left[\int_{\rho=0}^{R}\frac{\rho d\rho}{(\rho^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\times\left[\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\right]\underbrace{-\left(\hat{i}\right)\int_{\rho=0}^{R}\frac{\rho^2d\rho}{(\rho^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\times\underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos\theta\, d\theta}_{=0}}_{=0}\underbrace{-\left(\hat{j}\right)\int_{\rho=0}^{R}\frac{\rho^2d\rho}{(\rho^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\times\underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin\theta\, d\theta}_{=0}}_{=0}\right]\Rightarrow$$

$$\vec{E}(\vec{X})=\frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\left[L\hat{k}\int_{\rho=0}^{R}\frac{\rho d\rho}{(\rho^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\right]=\frac{qL\hat{k}(2\pi)}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\int_{\rho=0}^{R}\frac{\rho d\rho}{(\rho^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\ ,$$

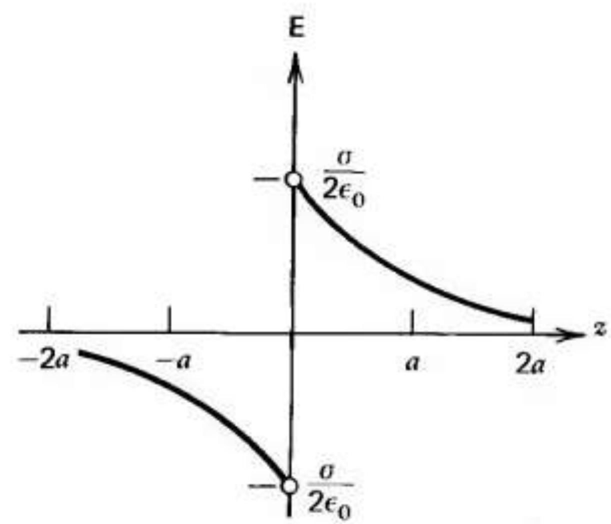
$$\boxed{\left[\rho^2+L^2=U^2\Rightarrow \rho\, d\rho=U\, dU\right]}$$

$$\Rightarrow\vec{E}(\vec{X})=\frac{qL\hat{k}(2\pi)}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\int_{U_1}^{U_2}\frac{UdU}{(U^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{qL\hat{k}}{2\pi\,\varepsilon_0 R^2}\int_{U_1}^{U_2}\frac{dU}{U^2}=\frac{qL\hat{k}}{2\pi\,\varepsilon_0 R^2}\left(-\frac{1}{U}\right)_{U_1}^{U_2}\ ,$$

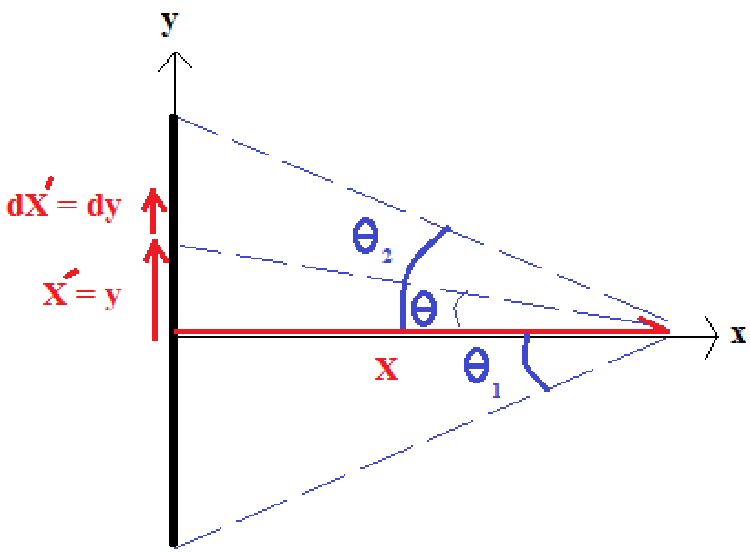
$$\Rightarrow\vec{E}(\vec{X})=\frac{qL\hat{k}}{2\pi\,\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{1}{U_1}-\frac{1}{U_2}\right)\qquad \boxed{\left[U_1=|L|\ ,\ U_2=\sqrt{R^2+L^2}\right]}$$

$$\Rightarrow\vec{E}(\vec{X})=\frac{qL\hat{k}}{2\pi\,\varepsilon_0 R^2}\left[\frac{1}{|L|}-\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2}}\right]\xrightarrow{\sigma=\frac{q}{\pi R^2}}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{X})=\frac{\sigma\hat{k}}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{L}{\sqrt{R^2+L^2}}\right]}\xrightarrow{\text{if}\ :\ R=a\ \&\ z=L}$$



مثال) میله ای به طول L با چگالی خطی و یکنواخت λ باردارشده است مطلوبست محاسبه میدان الکتریکی ناشـی از آن در فاصله a از مرکز میله وواقع بر روی خط عمود منصف میله



$$\boxed{\vec{E}(\vec{X}) = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq\left(\vec{X}'\right)\left(\vec{X}-\vec{X}'\right)}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3}}$$

$$\vec{X} = a\hat{i} \;,\; \vec{X}' = y\hat{j},\; \left|\vec{X}-\vec{X}'\right| = \sqrt{a^2+y^2}$$
$$|dL| = \left|d\vec{X}'\right| = |dy| \,,$$
$$dq(\vec{x}') = \lambda\,|dL| = \lambda\,|dy| = \lambda\, dy$$

$$\vec{E}(\vec{X}) = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq\left(\vec{x}'\right)\left(\vec{X}-\vec{X}'\right)}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda dy\left(a\hat{i}-y\hat{j}\right)}{\left(y^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[a\hat{i}\underbrace{\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}}_{=I_1} - \hat{j}\underbrace{\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{y\,dy}{\left(y^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}}_{=I_2}\right]$$

$$\mathrm{I}_1: \int_{\frac{-\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^3}\int_{\frac{-\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{dy}{\left((\frac{y}{a})^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \left[\frac{\mathrm{y}}{a} = \tan\theta \to \frac{\mathrm{dy}}{a} = (1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \to \mathrm{dy} = \frac{a\,\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}_1 : \frac{1}{a^3}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\frac{ad\theta}{\cos^2\theta}}{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta \; d\theta = \frac{1}{a^2}\left[\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right]$$

$$\left[\sin\theta_1 = \frac{\frac{-\ell}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-\ell}{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{-\ell}{\sqrt{l^2+4a^2}} \;\; , \sin\theta_2 = \frac{\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{l^2+4a^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}_1 : \frac{1}{a^2}\left[\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right] = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{\ell}{\sqrt{l^2+4a^2}} + \frac{\ell}{\sqrt{l^2+4a^2}}\right\} = \frac{2\ell}{\sqrt{l^2+4a^2}} \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$I_2 : \int_{\frac{-\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{y\,dy}{\left(y^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \left[y^2 + a^2 = u^2 \Rightarrow y\,dy = u\,du \right]$$

$$\Rightarrow I_2 : \quad \int_{u_1}^{u_2} \frac{u\,du}{(u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{u_1}^{u_2} u^{-2} du = -\left[\frac{1}{u}\right]_{u_1}^{u_2}$$

$$\left[u = \pm\sqrt{a^2+y^2} = \begin{cases} u_1 = \sqrt{a^2 + (\frac{-\ell}{2})^2} = \frac{\pm\sqrt{\ell^2+4a^2}}{2} = \frac{\sqrt{\ell^2+4a^2}}{2} \\ u_2 = \sqrt{a^2 + (\frac{\ell}{2})^2} = \frac{\pm\sqrt{\ell^2+4a^2}}{2} = \frac{\sqrt{\ell^2+4a^2}}{2} \end{cases} \right]$$

$$\Rightarrow I_2 : \frac{2}{\sqrt{\ell^2+4a^2}} - \frac{2}{\sqrt{\ell^2+4a^2}} = 0$$

$$\vec{E}(\vec{X}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[a\hat{i}\left[\frac{2\ell}{\sqrt{\ell^2+4a^2}} \cdot \frac{1}{a^2}\right] - \hat{j}[0] \right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\ell^2+4a^2}}\left[\frac{2\ell}{a}\hat{i}\right]$$

فصل سوم: تعبیر شار فیزیکی و قانون گوس

تعبیر شار فیزیکی:

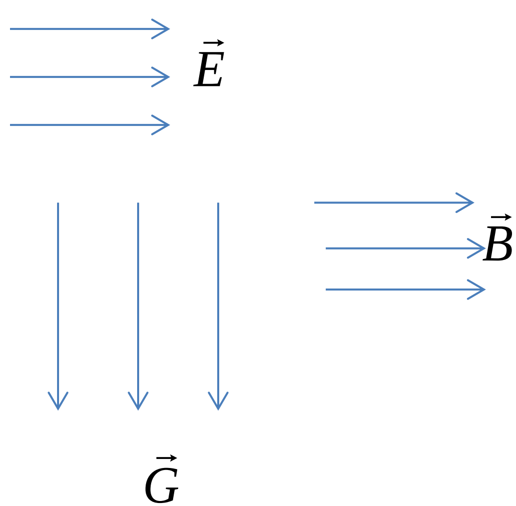
$$d\Phi = \vec{A}.d\vec{s}$$

تغییرات شار فیزیکی

میدان برداری

المان سطح

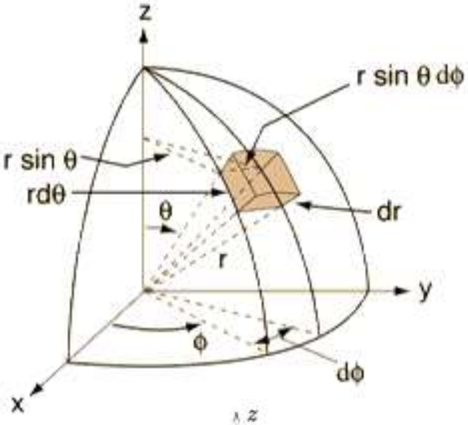
شار فیزیکی : اگر یک میدان برداری $\vec{A}$ از سطح $\vec{S}$ عبور نماید شارفیزیکی اندازه $\vec{A}.\vec{S}$ در روی سطح ایجاد می نماید.

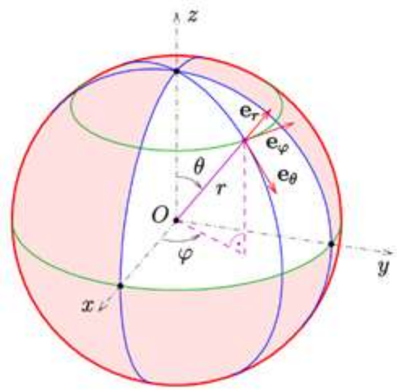


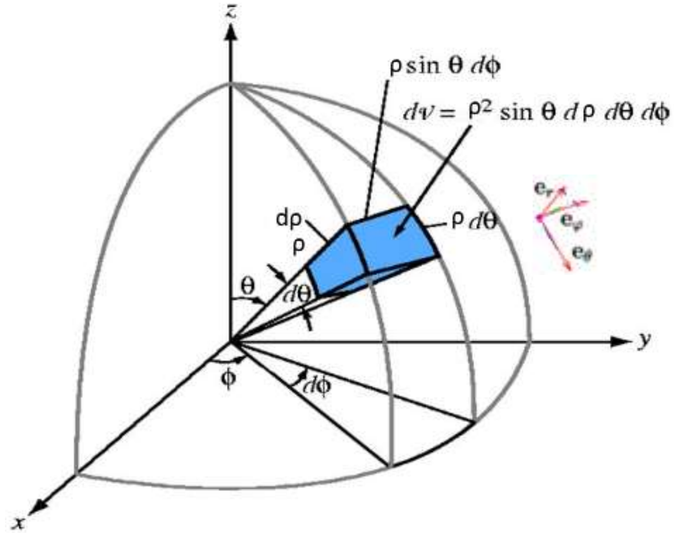
$$\vec{\Phi}_E = \int d\Phi_{\vec{E}} = \int \vec{E}.d\vec{s}$$

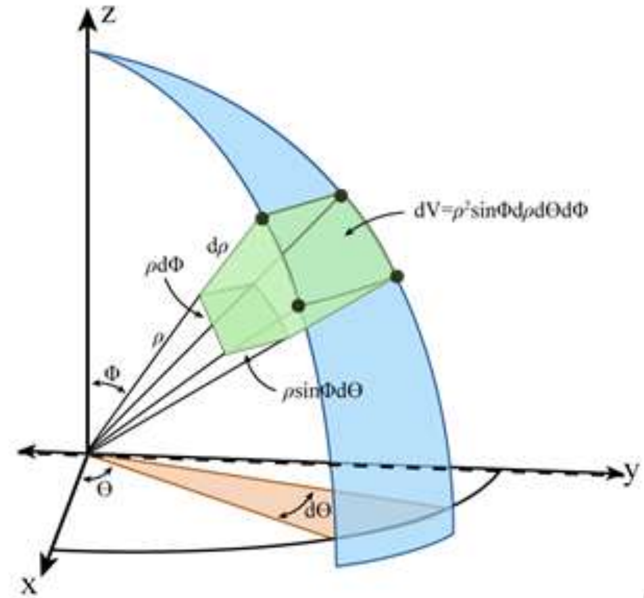
روی سطح s

دستگاه مختصات کروی (r,θ,φ) $\boxed{0\langle r\langle\infty\ ,\ 0\langle\theta\langle\pi\ ,\ 0\langle\varphi\langle 2\pi}$









$$\left.\begin{array}{l} |dL| = dr,\ \ r\,\mathrm{Sin}\,\theta\, d\varphi\ \text{ or }\ r\,d\theta \\ |dS| = r\,d\theta\, dr,\ r\,\mathrm{Sin}\,\theta\, d\varphi\, dr\ \text{ or }\ r^2\,\mathrm{Sin}\,\theta\, d\theta\, d\varphi \\ |dV| = r^2\,\mathrm{Sin}\,\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} dq = \lambda dr,\ \lambda r\,\mathrm{Sin}\,\theta\, d\varphi\ \text{ or }\ \lambda r\,d\theta \\ dq = \sigma r\,d\theta\, dr,\ \sigma r\,\mathrm{Sin}\,\theta\, d\varphi\, dr\ \text{ or }\ \sigma r^2\,\mathrm{Sin}\,\theta\, d\theta\, d\varphi \\ dV = \rho\, r^2\,\mathrm{Sin}\,\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \end{array}\right.}$$

$$\boxed{d\vec{L} = dr\,\hat{r},\ \ r\,\mathrm{Sin}\,\theta\, d\varphi\,\hat{\varphi}\ \text{ or }\ r\,d\theta\,\hat{\theta}}$$

$$\boxed{dV = r^2\,\mathrm{Sin}\,\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} d\vec{S}_{left} = r\,d\theta\, dr\left(-\hat{\varphi}\right)\ ,\ d\vec{S}_{right} = r\,d\theta\, dr\left(\hat{\varphi}\right) \\ d\vec{S}_{down} = r\,\mathrm{Sin}\,\theta\, d\varphi\, dr\left(-\hat{\theta}\right),\ d\vec{S}_{up} = r\,\mathrm{Sin}\,\theta\, d\varphi\, dr\left(\hat{\theta}\right) \\ \vec{S}_{back} = r^2\,\mathrm{Sin}\,\theta\, d\theta\, d\varphi\left(-\hat{r}\right)\ ,\ d\vec{S}_{front} = r^2\,\mathrm{Sin}\,\theta\, d\theta\, d\varphi\left(\hat{r}\right) \end{array}\right.}$$

اگر در فضا توزیع بار نقطه ای، خطی، سطحی و حجمی موجود باشد برای محاسبه ی میدان ناشی از آن ها در نقطه ی X داریم:

$$\vec{E}\left(\overrightarrow{X}\right)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\overrightarrow{X}-\overrightarrow{X}_i'\right)}{\left|\overrightarrow{X}-\overrightarrow{X}_i'\right|^3}}_{\text{Point distribution}}+\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\ell}\frac{\lambda d\ell(\vec{X}')\left(\vec{X}-\vec{X}'\right)}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3}}_{\text{Linear distribution}}+\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{s}\frac{\sigma ds(\vec{X}')\left(\vec{X}-\vec{X}'\right)}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3}}_{\text{Surface distribution}}+\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{v}\frac{\rho dv(\vec{X}')\left(\vec{X}-\vec{X}'\right)}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3}}_{\text{Volumetric distribution}}$$

مثال : چرا سطح کره ای با شعاع R، $4\pi R^2$ است؟

$$S=\int_S ds=\iint_S r^2\sin(\theta)\,d\theta\,d\varphi\xrightarrow{r=R}S=R^2\times\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,d\theta\times\int_0^{2\pi}d\varphi\Rightarrow$$

$$S=R^2\times\left[-\cos(\theta)\right]_0^{\pi}\times\left[\varphi\right]_0^{2\pi}=R^2\times(2)\times(2\pi)\Rightarrow S=4\pi R^2$$

مثال : چرا حجم کره با شعاع R، $\frac{4}{3}\pi R^3$ است؟

$$V=\int_V dV=\iiint_V r^2\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi=\int_0^R r^2\,dr\times\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,d\theta\times\int_0^{2\pi}d\varphi\Rightarrow$$

$$V=\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\times\left[-\cos(\theta)\right]_0^{\pi}\times\left[\varphi\right]_0^{2\pi}=\frac{R^3}{3}\times(2)\times(2\pi)\Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Example 3-7: Charge in a Sphere

A sphere of radius 2 cm contains a volume charge density ρ_v given by

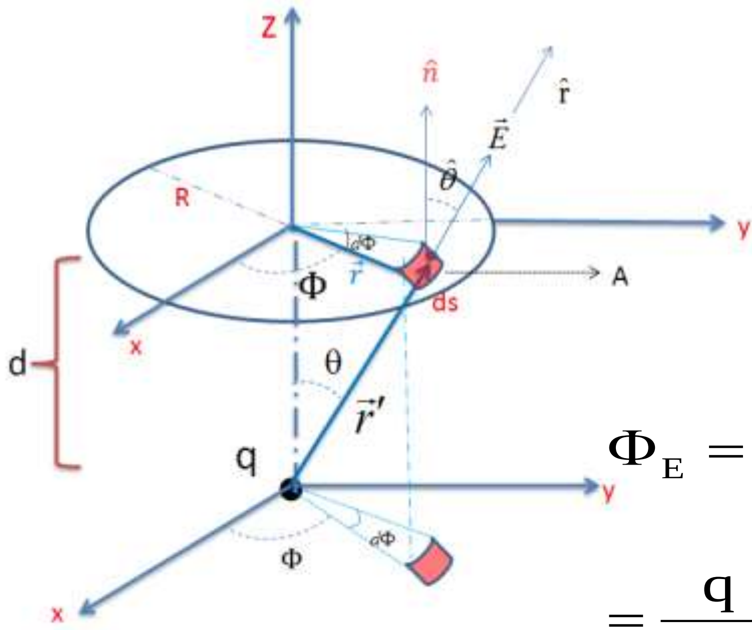
$$\rho_v = 4\cos^2\theta \qquad (\text{C/m}^3).$$

Find the total charge Q contained in the sphere.

Solution:

$$\begin{aligned}
Q &= \int_{\mathcal{V}} \rho_v \, d\mathcal{V} \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{R=0}^{2\times10^{-2}} (4\cos^2\theta) R^2 \sin\theta \, dR \, d\theta \, d\phi \\
&= 4 \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\frac{R^3}{3}\right)\bigg|_{0}^{2\times10^{-2}} \sin\theta\cos^2\theta \, d\theta \, d\phi \\
&= \frac{32}{3}\times10^{-6} \int_{0}^{2\pi} \left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\bigg|_{0}^{\pi} d\phi \\
&= \frac{64}{9}\times10^{-6} \int_{0}^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{128\pi}{9}\times10^{-6} = 44.68 \qquad (\mu\text{C}).
\end{aligned}$$

مثال: مطلوب است محاسبه ی شار الکتریکی گذرنده از سطح دایره ای زیر



در نقطه ی A :

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{|\vec{r}'|^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{(d^2+r^2)}\hat{r}$$

$$d\vec{s} = r\,d\Phi\,dr\,\hat{n}$$ بردار نرمال

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}.d\vec{s} = \iint_S \left[\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q}{(d^2+r^2)}\hat{r}\right).(\hat{n}r\,d\Phi\,dr)\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_{\Phi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\frac{1}{(d^2+r^2)}r\,d\Phi\,dr(\hat{r}.\hat{n})$$

$$[\hat{r}.\hat{n} = |\hat{r}||\hat{n}|\cos\theta = \cos\theta = \frac{d}{\sqrt{d^2+r^2}}]$$

$$\Rightarrow \Phi_{\vec{E}} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_{\Phi=0}^{2\pi}d\Phi \times \int_{r=0}^{R}\frac{1}{(d^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}rdr \Rightarrow \Phi_{\vec{E}} = \frac{2\pi qd}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_{r=0}^{R}\frac{rdr}{(d^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$[r^2+d^2 = u^2 ==> udu = rdr]$$

$$\Rightarrow \Phi_{\vec{E}} = \frac{qd}{2\varepsilon_\circ}[-\frac{1}{u}] = \frac{qd}{2\varepsilon_\circ}[-\frac{1}{\sqrt{d^2+r^2}}]_0^R \Rightarrow \Phi_{\vec{E}} = \frac{qd}{2\varepsilon_\circ}[\frac{1}{|d|} - \frac{1}{\sqrt{d^2+R^2}}]$$

قانون گوس : بیان می دارد که شار کل عبوری شدت میدان الکتریکی از یک سطح بسته در فضا، برابر کل بار داخل سطح تقسیم بر ε_0 است. داشتیم: $\int d\Phi_{\vec{E}} = \int \vec{E}.d\vec{s} = \int \vec{E}.(\hat{n}ds)$ حال داریم: $\vec{E}.d\vec{s} = |\vec{E}|\hat{n}\times|d\vec{s}|\hat{n}\times\cos\theta$

حال از طرفین انتگرال میگیریم (روی سطح بسته) و داریم:

$$\int \vec{E}.d\vec{s} = \int\left(|\vec{E}|\hat{n}\times|d\vec{s}|\hat{n}\times\cos\theta\right)ds$$

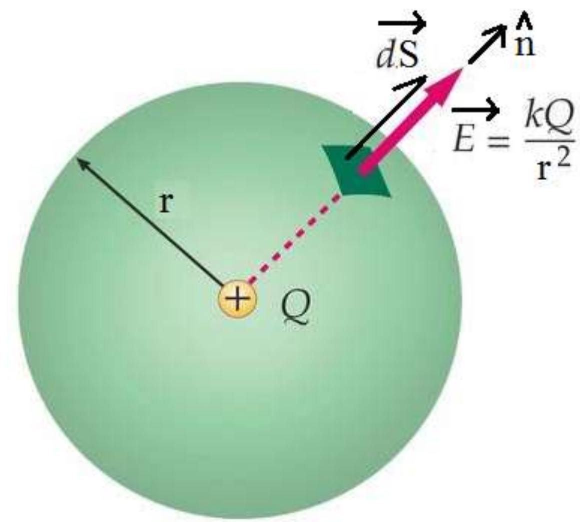
از طرفی می دانیم $\vec{E}$ برای بار نقطه ای می شود: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{|\vec{r}|^2}$

$$\int_S \vec{E}.d\vec{s} = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon.}\frac{q}{|\vec{r}|^2}\underbrace{\left[|\hat{n}|\times|\hat{n}|\right]\cos\theta}_{1\times1\times\cos(0)=1}ds \Rightarrow$$

$$\int_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon.}\int_S \frac{ds}{|\vec{r}|^2} \Rightarrow \int_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon.}\iint_S \frac{\cancel{r}^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{|\cancel{\vec{r}}|^2} \Rightarrow$$

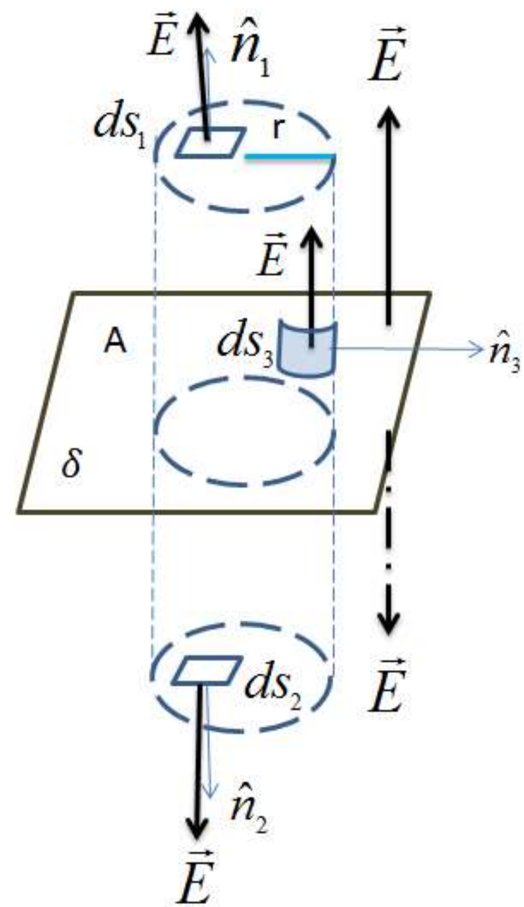
$$\int_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon.}\underbrace{\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\right)}_{=2}\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)}_{2\pi} \Rightarrow$$

$$\int_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon.}(4\pi) \Rightarrow \boxed{\int_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon.}}$$



$$\boxed{\int_S \vec{E}.d\vec{s} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\varepsilon.} \quad \text{or} \quad \int_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon.}\int dq}$$

مثال)صفحه ای تخت و نامحدود داریم که با چگالی سطحی(δ) باردار شده است مطلوب است محاسبه ی میدان الکتریکی این صفحه در نقاط خارج از صفحه



$$\int_{s_1} \vec{E}.ds_1 + \int_{s_2} \vec{E}.ds_2 + \int_{s_3} \vec{E}.ds_3 = \frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

$$\int_{s_1} |\vec{E}||\hat{n}_1|.|ds_1||\hat{n}_1|\cos 0 + \int_{s_2} |\vec{E}||\hat{n}_2|.|ds_2||\hat{n}_2|\cos 0 +$$

$$\underbrace{\int_{s_3} |\vec{E}||\hat{n}_1|.|ds_3||\hat{n}_3|\underset{=0}{\cos 90}}_{=0} = \frac{\delta A}{\varepsilon_\circ}$$

$$E\underbrace{\int_{s_1} ds_1}_{=A} + E\underbrace{\int_{s_2} ds_2}_{=A} = \frac{\delta A}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow$$

$$EA + EA = \frac{\delta A}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E = \frac{\delta}{2\varepsilon_\circ}$$

مثال) میله ای استوانه ای با چگالی خطی λ وبه طول داریم مطلوب است محاسبه ی میدان الکتریکی نقاط خارج از لوله:

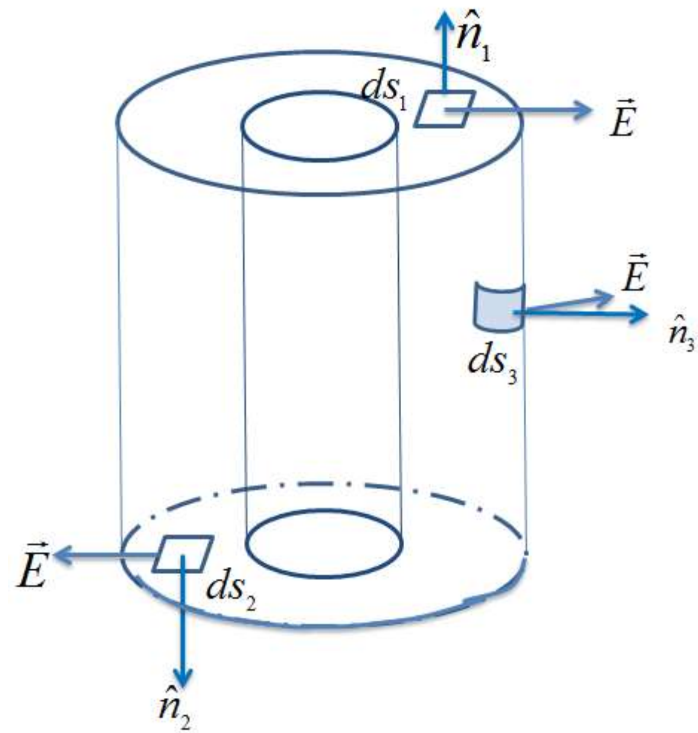
$$\int_{s} \vec{E}.d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_{.}} = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_{.}} \Rightarrow$$

$$\int_{s_1} E\, \underbrace{\hat{n}_3.\hat{n}_1}_{=0} ds_1 + \int_{s_2} E\, \underbrace{\hat{n}_3.\hat{n}_2}_{=0} ds_2 +$$

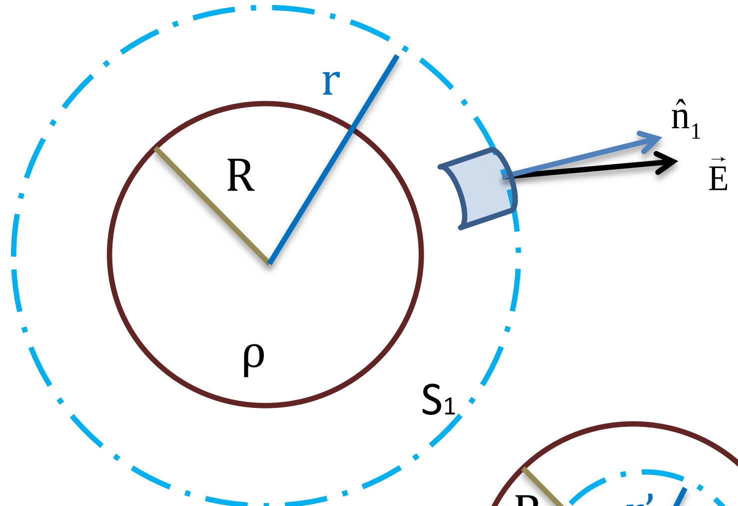
$$\int_{s_3} E\, \underbrace{\hat{n}_3.\hat{n}_3}_{=1} ds_3 = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_{.}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{s_3} E\, ds_3 = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_{.}} \Rightarrow E \underbrace{\int_{s_3} ds_3}_{=2\pi r \ell} = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_{.}}$$

$$\Rightarrow E(2\pi r \ell) = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_{.}} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_{.} r}$$



مثال) کره ای تو پر با شعاع R و چگالی ρ داریم. مطلوب است محاسبه میدان این توزیع بار در نقاط خارج و داخل کره.

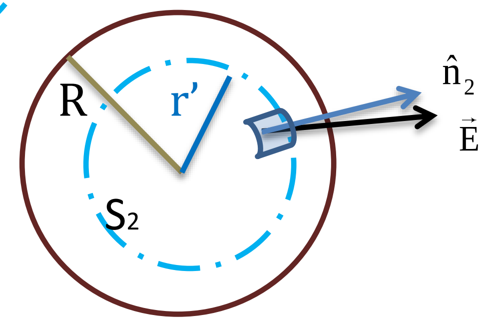


$$(1):\quad r\rangle R \rightarrow \int_{S_1} \vec{E}.d\vec{s}_1 = \frac{q}{\varepsilon_\circ} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_\circ}$$

$$\Rightarrow \int_{S_1} \left|\vec{E}\right| \underbrace{(\hat{n}_1).(\hat{n}_1)}_{=1\times1\times\cos(0)=1} ds_1 = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_\circ}$$

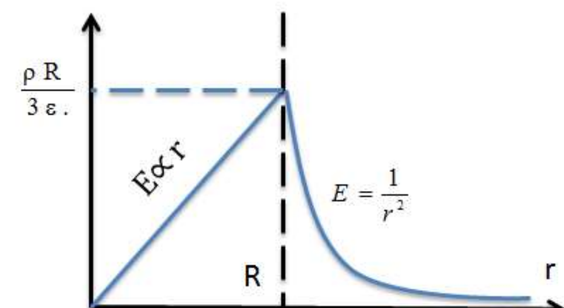
$$\Rightarrow E \underbrace{\int ds_1}_{=S_1=4\pi r^2} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon}\frac{R^3}{r^2} \quad ;\ r\rangle R}$$



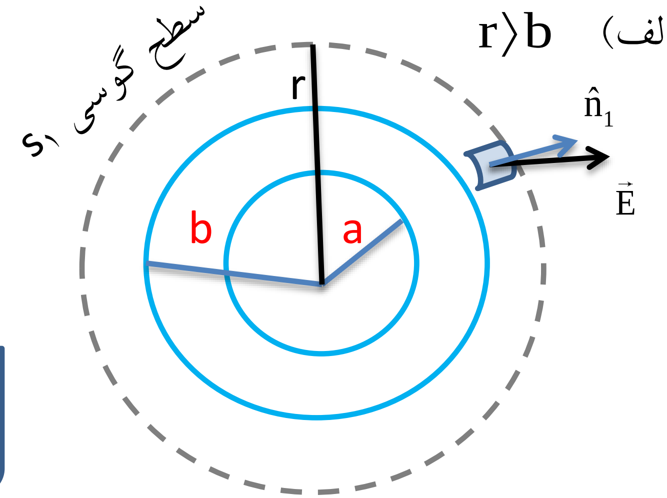
$$(2):\quad r \le R \rightarrow \int_{S_2} \vec{E}.d\vec{s}_2 = \frac{q'}{\varepsilon_\circ} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r'^3}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow \int_{S_2} \left|\vec{E}\right| \underbrace{(\hat{n}_2).(\hat{n}_2)}_{=1} ds_2 = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r'^3}{\varepsilon_\circ}$$

$$\Rightarrow E \underbrace{\int ds_2}_{=S_2=4\pi r'^2} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r'^3}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E(4\pi r'^2) = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r'^3}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho r'}{3\varepsilon_\circ} \ ;\ r' \le R}$$



مثال: لایه ای کروی با شعاع داخلی a وشعاع خارجی b داریم مطلوب است محاسبه میدان الکتریکی در نقاط $r < a$ و $a \le r \le b$ و $r > b$ به شرط انکه لایه با چگالی یکنواخت ρ بار دار شده باشد

الف) $r \rangle b$

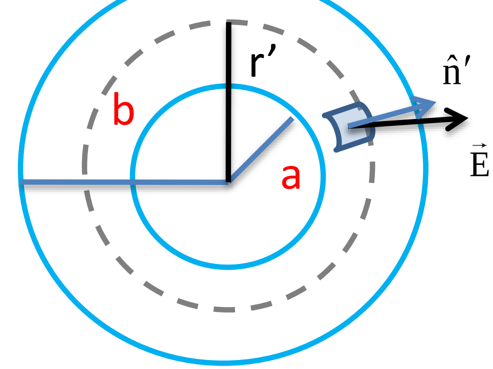


$$\int \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon.} = \frac{\rho(\frac{4}{3}\pi b^3 - \frac{4}{3}\pi a^3)}{\varepsilon.}$$

$$\int |\vec{E}|\underbrace{|\hat{n}_1| \bullet |\hat{n}_1|}_{=1}|d\vec{s}_1| = \frac{\frac{4}{3}\rho\pi}{\varepsilon.}(b^3 - a^3)$$

$$E \underbrace{\int ds_1}_{=4\pi r^2} = \frac{4}{3\varepsilon.}\rho\pi(b^3 - a^3) \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon.} \times \frac{1}{r^2} \;;\; r \rangle b}$$

ب) $a \le r' \le b$

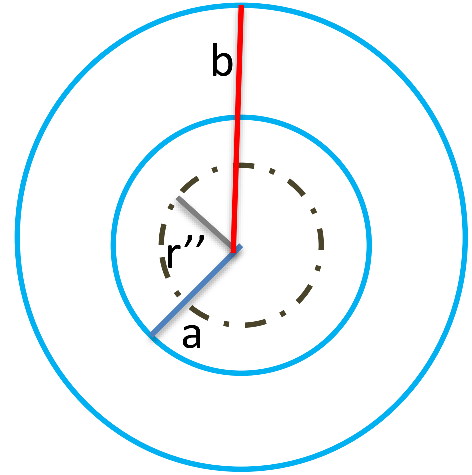


$$\int \vec{E}'.d\vec{s}' = \frac{q'}{\varepsilon.} \Rightarrow \int |\vec{E}'|.|\hat{n}'||d\vec{s}'|\cos 0 = \frac{\rho\,(\frac{4}{3}\pi r'^3 - \frac{4}{3}\pi a^3)}{\varepsilon.}$$

$$E' \underbrace{\int d\vec{s}'}_{4\pi r'^2} = \frac{q'}{\varepsilon.} = \frac{4\pi\rho}{3\varepsilon.}(r'^3 - a^3) \Rightarrow \boxed{\vec{E}' = \frac{\rho}{3\varepsilon.}\frac{(r'^3 - a^3)}{r'^2} \;;\; a \le r' \le b}$$

ج) r < a

$$\int \vec{E}''.d\vec{s}''=\frac{q''}{\varepsilon_0}=0 \Rightarrow E''=0 \;\; ; \;\; r''\langle a$$

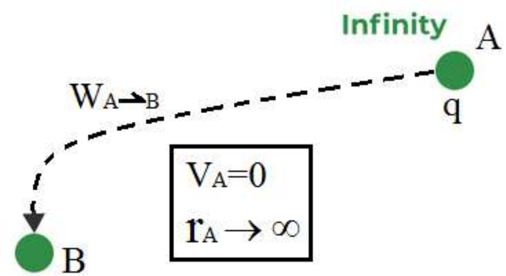


فصل چهارم: پتانسیل الکتریکی

بنابر تعریف پتانسیل الکتریکی عبارتست از تقسیم کار لازم برای جابجایی q از نقطه A به B بر مقدار بار q نوشته می شود.

نکته: جابجایی بار به آهستگی صورت می پذیرد به نحوی که بار هیچ شتابی را احساس نمی کند. به طور معمول پتانسیل نقطه ای ابتدا (A) را صفر فرض می کنید یا فرض می کنیم که نقطه ی Aپتانسیل ۰ در ∞ قرار دارد. از مکانیک می دانیم که:

$$\left.\begin{aligned} V_{AB} &= V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q} \\ W_{AB} &= \int \vec{F}.\mathrm{dx} = \int q\vec{E}.dx = q\int \vec{E}.\mathrm{d}\vec{\mathrm{x}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_{AB} = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q} = \int \vec{E}.d\vec{x}$$

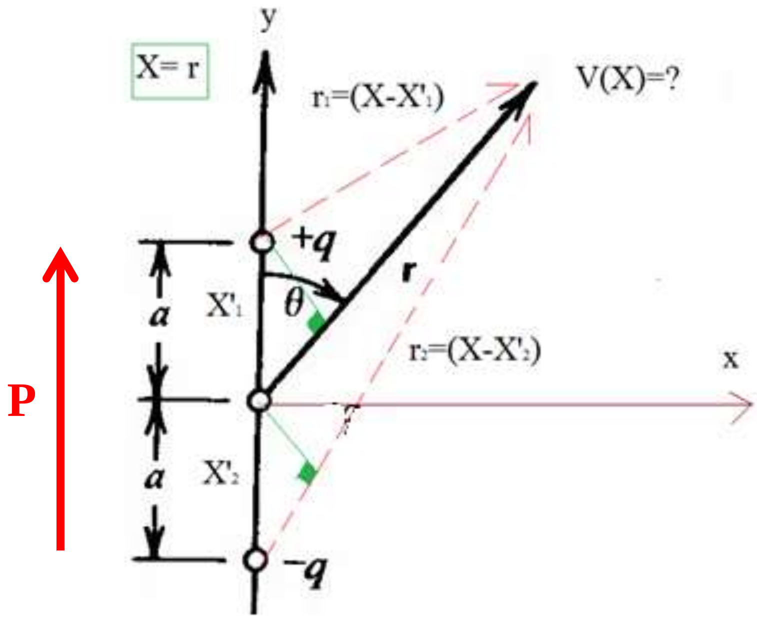


$$\vec{\mathrm{E}}\left[\vec{\mathrm{X}}(\mathrm{x,y,z})\right] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\underbrace{\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq\left(\vec{\mathrm{X}}'(\mathrm{x}',\mathrm{y}',\mathrm{z}')\right)}{\left|\vec{\mathrm{X}}(\mathrm{x,y,z})-\vec{\mathrm{X}}'(\mathrm{x}',\mathrm{y}',\mathrm{z}')\right|}\right\}}_{=\mathrm{V}(\vec{\mathrm{X}})} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{X}}) = -\frac{\mathrm{dV}(\vec{\mathrm{X}})}{\mathrm{dx}} \\ &\mathrm{V}(\vec{\mathrm{X}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq\left(\vec{\mathrm{X}}'\right)}{\left|\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{X}}'\right|} \\ &-\int \vec{\mathrm{E}}\left(\vec{\mathrm{X}}\right)dx = V\left(\vec{\mathrm{X}}\right) \end{aligned}\right.$$

اگر در فضا توزیع بار نقطه ای، خطی، سطحی و حجمی موجود باشد، پتانسیل الکتریکی ناشی از آن ها در نقطه ی X:

$$\boxed{V\left(\vec{X}\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{X}-\vec{X}_i'\right|}}_{\text{Point distribution}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\ell\frac{\lambda d\ell(\vec{\mathrm{X}}')}{\left|\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{X}}'\right|}}_{\text{Linear distribution}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathrm{S}}\frac{\sigma ds(\vec{\mathrm{X}}')}{\left|\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{X}}'\right|}}_{\text{Surface distribution}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathrm{V}}\frac{\rho dv(\vec{\mathrm{X}}')}{\left|\vec{\mathrm{X}}-\vec{\mathrm{X}}'\right|}}_{\text{Volumetric distribution}}}$$

مثال: مطلوب است محاسبه ی پتانسیل الکتریکی یک دو قطبی الکتریکی با فاصله ی بارهای 2a در نقطه ی مشخص از فضا با شرط آن که $a<r$ باشد.



$$\boxed{V\left(\overline{X}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{1}{\left|\overline{X}-\overline{X}'_i\right|}}\Rightarrow$$

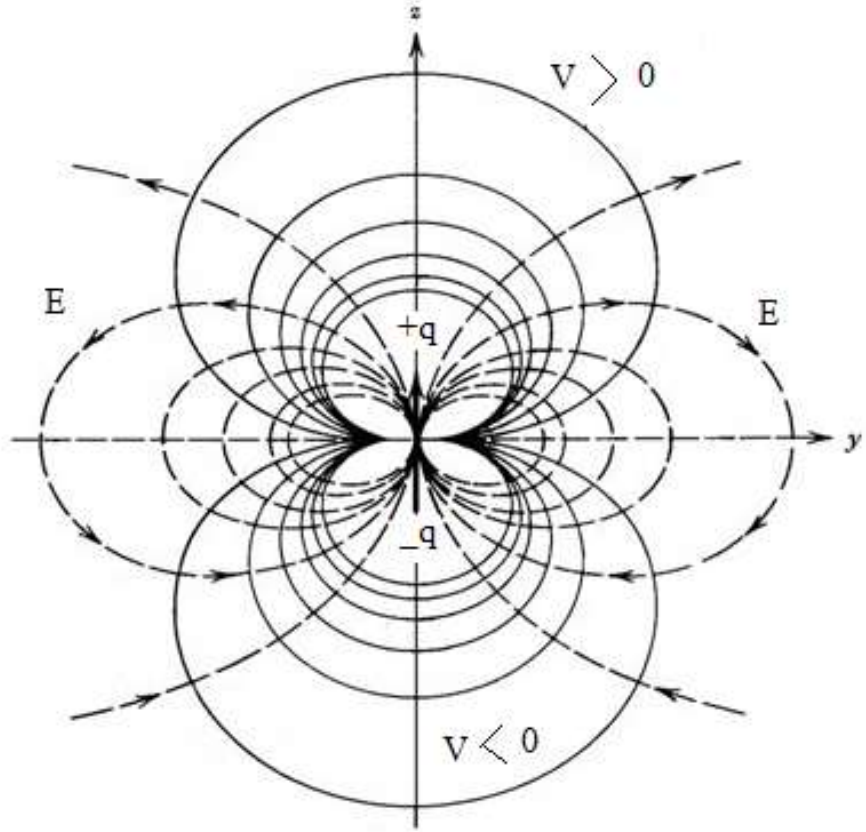
$$V\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{q_1}{\left|\overline{X}-\overline{X}'_1\right|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{\left|\overline{X}-\overline{X}'_2\right|}\Rightarrow$$

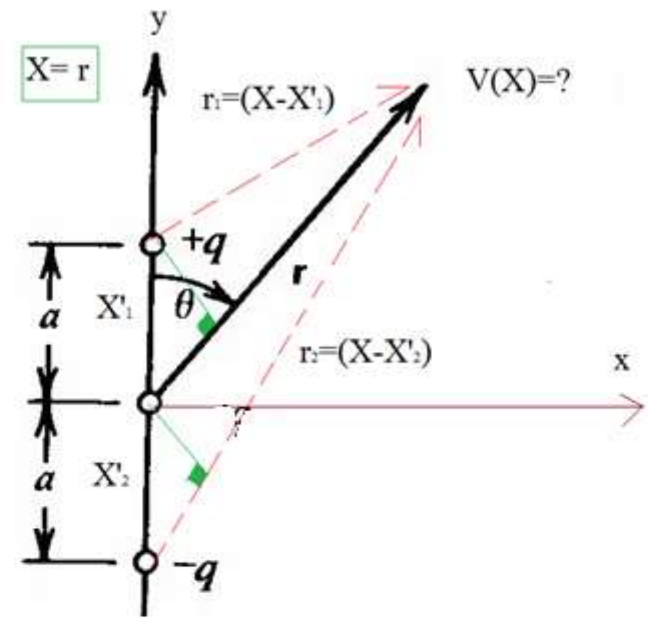
$$V\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_1}-\frac{q}{r_2}\right]=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2}\right]\ (*)$$

$$\left[\left.\begin{matrix}\overrightarrow{r_1}=\vec{r}-a\cos\theta\\ \overrightarrow{r_2}=\vec{r}+a\cos\theta\end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix}r_2-r_1=2a\cos\theta\\ r_1 r_2=r^2-a^2\cos^2\theta\cong r^2\end{matrix}\right.\right]\xrightarrow{(*)}V\left(\vec{X}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2a\cos\theta}{r^2}\right]\Rightarrow$$

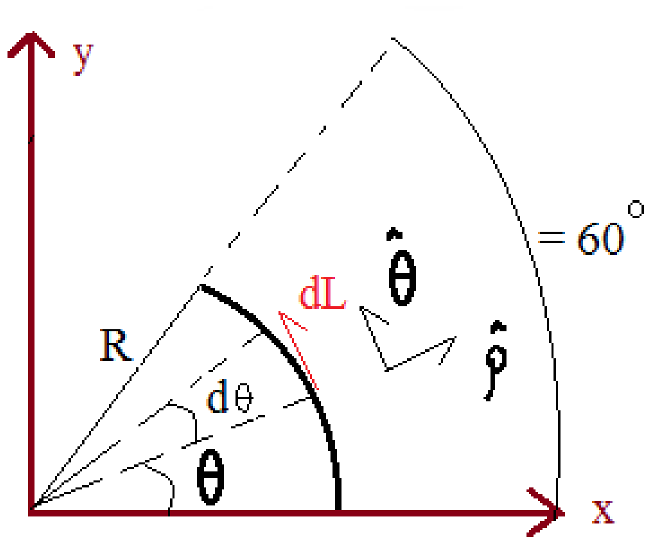
$$V\left(\vec{X}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(2qa)\cos\theta}{r^2}\xrightarrow{P=2qa}V\left(\vec{X}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P\cos\theta}{r^2}=\frac{P\cdot\hat{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

گشتاور دو قطبی الکتریکی


z
V > 0
E
E
+q
y
-q
V < 0


y
X= r
r1=(X-X'1)
V(X)=?
+q
r
θ
X'1
a
r2=(X-X'2)
x
a
X'2
-q

مثال: مطلوب است محاسبه ی پتانسیل الکتریکی کمان زیر در مرکز کمان(کمان بطور یکنواخت با چگالی بار λ بار دار شده است).

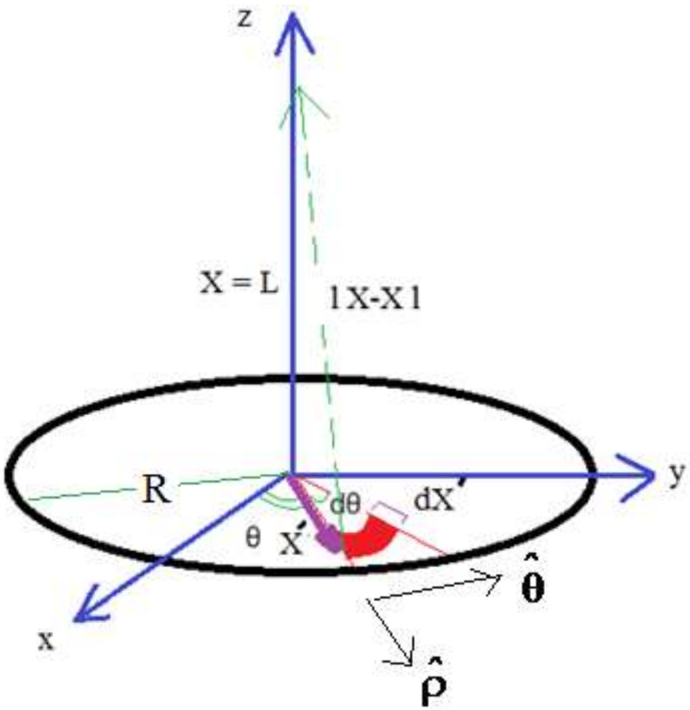


$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq(\vec{X}')}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\ell \frac{\lambda d\ell(\vec{X}')}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{X}=0 \;,\; \vec{X}'=R\hat{\rho} \;,\; \left|\vec{X}-\vec{X}'\right|=R \\ dq(\vec{X}')=\lambda dL=\lambda R d\theta \end{array}}$$

$$\Rightarrow V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\lambda R d\theta}{R} = \frac{\lambda(\frac{\pi}{3})}{4\pi\varepsilon_0} \xrightarrow{\lambda=\frac{q}{R(\frac{\pi}{3})}} V(\vec{x}) = \frac{\frac{q}{R(\frac{\pi}{3})}(\frac{\pi}{3})}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

مثال:دیسکی با چگالی سطحی یکنواخت σداریم. مطلوب محاسبه پتاسیل الکتریکی ان در فاصله Lاز دیسک واقع بر خط عمود بر مرکز دیسک:



$$\vec{X} = L\hat{k} \ , \ \vec{X}' = \rho\hat{\rho} \ , d\vec{X}' = d\rho$$

$$\vec{X}' = \rho \ , \ |ds'| = \rho\, d\theta\, d\rho \ , \ |\vec{X} - \vec{X}'| = \sqrt{\rho^2 + L^2}$$

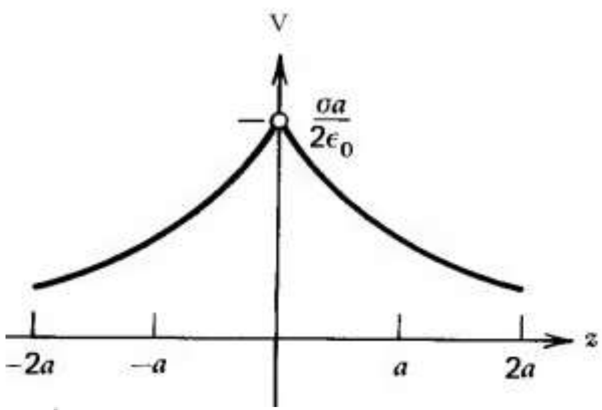
$$dq(\vec{x}') = \sigma |ds'| = \sigma\rho\, d\theta\, d\rho$$

$$\boxed{V(\overline{X}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{dq(\vec{X}')}{|\vec{X}-\vec{X}'|}} \Rightarrow V(\overline{X}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma ds'}{|\vec{X}-\vec{X}'|} \Rightarrow$$

$$V(\overline{X}) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\rho\, d\theta\, d\rho}{\sqrt{\rho^2+L^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\rho=0}^{R} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2+L^2}} \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta}_{=2\pi} \Rightarrow$$

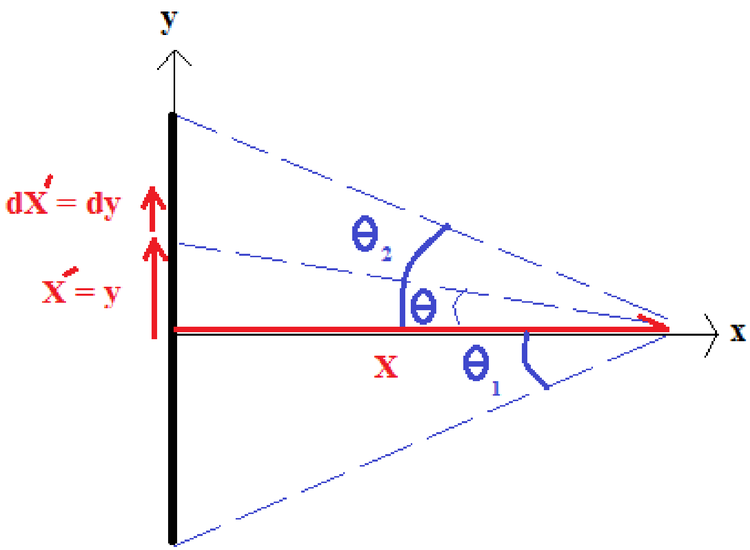
$$V(\overline{X}) = \frac{\sigma(2\pi)}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\rho=0}^{R} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2+L^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{\rho^2+L^2}\right]_{\rho=0}^{R} \Rightarrow$$

$$V(\overline{X}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+L^2} - |L|\right]$$



$$\Rightarrow E_L = E_z = -\frac{\partial}{\partial L}V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{L}{\sqrt{R^2+L^2}}\right]$$

مثال) میله ای به طول L با چگالی خطی و یکنواخت λ باردارشده است مطلوبست محاسبه پتانسیل الکتریکی ناشی از آن در فاصله a از مرکز میله وواقع بر روی خط عمود منصف میله.



$$\boxed{V(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{dq(\vec{X}')}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|}}$$

$$\vec{X} = a\hat{i} \;,\; \vec{X}' = y\hat{j},\; \left|\vec{X}-\vec{X}'\right| = \sqrt{a^2+y^2}$$

$$|dL| = \left|d\vec{X}'\right| = |dy| \,,$$

$$dq(\vec{x}') = \lambda|dL| = \lambda|dy| = \lambda\, dy$$

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda dy}{\left[a^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{y=-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{dy}{\left[(\frac{y}{a})^2+1\right]^{\frac{1}{2}}} \quad ;\left[\frac{y}{a} = \tan\theta \Rightarrow \frac{dy}{a} = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \Rightarrow dy = \frac{a d\theta}{\cos^2\theta}\right]$$

$$\Rightarrow V(\vec{x}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\frac{a d\theta}{\cos^2\theta}}{\left[\tan^2\theta+1\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow V(\vec{x}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{\cos\theta}\times\frac{\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos\theta d\theta}{(1-\sin^2\theta)} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos\theta d\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$\xrightarrow{[\sin\theta=u]} V(\vec{x}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{du}{(1-u)(1+u)}$$

$$\left[\frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{A}{(1+u)} + \frac{B}{(1-u)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow V(\vec{x}) = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left[\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{(1+u)} + \int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{(1-u)}\right] = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left[\ln(1+u)-\ln(1-u)\right]_{u_1=\sin\theta_1}^{u_2=\sin\theta_2}$$

$$\Rightarrow V(\vec{x}) = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left[\ln(1+sin\theta)-\ln(1-sin\theta)\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\Rightarrow V(\vec{x}) = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\ln(1+sin\theta_2)-\ln(1-sin\theta_2)\right\} - \left\{\ln(1+sin\theta_1)-\ln(1-sin\theta_1)\right\}$$

$$\Rightarrow V(\vec{x}) = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left(\frac{1+sin\theta_2}{1+sin\theta_1}\right)-\ln\left(\frac{1-sin\theta_2}{1-sin\theta_1}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow V(\vec{x}) = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left(\frac{1+sin\theta_2}{1+sin\theta_1}\right)-\ln\left(\frac{1-sin\theta_2}{1-sin\theta_1}\right)\right\} = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\ \mathrm{Ln}\ \left[\frac{\dfrac{1+sin\theta_2}{1+sin\theta_1}}{\dfrac{1-sin\theta_2}{1-sin\theta_1}}\right] = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left[\frac{(1+sin\theta_2)(1-sin\theta_1)}{(1+sin\theta_1)(1-sin\theta_2)}\right]\right\}$$

$$\left[\sin\theta_1 = \frac{\frac{-\ell}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-\ell}{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{-\ell}{\sqrt{l^2+4a^2}}\ ,\ \sin\theta_2 = \frac{\frac{\ell}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{l^2+4a^2}} \Rightarrow\right]$$

$$\Rightarrow V(\vec{x}) = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left[\frac{\left(1+\frac{\ell}{\sqrt{l^2+4a^2}}\right)\left(1-\frac{-\ell}{\sqrt{l^2+4a^2}}\right)}{\left(1+\frac{-\ell}{\sqrt{l^2+4a^2}}\right)\left(1-\frac{\ell}{\sqrt{l^2+4a^2}}\right)}\right]\right\} = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left[\frac{\left(\sqrt{l^2+4a^2}+\ell\right)\left(\sqrt{l^2+4a^2}+\ell\right)}{\left(\sqrt{l^2+4a^2}-\ell\right)\left(\sqrt{l^2+4a^2}-\ell\right)}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow V(\vec{x}) = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left[\frac{\left(\sqrt{l^2+4a^2}+\ell\right)}{\left(\sqrt{l^2+4a^2}-\ell\right)}\right]^2\right\} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left[\frac{\left(\sqrt{l^2+4a^2}+\ell\right)}{\left(\sqrt{l^2+4a^2}-\ell\right)}\right]\right\}$$

مثال) کره ای تو پر با شعاع R و چگالی ρ داریم. مطلوب است محاسبه پتانسیل الکتریکی این توزیع بار در نقاط خارج و داخل کره.

قبلاً محاسبه کردیم که:

$$\vec{E}(r)=\begin{cases}\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2} & ;\ r\rangle R\\[2ex] \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} & ;\ r\le R\end{cases}$$

الف) محاسبه ی V در خارج کره:

$$\vec{E}(\vec{x})=-\frac{dV(\vec{x})}{dx}\Rightarrow V\left(\vec{x}\right)=-\int\vec{E}\left(\vec{x}\right)d\vec{x}=-\int_{\infty}^{r}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}dr$$

$$\Rightarrow V\left(\vec{x}\right)=-\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}\Rightarrow V\left(\vec{x}\right)==\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}\ \ ;\ r\rangle R$$

الف) محاسبه ی V در داخل کره:

$$\vec{E}(\vec{x})=-\frac{dV(\vec{x})}{dx}\Rightarrow V\left(\vec{x}\right)=-\int\vec{E}\left(\vec{x}\right)d\vec{x}=-\int_{\infty}^{R}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}dr-\int_{R}^{r}\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}dr$$

$$\Rightarrow V\left(\vec{x}\right)=-\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{R}-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_{R}^{r}rdr=\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r^2-R^2)$$

$$\Rightarrow V\left(\vec{x}\right)=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2-r^2)\ \ \ ;\ R\rangle r$$

مثال: لایه ای کروی با شعاع داخلی a وشعاع خارجی b داریم مطلوب است محاسبه پتانسیل الکتریکی آن در نقاط $r < a$ و $a \le r \le b$ و $r>b$ به شرط انکه لایه با چگالی یکنواخت ρ بار دار شده باشد.

قبلاً محاسبه شده است:

$$E(\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_.}\times\dfrac{1}{r^2} & ;\ r\rangle b \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_.}\dfrac{(r^3-a^3)}{r^2} & ;\ a\le r\le b \\ 0 & ;\ r''\langle a \end{cases}$$

حال (الف) محاسبه ی پتانسیل برای نقاط خارج:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{dV(\vec{x})}{dx} \Rightarrow V\left(\vec{x}\right) = -\int \vec{E}\left(\vec{x}\right) d\vec{x} = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_.}\times\frac{1}{r^2}dr$$

$$\Rightarrow V\left(\vec{x}\right) = -\frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_.}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} \Rightarrow V\left(\vec{x}\right) = \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_.}\frac{1}{r}\ ;\ r\rangle R$$

ب) محاسبه ی پتانسیل برای نقاط بین a و b:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{dV(\vec{x})}{dx} \Rightarrow V\left(\vec{x}\right) = -\int \vec{E}\left(\vec{x}\right) d\vec{x} = -\int_{\infty}^{b} \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_\circ} \times \frac{1}{r^2} dr - \int_{b}^{r} \frac{\rho}{3\varepsilon_\circ} \frac{(r^3-a^3)}{r^2} dr$$

$$\Rightarrow V\left(\vec{x}\right) = \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_\circ}\frac{1}{b} - \frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}\int_{b}^{r}\frac{(r^3-a^3)}{r^2}dr = \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_\circ b} - \frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}\left\{\int_{b}^{r} r\,dr - \int_{b}^{r}\frac{a^3}{r^2}dr\right\}$$

$$\Rightarrow V\left(\vec{x}\right) = \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_\circ b} - \frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}\left\{\left[\frac{1}{2}r^2\right]_b^r + \left[\frac{a^3}{r}\right]_b^r\right\} = \frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}\left[\frac{3}{2}b^2 - \frac{a^3}{r} - \frac{r^2}{2}\right] \quad ;\ a \le r \le b$$

ج) محاسبه ی پتانسیل برای نقاط کوچکتر از a:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{dV(\vec{x})}{dx} \Rightarrow V\left(\vec{x}\right) = -\int \vec{E}\left(\vec{x}\right) d\vec{x} = -\int_{\infty}^{b} \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_\circ} \times \frac{1}{r^2} dr - \int_{b}^{a} \frac{\rho}{3\varepsilon_\circ} \frac{(r^3-a^3)}{r^2} dr - \int_{a}^{0} 0\,dr$$

$$\Rightarrow V\left(\vec{x}\right) = \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_\circ b} - \frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}\left\{\frac{a^2-b^2}{2} + \frac{a^3}{a} + \frac{a^3}{b}\right\} = \frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}\left[b^2 - \frac{a^3}{b} - \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - a^2 + \frac{a^3}{b}\right]$$

$$\Rightarrow V\left(\vec{x}\right) = \frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}\left[\frac{3}{2}(b^2-a^2)\right] \quad ;\ r\langle a$$

هادی ها در میدان الکتریکی ساکن:

تا کنون تنها میدان الکتریکی توزیع های بار ساکن در فضای آزاد یا هوا بررسی شد. اکنون رفتار میدان را در محیط های مادی بررسی می کنیم. بطور کلی ماده به سه دسته ی هادی ها، نیمه هادی ها و عایق ها (دی الکتریک ها) تقسیم می شوند.

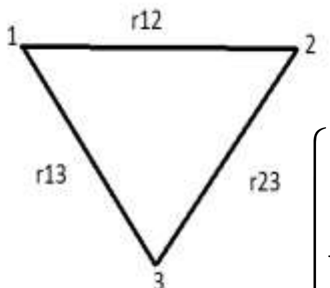
هادی ها اجسامی هستند که بار الکتریکی در آن ها جابه جا می شود و این جابجایی بار موجب به وجود آمدن میدانی می گردد که قانون اصلی جایگزیده بودن بار ها در الکتروستاتیک را مخدوش می کند، بنابراین بار ها در رسانا ها خود را به گونه ای می آرایند که میدان الکتریکی در داخل هادی ها صفر باشد و این نتیجه از رابطه ی $F=qE$ نیز منتج می شود. پس چنانچه بار خارجی به یک هادی اعمال شود آن ها میدانی در داخل هادی ایجاد می نمایند و این میدان موجب جابجایی بارها می شود و این امر آنقدر ادامه می یابد که بارها بر روی سطح هادی قرار می گیرند و چگالی بار در حجم هادی صفر می شود. توزیع بار در روی سطح هادی به شکل سطح بستگی دارد. اگر میدان الکتریکی در سطح هادی دارای مولفه ی مماسی باشد، آن یک نیروی مماسی ایجاد می نماید که نتیجه حرکت بارها در روی سطح هادی است که نتیجتاً تعادل بار موجود نخواهد بود. بنابراین تحت شرایط سکون، میدان الکتریکی روی سطح هادی و در همه جا عمود بر سطح هادی است. بعبارت دیگر در شرایط سکون سطح هادی یک سطح هم پتانسیل است.

انرژی پتانسیل الکتریکی:

اگر در تعادل توزیع بار لحظه ای یا پیوسته داشتیم برای انتقال بار q از مرجع پتانسیل (بی نهایت) در داخل توزیع بار می بایست کار انجام شود و مقدار این کار برابر بود با پتاسیل حاصل از مابقی بارها به جز بار q. حال اگر سه بار q_1، q_2 و q_3داشته باشیم و بخواهیم این بار ها را در نقاط مشخص شده در شکل زیر به ترتیب بیاوریم ، می خواهیم ببینیم که انرژی پتاسیل الکتریکی ذخیره شده در سیستم چقدر است؟

برای انتقال بارها می بایست کار انجام شود و مقدار این کار به صورت انرژی پتاسیل در سیستم ذخیره می شود.

حال انتقال بار q ها به مکانشان:



$$\begin{cases} W_1 = q_1 \times V^{ext} = 0 \\ W_2 = q_2 \times V^{ext} = \dfrac{q_1 \; q_2}{4\pi\varepsilon r_{12}} \\ W_3 = q_3 \times V^{ext} = q_3 V^{ext}{}_1 + q_3 V^{ext}{}_2 \\ \rightarrow W_3 = \dfrac{q_3 q_1}{4\pi\varepsilon r_{13}} + \dfrac{q_3 q_2}{4\pi\varepsilon r_{23}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_t = W_1 + W_2 + W_3 \Rightarrow \\ W = \dfrac{q_3 q_1}{4\pi\varepsilon r_{13}} + \dfrac{q_3 q_2}{4\pi\varepsilon r_{23}} + \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r_{21}} \end{cases}$$

حال اگر n نقطه داشته باشیم و بخواهیم n بار را به آن مکانها منتقل نماییم، داریم:

$$W_t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon r_{ij}}$$

این نوشتار اشکال دارد چون در دو حالت *i=1*، *j=2* و نیز *i=2*، *j=1* دو جمله q_1q_2 در W حاصل می کنند

پس نیاز به تصحیح ضروری است.

$$\boxed{W_t = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon r_{ij}}} \Rightarrow W_t = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon r_{ij}}\right]}_{=\mathrm{V}^{\mathrm{ext}}\text{ for } q_i} q_i \Rightarrow \underbrace{\boxed{W_t = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \mathrm{V}^{\mathrm{ext}}}}_{\text{Point distribution}}$$

$$\underbrace{\boxed{W_t = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{V}} \mathrm{V}^{\mathrm{ext}}\rho\, \mathrm{dv}}}_{\text{Volumetric distribution}} \quad , \quad \underbrace{\boxed{W_t = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}} \mathrm{V}^{\mathrm{ext}}\sigma\, \mathrm{ds}}}_{\text{Surface distribution}} \quad , \quad \underbrace{\boxed{W_t = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}} \mathrm{V}^{\mathrm{ext}}\lambda\, \mathrm{d}\ell}}_{\text{Linear distribution}}$$

$$\boxed{W_t = \frac{1}{2}\varepsilon_\circ \int_{\mathrm{V}} \left|\vec{\mathrm{E}}\right|^2 \mathrm{dv}}$$

مثال: مطلوبست محاسبه ی انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده در کره ی توپر که با چگالی حجمی ρ بار دار شده است.

قبلاً محاسبه شده است که پتانسیل این کره در داخل و خارج کره عبارتست از:

$$V\left(\vec{x}\right)=\begin{cases}\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_\circ}r & ;\ r\rangle R\\[2mm] \dfrac{\rho}{6\varepsilon_\circ}(3R^2-r^2) & ;\ R\rangle r\end{cases}$$

حال محاسبه ی انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده در کره؟

روش اول:

$$W_t=\frac{1}{2}\int_V V^{ext}\rho\, dv\Rightarrow W=\frac{1}{2}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\rho^2}{6\varepsilon_\circ}\left(3R^2-r^2\right)r^2dr\, sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Rightarrow W=\frac{\rho^2}{12\varepsilon_\circ}\left[3R^2\int_{r=0}^{R}r^2dr-\int_{r=0}^{R}r^4dr\right]\left[\int_{\theta=0}^{\pi}sin\theta\, d\theta\right]\left[\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi\right]$$

$$\Rightarrow W=\frac{\rho^2}{12\varepsilon_\circ}\left[3R^2\left(\frac{1}{3}r^3\right)_0^R-\left(\frac{1}{5}r^5\right)_0^R\right][2][2\pi]\Rightarrow W=\frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_\circ}$$

روش دوم:

$$\xrightarrow{\vec{E}(r)=\begin{cases}\frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}\frac{R^3}{r^2} & ; r\rangle R\\ \frac{\rho r}{3\varepsilon_\circ} & ; r\le R\end{cases}} W_t=\frac{1}{2}\varepsilon_\circ\int_V E^2\,dv \Rightarrow W_t=\frac{1}{2}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_\circ}\right)^2 r^2dr\,sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$+\frac{1}{2}\int_{r=R}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_\circ}\frac{R^3}{r^2}\right)^2 r^2dr\,sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$\Rightarrow W_t=\frac{\rho^2\varepsilon_\circ}{18\varepsilon_\circ^{\ 2}}\left[\int_{r=0}^{R}r^4dr\right]\left[\int_{\theta=0}^{\pi}sin\theta\,d\theta\right]\left[\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi\right]$$

$$+\frac{\rho^2\varepsilon_\circ R^6}{18\varepsilon_\circ^{\ 2}}\left[\int_{r=R}^{\infty}\frac{1}{r^2}dr\right]\left[\int_{\theta=0}^{\pi}sin\theta\,d\theta\right]\left[\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi\right]$$

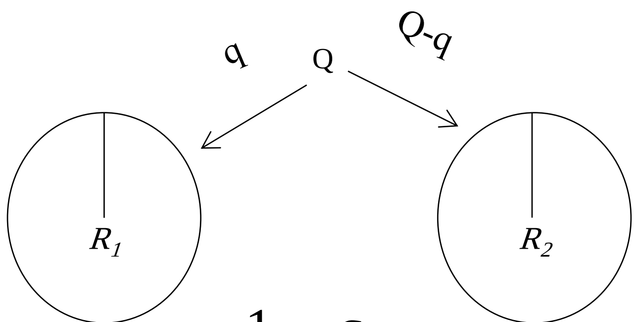
$$\Rightarrow W_t=\frac{4\pi\rho^2\varepsilon_\circ}{18\varepsilon_\circ^{\ 2}}\left[\frac{1}{5}R^5\right]+\frac{4\pi\rho^2\varepsilon_\circ R^6}{18\varepsilon_\circ^{\ 2}}\left[\frac{1}{R}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_t=\frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_\circ}$$

مثال: دو کره رسانا با شعاع های R_1 و R_2 که در فاصله بسیار زیادی از هم قرار دارند، داریم. بار Q را چگونه بین آنها تقسیم کنیم به طوری که انرژی پتانسیل ذخیره شده در سیستم min باشد.

برای یک کره ی باردار با شعاع R داریم:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\ ;\ \ r > R$$



حال:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\ ;\ \ r > R$$

$$W_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_\circ \int |E_1|^2\, dV = \frac{1}{2}\varepsilon_\circ \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 r^2 dr\, sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Rightarrow W_1 = \frac{q^2\varepsilon_\circ}{32\pi^2\varepsilon_\circ^{\,2}}\left[\int_{r=R_1}^{R}\frac{dr}{r^2}\right]\left[\int_{\theta=0}^{\infty} sin\theta\, d\theta\right]\left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\right]$$

$$\Rightarrow W_1 = \frac{q^2\varepsilon_\circ}{32\pi^2\varepsilon_\circ^{\,2}}\left[\frac{1}{R_1}\right][2][2\pi] \Rightarrow W_1 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_\circ R_1} \xrightarrow{\text{and}} W_2 = \frac{(Q-q)^2}{8\pi\varepsilon_\circ R_2}$$

$$W_t = W_1 + W_2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_\circ R_1} + \frac{(Q-q)^2}{8\pi\varepsilon^\circ R_2} \xrightarrow{\text{for Min}} \frac{dW}{dq} = 0 \to \frac{2q}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + 2(-1)\frac{(Q-q)}{8\pi\varepsilon_0 R_2} = 0$$

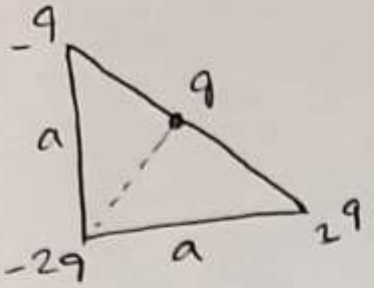
$$\Rightarrow \frac{q}{R_1} + \frac{(-Q+q)}{R_2} = 0 \Rightarrow \boxed{q_1 = q = \frac{R_1 Q}{R_1 + R_2}} \quad \text{and} \quad \boxed{Q - q = q_2 = \frac{R_2 Q}{R_1 + R_2}}$$

$$\xrightarrow{\text{The surface potential of two sphere}} V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \to \begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\frac{R_1 Q}{R_1+R_2}}{R_1} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_1+R_2)} \\ V_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\frac{R_2 Q}{R_1+R_2}}{R_2} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_1+R_2)} \end{cases}$$

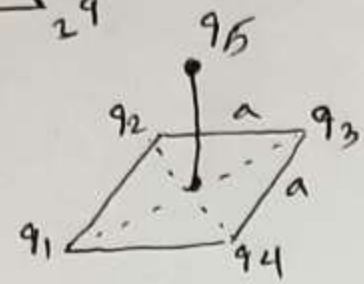
$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi r^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{\frac{R_1 Q}{R_1+R_2}}{4\pi R_1^{\ 2}} = \dfrac{Q}{4\pi R_1 (R_1+R_2)} \\ \sigma_2 = \dfrac{\frac{R_2 Q}{R_1+R_2}}{4\pi R_2^{\ 2}} = \dfrac{Q}{4\pi R_2 (R_1+R_2)} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1} \Rightarrow \sigma \propto \frac{1}{\mathrm{R}}$$

تمرین اول فیزیک ۲

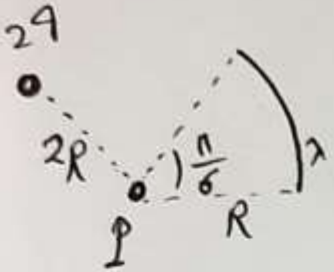
۱- مطلوبست محاسبه‌ی نیروی وارد بر بار q در شکل روبرو:



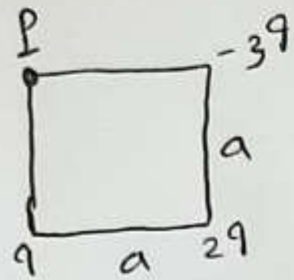
۲- مطلوبست محاسبه‌ی نیروی وارد بر بار q_5 (تمامی بارها q می‌باشند)



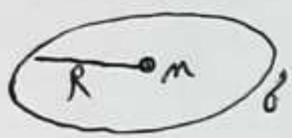
۳- مطلوبست محاسبه‌ی میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی P:



۴- مطلوبست محاسبه‌ی میدان الکتریکی در نقطه‌ی P:



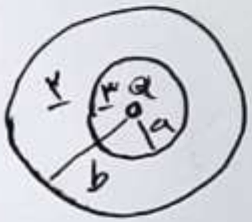
۵- مطلوبست محاسبه‌ی میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی m:
(چگالی سطحی دیسک σ است)



6- مطلوبست محاسبه‌ی میدان الکتریکی در نواحی ۱ و ۲ و ۳ در شکل روبرو:
شکل لایه‌ای کروی با شعاع داخلی و خارجی به ترتیب a و b و چگالی حجمی ρ است.

①

7- مطلوبست محاسبه‌ی میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی در نواحی ۱ و ۲ و ۳ در شکل روبرو. پوسته‌ی کروی مانند مسئله‌ی 6 است (بدون بار) و تنها بار q در مرکز پوسته قرار دارد.



8- پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ی P در شکل روبرو بیابید. چگالی خطی حلقه λ است.

9- انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده در پوسته‌ی کروی مسئله‌ی 6 را بیابید.

10- استوانه‌ای چگالی حجمی ρ دارد. مطلوبست محاسبه‌ی میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی در نقاط داخل و خارج استوانه.

شهروز نصیریان

فصل پنجم، خازن ها:

گفته شد: چنانچه یک هادی داشته باشیم و بار q را در آن قرار دهیم بارها در سطح هادی قرار می گیرد و در سطح هادی دو نقطهٔ مجزا دارای اختلاف پتانسیل نمی باشند چرا که اگر آن دو نقطه اختلاف پتانسل داشته باشند، آن موجب جابجایی بارها می شود و این برخلاف شروط الکتروستاتیک می باشد. به تجربه و با استفاده از قوانین میدان های کولن ثابت شده است که خارج قسمت بار روی سطح یک هادی بر اختلاف پتانسیل یک نقطه روی سطح هادی به مقدار بار بستگی ندارد و تنها وابسته به شکل هادی است که به آن ظرفیت هادی منفرد گویند.

ظرفیت هادی منفرد: $\mathrm{C} = \dfrac{Q}{\Delta v}$

$$\Rightarrow \frac{Q}{\Delta v} = \frac{Q}{v} = c \rightarrow \begin{cases} W = \dfrac{1}{2}\int \rho V(x)\,dv' = \dfrac{1}{2} V \underbrace{\int \rho\, dv'}_{=Q} \\ W = \dfrac{1}{2}\int \sigma V(x)\,ds' = \dfrac{1}{2} V \underbrace{\int \sigma\, ds'}_{=Q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W = \dfrac{1}{2} QV, Q = CV \\ w = \dfrac{1}{2} QV = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} = \dfrac{1}{2} CV^2 \end{cases}$$

مثال : مطلوب است محاسبهٔ ظرفیت و W در یک کره رسانا با بار Q :

$$\mathrm{V}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}\xrightarrow{\text{on surface}}=\mathrm{V}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}\xrightarrow{\mathrm{C}=\frac{Q}{\Delta v}}\mathrm{C}=4\pi\varepsilon_\circ\mathrm{R}$$

$$\left\{W=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}4\pi\varepsilon_0R\times\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}\right)^2=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0R}\ ,\ W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0R}\ ,\ W=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}Q\times\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0R}\right\}$$

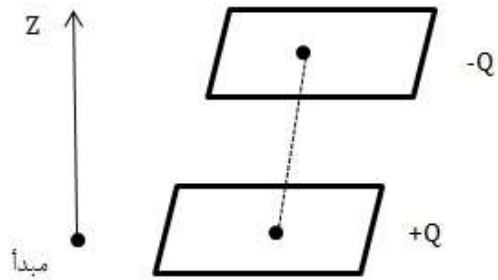
ظرفیت دو هادی منفرد باردار: برای محاسبهٔ بار Q را روی یکی، بار Q– را روی دیگری می گذاریم و اختلاف پتانسیل بین سطوح دو هادی را در نقطه ای بین هادی ها محاسبه می کنیم، سپس با رابطهٔ Q=CV مقدار C محاسبه می شود.

$$if\ :\ Q_1=Q_2=Q\Rightarrow W=\frac{1}{2}Q_1V_1+\frac{1}{2}Q_2V_2$$

$$if\ :\ Q_1=-Q_2=Q\Rightarrow W=\frac{1}{2}Q_1V_1+\frac{1}{2}Q_2V_2=\frac{1}{2}QV_1+\frac{1}{2}(-Q)V_2$$

$$\Rightarrow W=\frac{1}{2}Q\left(V_1-V_2\right)=\frac{1}{2}Q\Delta V$$

مثال : مطلوب است محاسبهٔ C و W در دو هادی مسطح با فاصلهٔ d :



$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}\ ,\quad \Delta V=V_2-V_1=-\int_{-}^{+}\vec{E}.dL=\int_{+}^{-}\vec{E}.dL$$

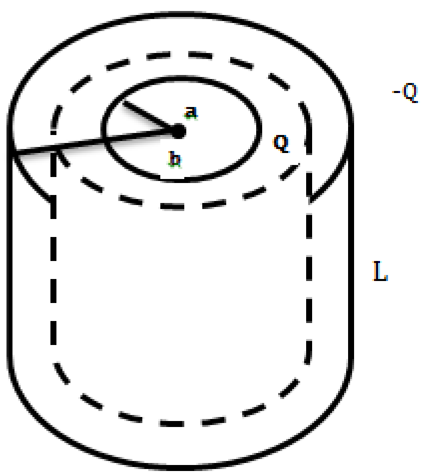
$$\Rightarrow \Delta V=\int_{+}^{-}\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}.dL=\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}\int_{0}^{d}dL=\frac{\sigma}{\varepsilon_\circ}\mathrm{d}$$

$$\Rightarrow \mathrm{C}=\frac{Q}{\Delta V}=\frac{Q}{\frac{\sigma d}{\varepsilon_\circ}}=\frac{\sigma A}{\frac{\sigma d}{\varepsilon_\circ}}\rightarrow \boxed{C=\varepsilon_\circ\frac{A}{d}}$$

$$\mathrm{W}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_\circ\frac{A}{d}}=\frac{1}{2}\frac{Q^2d}{\varepsilon_\circ A}$$

مثال : خازنی استوانه ای با شعاع داخلی a ، شعاع خارجی b و طول L داریم.

مطلوب است محاسبهٔ ظرفیت و انرژی پتانسیل ذخیره شده در خازن فوق.



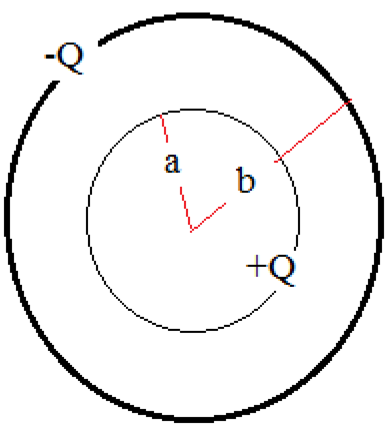
$$\int\vec{E}.d\vec{s}=\frac{Q}{\varepsilon_\circ}\Rightarrow\int_{\text{Lateral surface}}\vec{E}\,.\,d\vec{s}=\frac{Q}{\varepsilon_\circ}\rightarrow E\int ds=\frac{Q}{\varepsilon_\circ}$$

$$\rightarrow E\left(2\pi rL\right)=\frac{Q}{\varepsilon_\circ}\rightarrow E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_\circ rL}\quad ;a\le r\le b$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{-}^{+} \vec{E}.dr = \int_{+}^{-} \vec{E}.dr = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_\circ rL} dr = \left[\frac{Q}{2\pi\varepsilon_\circ L} \ln r \right]_a^b = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_\circ L} \ln \frac{b}{a} \xrightarrow{Q=C\,\Delta V}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_\circ L}{\ln \frac{b}{a}} \quad ; \quad W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{2\pi\varepsilon_\circ L}{\ln \frac{b}{a}}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_\circ L} \ln \frac{b}{a}$$

مثال : خازنی کروی با شعاع خارجی b و شعاع داخلی a داریم. مطلوب است محاسبهٔ ظرفیت و W خازن فوق.



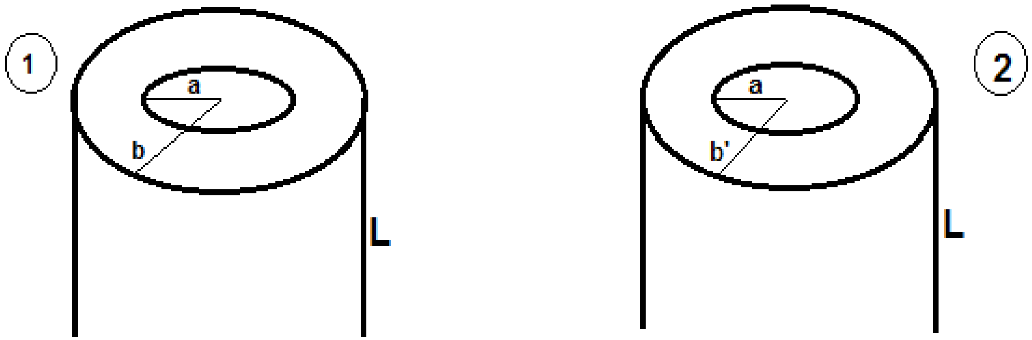
$$\int \vec{E}.d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E\int ds = \frac{Q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_\circ} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2} \quad ; a \le r \le b$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{-}^{+} \vec{E}.dr = \int_{+}^{-} \vec{E}.dr = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ r^2} dr = \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ} \left(-\frac{1}{r}\right) \right]_a^b$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{b-a}{ab}\right) \xrightarrow{Q=C\,\Delta V}$$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_\circ ab}{b-a} \quad ; \quad W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{4\pi\varepsilon_\circ ab}{b-a}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2(b-a)}{4\pi\varepsilon_\circ ab}$$

مثال : خازنی استوانه ای با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b داریم و طول خازن L می باشد. مطلوب است محاسبه ی شعاع خارجی خازن استوانه ای دیگری با شعاع داخلی a و طول L به نحوی که انرژی ذخیره شده در آن نصف انرژی پتانسیل ذخیره شده در خازن اول باشد.



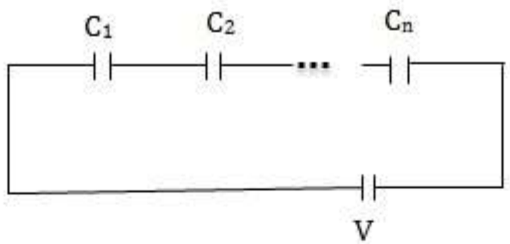
قبلاً ظرفیت و انرژی پتانسیل ذخیره شده در خازن استوانه ای با دو استوانه ی هم محور بصورت زیر بدست آمده:

$$\left\{ C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_\circ L}{\ln\frac{b}{a}} \quad ; \quad W_1 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_\circ L}\ln\frac{b}{a} \right\} \Rightarrow \left\{ C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_\circ L}{\ln\frac{b'}{a}} \quad ; \quad W_2 = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_\circ L}\ln\frac{b'}{a} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_\circ L}\ln\frac{b'}{a}}{\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_\circ L}\ln\frac{b}{a}} \xrightarrow{\frac{W_2}{W_1}=\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \frac{\ln\frac{b'}{a}}{\ln\frac{b}{a}} \Rightarrow \ln\frac{b'}{a} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow b' = \sqrt{ab}$$

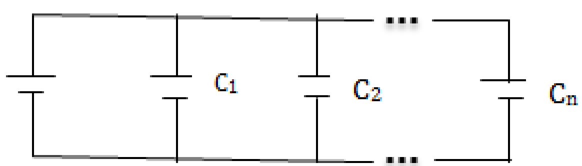
بهم بستن خازن ها :

الف) خازن های سری :



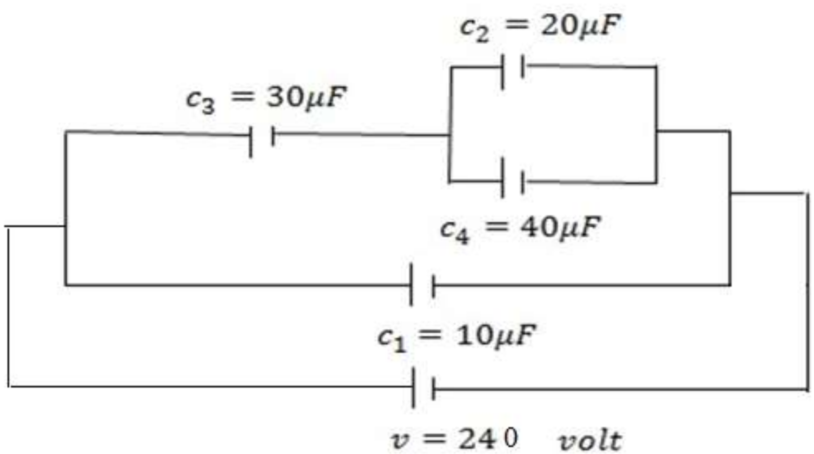
$$\left.\begin{array}{l} Q_1=Q_2=\dots\\ V_t=V_1+V_2+\dots\\ Q=CV\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{Q}{C_t}=\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_2}{C_2}+\dots\Rightarrow\frac{1}{C_t}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\dots$$

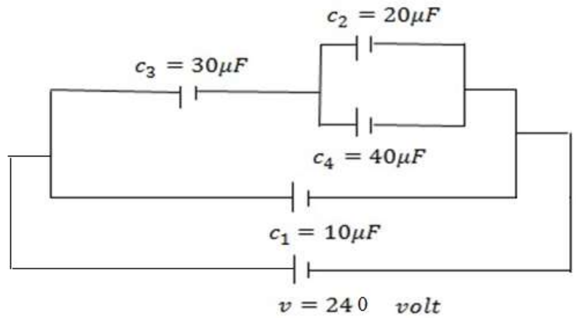
ب) خازن های موازی :



$$\left.\begin{array}{l} V_1=V_2=\dots\\ Q_t=Q_1+Q_2+\dots\\ Q=CV\end{array}\right\}\Rightarrow C_tV=c_1V_1+c_2V_2+\dots\Rightarrow C_t=C_1+C_2+\dots$$

مثال: مطلوبست محاسبه ی ظرفیت معادل، بار و ولتاژ هر خازن در شکل.





$$C_{24} = C_2 + C_4 = 20 + 40 = 60\mu F \quad ; \quad \frac{1}{C_{234}} = \frac{1}{\mathrm{C}_3} + \frac{1}{C_{24}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{60} \Rightarrow c_{234} = 20\mu F$$

$$C_{1234} = C_1 + C_{234} = 10 + 20 = 30\mu F \quad ; \quad V = 240 = V_1 = V_{234}$$

$$Q_{\mathrm{t}} = C_{\mathrm{t}} V_{\mathrm{t}} \Rightarrow Q_T = 30 \times 240 \Rightarrow Q_{\mathrm{t}} = 7200\mu c$$

$$\begin{cases} C_1 = 10\mu F \\ V_1 = 240 \end{cases} \Rightarrow Q_1 = C_1 V \to Q_1 = 2400\mu c \quad ; \quad Q_{\mathrm{t}} - Q_1 = Q_{234}$$

$$\to Q_{234} = \mathrm{Q}_{\mathrm{t}-\mathrm{Q}_1} = 7200 - 2400 \to Q_{234} = 4800\mu c \quad ; \quad Q_{234} = Q_3 = Q_{24} = 4800\mu c$$

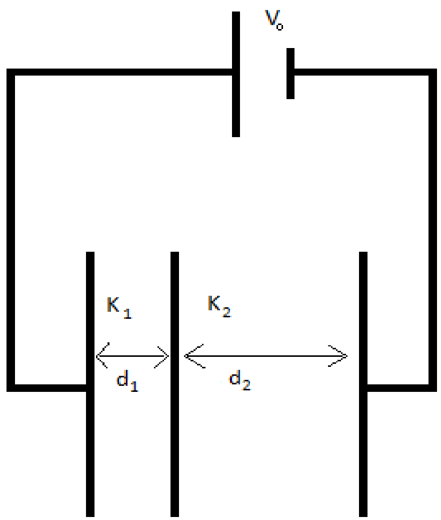
$$\begin{cases} Q_3 = 4800\mu c \\ C_3 = 30\mu F \\ V_3 = ? \end{cases} \Rightarrow V_3 = \frac{Q_3}{C_3} \to V_3 = 160\ V \quad ; \quad V_{24} = V_{234} - V_3 = 240 - 160 = 80$$

$$\xrightarrow{V_{24} = V_2 = V_4} Q_2 = C_2 V_2 \to Q_2 = 20 \times 80 = 1600\mu c$$

$$\to Q_4 = C_4 V_4 \to Q_4 = 40 \times 80 \to Q_4 = 3200\mu c$$

تکلیف: خازنی کروی با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b داریم. مطلوب است محاسبه ی شعاع داخلی خازن کروی دیگری با شعاع خارجی b به نحوی که انرژی پتانسیل ذخیره شده در آن ربع انرژی پتانسیل ذخیره شده در خازن اول باشد.

مثال : با دی الکتریکی با ثابت دی الکتریک k_1 در کنار دی‌الکتریک دیگری با ثابت k_2 پر شده است. مطلوب است محاسبه ی ظرفیت خازن فوق:



داریم :

$$V_\circ = V_1 + V_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2 \qquad (1)$$

از طرفی :

$$D_2 = D_1 \rightarrow \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \rightarrow K_1 \varepsilon_\circ E_1 = K_2 \varepsilon_\circ E_2 \rightarrow$$

$$E_2 = \frac{K_1}{K_2} E_1 \xrightarrow{(1)} E_1 d_1 + \frac{K_1}{K_2} E_1 d_2 = V_\circ \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \dfrac{V_\circ}{K_1}\left[\dfrac{1}{\dfrac{d_1}{K_1}+\dfrac{d_2}{K_2}}\right] \\ \\ E_2 = \dfrac{V_\circ}{K_2}\left[\dfrac{1}{\dfrac{d_1}{K_1}+\dfrac{d_2}{K_2}}\right] \end{cases} \qquad (3)$$

حال با استفاده از چگالی بار داریم:

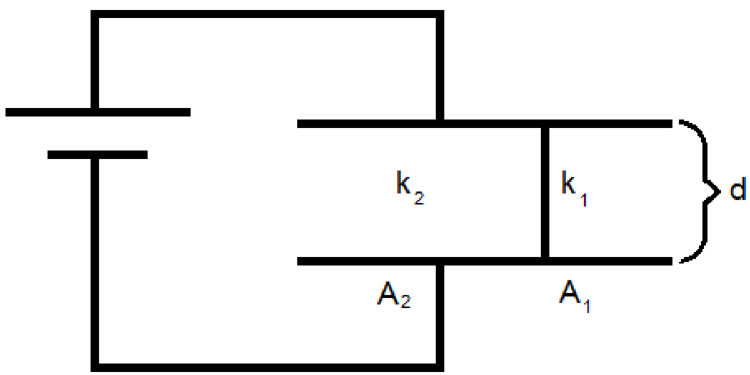
$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma}{K_1\varepsilon_\circ} \Rightarrow \sigma = K_1\varepsilon_\circ E_1$$

$$Q_{total} = \sigma A = K_1\varepsilon_\circ E_1 A \xrightarrow{(3)} Q_{total} = \frac{\varepsilon_\circ V_\circ A}{\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2}} \xrightarrow{Q=CV} C = \frac{\varepsilon_\circ A}{\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{A\frac{K_1\varepsilon_\circ}{d_1}} + \frac{1}{A\frac{K_2\varepsilon_\circ}{d_2}} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_1 A}{d_1}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_2 A}{d_2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

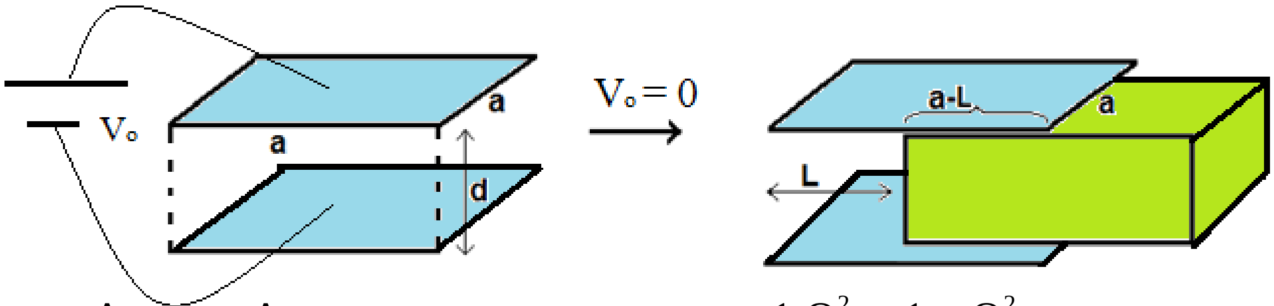
مانند آن است که دو خازن سری بسته شده باشند.

توجه: در شکل زیر مانند آن است که دو خازن موازی بسته شده باشند.



$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1 A}{d_1} + \frac{\varepsilon_2 A}{d_2}$$

مثال : خازنی با جوشن های مربع $(a\times a)$ با عایقی با ثابت K را به پتانسیل خارجی $V_\circ$ وصل می کنیم. پس از شارژ کامل $V_\circ$ را قطع می نماییم. حال عایق را از یک سو به اندازه ی L که ($a>L$) است بیرون می کشیم. مطلوب است محاسبه ی C و W خازن قبل و بعد از خروج عایق.



$$C_\circ=\varepsilon\frac{A}{d}=K\varepsilon_\circ\frac{A}{d}=K\varepsilon_\circ\frac{a\times a}{d}\quad \text{and}\quad W_\circ=\frac{1}{2}\frac{Q_\circ^2}{C_\circ}=\frac{1}{2}\frac{Q_\circ^2}{K\varepsilon_\circ\frac{a^2}{d}}$$

$$C=C_1+C_2=\varepsilon_\circ\frac{L\times a}{d}+K\varepsilon_\circ\frac{(a-L)a}{d}\quad \text{and}\quad W=\frac{1}{2}\frac{Q_\circ^2}{\varepsilon_\circ\frac{L\times a}{d}+K\varepsilon_\circ\frac{(a-L)a}{d}}$$

$$\Rightarrow W=\frac{1}{2}\frac{Q_\circ^2}{K\varepsilon_\circ\frac{a^2}{d}}\times\left[\frac{Ka}{[Ka+L(1-K)]}\right]\Rightarrow W=\left[\frac{Ka}{[Ka+L(1-K)]}\right]W_\circ$$

تکلیف: خازنی با جوشن های مربع $(a\times a)$ با عایقی با ثابت K را به پتانسیل خارجی $V_\circ$ وصل می کنیم و این اتصال همواره برقرار است. حال عایق را از یک سو به اندازه ی L که ($a>L$) است بیرون می کشیم. مطلوب است محاسبه ی C و W خازن قبل و بعد از خروج عایق.

فصل ششم، جریان های الکتریکی دائم:

طبق تعریف داریم:

چگالی

سرعت

چگالی جریان

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

اگر این $\vec{J}$ از سطح مقطع جسم dS بگذرد ,شار در سطح ایجاد مینماید که طبق تعریف شار داریم:

$$d\Phi = \vec{A}.ds$$

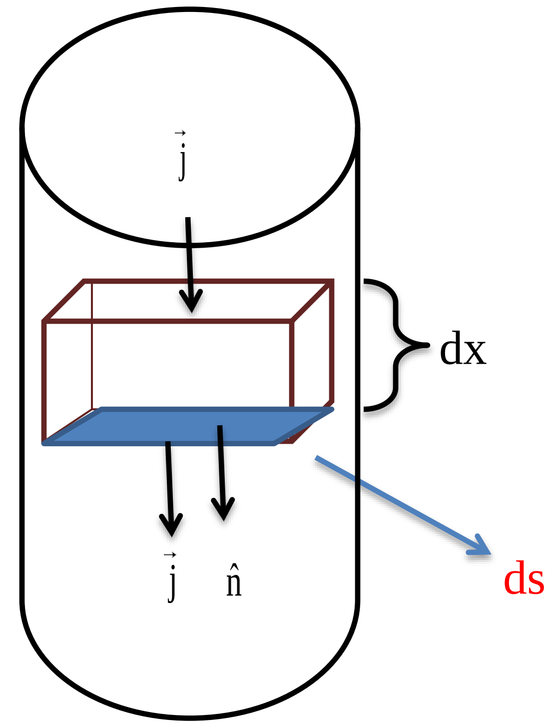
$\vec{J}$

$$d\Phi = \vec{J}.d\vec{s} = \rho\,\vec{v}.ds = \frac{\rho\,dx}{dt}.ds \Rightarrow$$

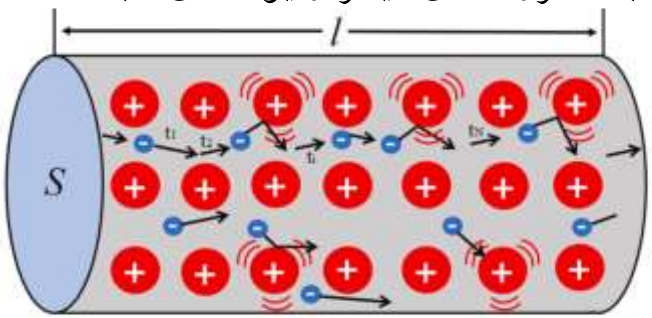
$$d\Phi = \frac{\rho(dx.ds)}{dt} = \frac{\rho(dV)}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

$$\Phi = \oint_s d\Phi = \oint_s \vec{J}.d\vec{s} = \oint_s \frac{dQ}{dt} = I \Rightarrow$$

$$\boxed{I = \int \vec{J}.d\vec{s} = \frac{dQ}{dt}}$$



مثال: فرض کنید به دو سر رسانا یی، پتانسیل الکتریکی v اعمال شود و این پتانسیل, میدان الکتریکی E را در رسانا تولید میکند که موجب حرکت حامل های بار (الکترون ها) می شود . مقدار نیروی وارد بر الکترون eE است. از طرفی نیروی باز دارنده ای به الکترون وارد می شود که ناشی از برخورد آن ها با الکترون های دیگر و یون های شبکه است. این نیروی بازدارنده تعریف می شود:



$$\vec{f} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{m\vec{v}}{\tau}$$

$$\tau = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_N}{N}$$

پس قانون دوم نیوتن برای الکترون ها در هادی می شود :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow eE - f = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow eE - \frac{mv}{\tau} = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow -\frac{m}{\tau}[v - \frac{e\tau E}{m}] = m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow v - \frac{e\tau E}{m} = -\frac{\tau dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{v - \frac{e\tau E}{m}} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int_{V_\circ}^{V} \frac{dv}{v - \frac{e\tau E}{m}} = \int_{t_\circ}^{t} -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Ln}(v - \frac{e\tau E}{m}) = -\frac{t}{\tau} + k_\circ \qquad (1)$$

حال برای محاسبه k_o داریم : در t=0 ، V=0 است.

$$\mathrm{Ln}(0 - \frac{e\tau E}{m}) = +k_\circ$$

با قرار دادن k_o در رابطه ی (۱) داریم:

$$\mathrm{Ln}(v-\frac{e\tau E}{m})=-\frac{t}{\tau}+\mathrm{Ln}(-\frac{e\tau E}{m})\Rightarrow \mathrm{Ln}(v-\frac{e\tau E}{m})-\mathrm{Ln}(-\frac{e\tau E}{m})=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{v-\frac{e\tau E}{m}}{-\frac{e\tau E}{m}}\right)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow \mathrm{Ln}\left(\frac{v}{(\frac{-e\tau E}{m})}+1\right)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow \frac{v}{(\frac{-e\tau E}{m})}+1=e^{-\frac{t}{\tau}}\Rightarrow$$

$$v=\frac{e\tau E}{m}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

اما در فلزات عموما τ از مرتبه $\tau=10^{-14}\sec$ است و $t=100\tau$ است. پس داریم:

$$v=\frac{e\tau E}{m}$$

حال:

$$\vec{j}=\rho\vec{v}=ne\vec{v}\xrightarrow{\vec{v}=(\frac{e\tau E}{m})}\vec{j}=ne(\frac{e\tau E}{m})\Rightarrow \vec{j}=\underbrace{(\frac{ne^2\tau}{m})}_{=\sigma_E}E\Rightarrow \begin{cases}\vec{j}=\sigma_E E\\ \sigma_E=\dfrac{ne^2\tau}{m}\end{cases}$$

به σ_E ضریب هدایت ویژه می گویند.

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{j}=\rho\vec{v}\\ \vec{j}=\sigma_E E\quad,\quad\left(\sigma_E=\dfrac{ne^2\tau}{m}\right)\end{array}}$$

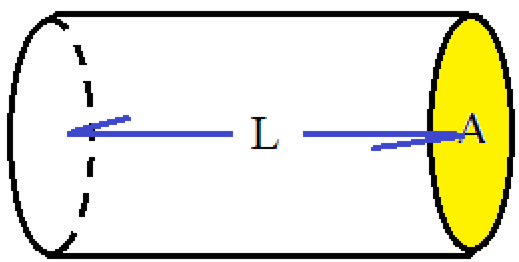
از طرفی داشتیم: $J=\sigma E$

پس داریم:

$$R=\frac{V}{I}=\frac{Ed}{JA}=\frac{Ed}{\sigma_E EA}=\frac{d}{\sigma_E A}\xrightarrow{\frac{1}{\sigma_E}=\rho}R=\rho\frac{d}{A}$$

شکل دیفرانسیل:

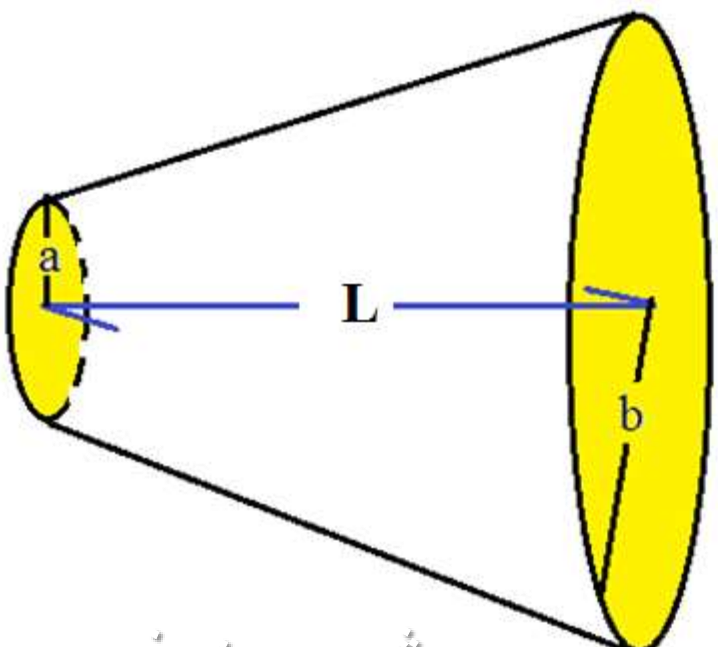
$$dR=\rho\frac{d\ell}{A}$$

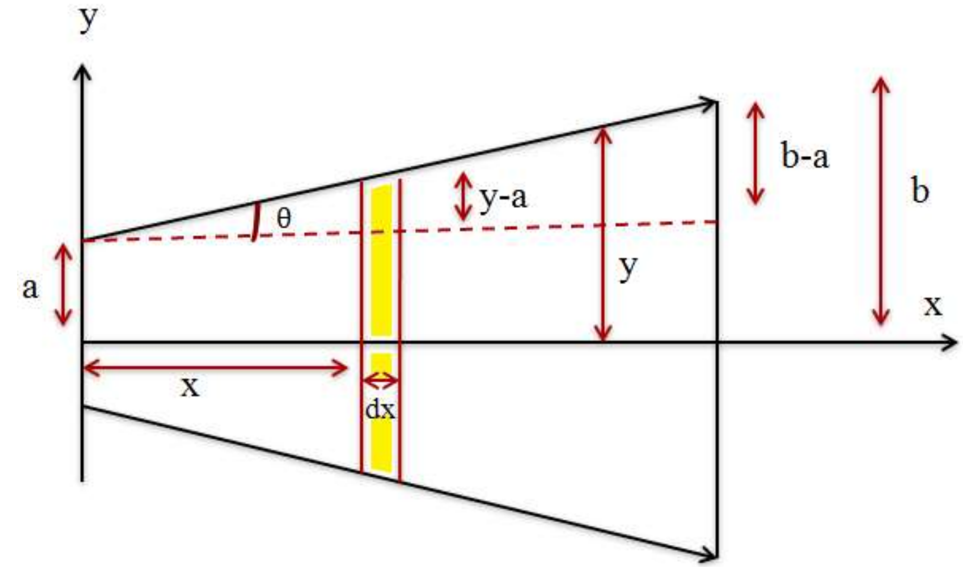


رسانایی که عکس مقاومت است می شود:

$$G=\frac{1}{R}=\sigma\frac{A}{\ell}$$

مثال: از جسمی رسانا مخروطی ناقص به ارتفاع L و شعاع سطح مقطع کوچکتر a وشعاع سطح مقطع بزرگتر b ساخته ایم : مطلوب است محاسبه ی مقاومت این مخروط ناقص بین دو سطح قاعده ی آن.



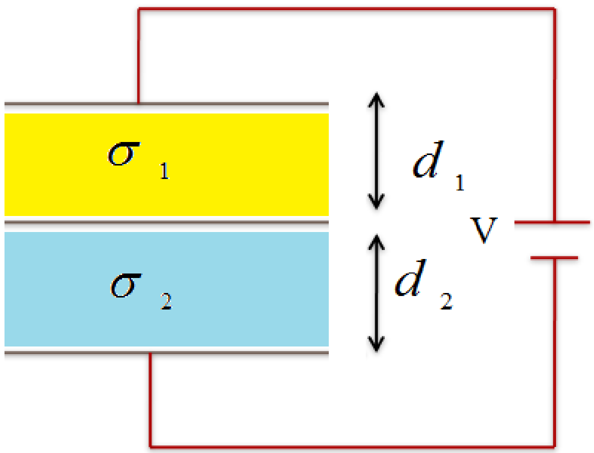


$$\left.\begin{array}{l}
dR=\rho\dfrac{dL}{A}=\rho\dfrac{dx}{\pi y^{2}}\\[2ex]
\begin{bmatrix}
\tan\theta=\dfrac{y-a}{x}\Rightarrow x=\dfrac{y-a}{\tan\theta}\Rightarrow dx=\dfrac{dy}{\tan\theta}\\[2ex]
\tan\theta=\dfrac{b-a}{L}
\end{bmatrix}\Rightarrow dx=\dfrac{dy}{\dfrac{b-a}{L}}\Rightarrow dx=\dfrac{L\,dy}{b-a}
\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$dR=\rho\frac{\dfrac{L\,dy}{b-a}}{\pi y^{2}}\Rightarrow R=\int dR=\int_{a}^{b}\frac{\rho L}{(b-a)\pi}\frac{dy}{y^{2}}=\frac{\rho L}{(b-a)\pi}\left(-\frac{1}{y}\right)_{a}^{b}=\frac{\rho L}{(b-a)\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\Rightarrow$$

$$R=\frac{\rho L(b-a)}{(b-a)\pi(a\,b)}=\rho\frac{L}{\pi(a\,b)}\Rightarrow R=\rho\frac{L}{\pi(a\,b)}\xrightarrow{\text{if: } a=b}R=\rho\frac{L}{\pi\left(a^{2}\right)}=\rho\frac{L}{S}$$

مثال : در رسانا با ارتفاع d_1 و d_2 وبا سطح مقطع های برابر (A)روی یکدیگر قرار می دهیم اگر به سطح مقطع های بالا و پایین اختلاف پتانسیل Vاعمال شود مطلوب است محاسبه ی مقاومت کل بین این دو جسم بهم چسبیده.



داریم:

$$V = V_1 + V_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2 \quad (1)$$

از طرفی در مرز بین دو رسانا داریم: $J_{1n} = J_{2n}$

پس:

$$J_1 = J_2 \Rightarrow \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \Rightarrow E_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} E_1 \quad (2)$$

با قرار دادن رابطه ی(۲) در (۱) داریم:

$$V = E_1 d_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} E_1 d_2 \Rightarrow E_1 = \frac{\sigma_2 V}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

بهمین ترتیب:

$$E_2 = \frac{\sigma_1 V}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

از طرفی داشتیم:

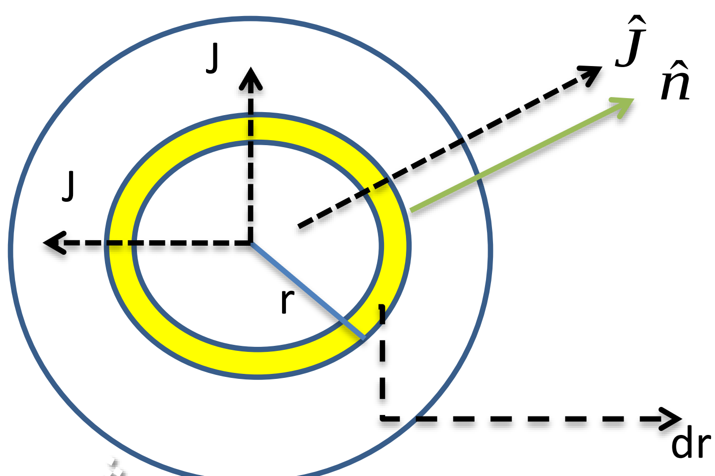
$$R = \frac{V}{I} = \frac{V}{JA} = \frac{V}{\sigma E A}$$

$$\xrightarrow{E_1=\frac{\sigma_2 V}{\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1}} R=\frac{V}{\sigma_1 E_1 A}=\frac{V}{\sigma_1 A\dfrac{\sigma_2 v}{\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1}}=\frac{\sigma_1 d_2}{\sigma_1\sigma_2 A}+\frac{\sigma_2 d_1}{\sigma_1\sigma_2 A}\Rightarrow$$

$$R=\frac{d_2}{\sigma_1 A}+\frac{d_1}{\sigma_2 A}\Rightarrow R=\underbrace{\rho_1\frac{d_1}{A}}_{=R_1}+\underbrace{\rho_2\frac{d_2}{A}}_{=R_2}\Rightarrow R=R_1+R_2$$

مثال) چگالی جریان در سطح مقطع سیم استوانه ای با رابطه زیر تغییر میکند. مطلوب است محاسبه مقاومت سطح مقطع سیم فوق:

$$J=J_0\left(1-\frac{r}{R}+\frac{R}{r}\right); J_0=const$$



$$\left\{ I = \int \vec{J} . d\vec{s} \quad ; \; d\vec{s} = 2\pi r \, dr \, \hat{n} \; ; \quad d\vec{s} = \hat{n} \, ds \quad ; \quad \vec{j} = j \hat{r} \; ; \quad \hat{r} . \hat{n} = 1 \right\}$$

$$I = \int_0^R J_\circ (1 - \frac{r}{R} + \frac{R}{r}) \; \hat{r} . 2\pi r \, dr \, \hat{n} = \int_0^R J_\circ (1 - \frac{r}{R} + \frac{R}{r}) \, 2\pi r \, dr \Rightarrow$$

$$I = 2\pi J_\circ \int_0^R r \, dr - \frac{2\pi J_\circ}{R} \int_0^R r^2 dr + 2\pi J_\circ R \int_0^R dr \Rightarrow$$

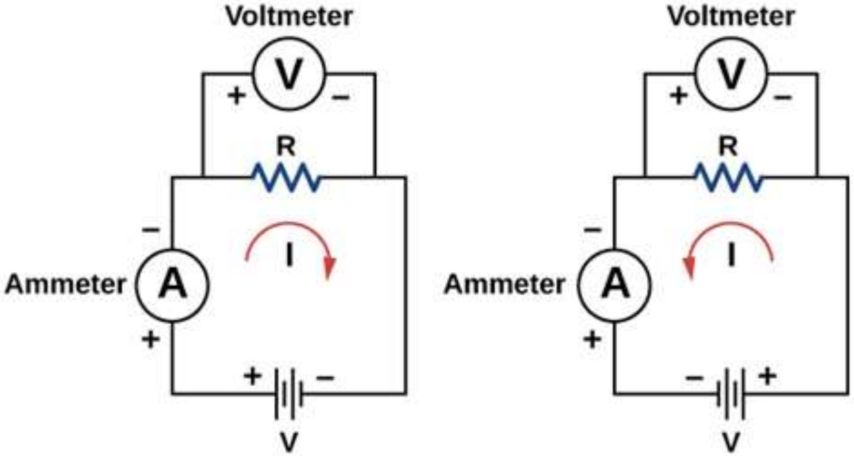
$$I = 2\pi J_\circ \left(\frac{1}{2} r^2 \right)_0^R - \frac{2\pi J_\circ}{R} \left(\frac{1}{3} r^3 \right)_0^R + 2\pi J_\circ R \left(r \right)_0^R \Rightarrow$$

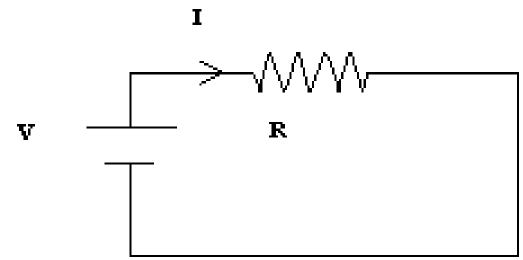
$$I = 2\pi J_\circ \left(\frac{1}{2} R^2 \right) - \frac{2\pi J_\circ}{R} \left(\frac{1}{3} R^3 \right) + 2\pi J_\circ R^2 \Rightarrow$$

$$I = 2\pi J_\circ \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3} + R^2 \right) \Rightarrow I = \frac{7\pi J_\circ R^2}{3}$$

چنانچه در یک رسانا نیرو محرکه ای که ناشی از پتانسیل خارجی باشد موجود نباشد بارها به گونه ای جابه جا می شوند که کل رسانا از نظر بار خنثی باشد .حال اگر پتانسیل خارجی اعمال شود آن موجب حرکت بار ها (الکترون ها) می شود وجریان الکتریکی ایجاد میکند .

به این عامل تولید نیرو محرکه . منبع تغذیه می گوییم.



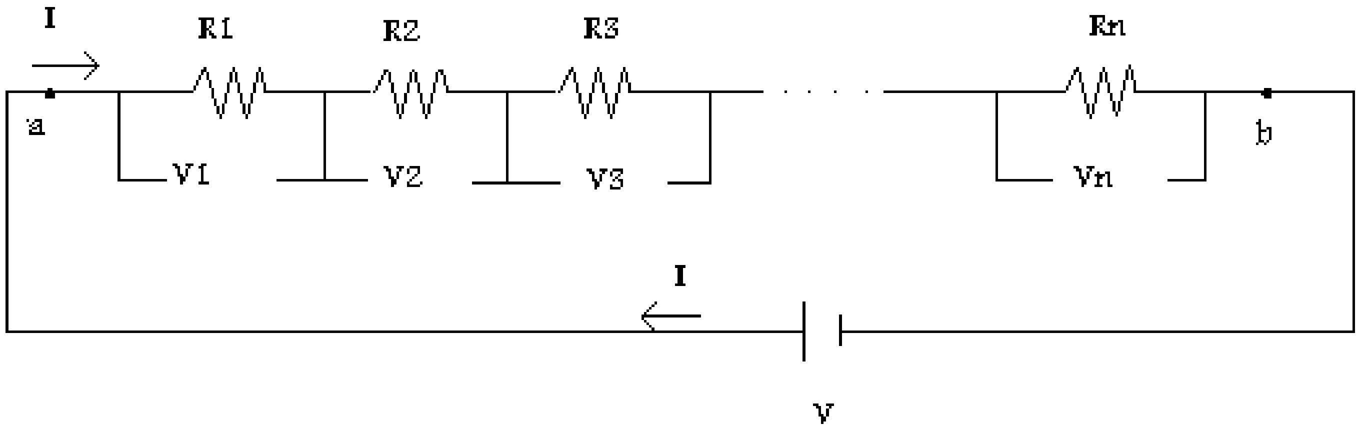


قوانین بهم پیوستن مقاومت ها

۱- سری یا متوالی:

اگر چند مقاومت را پشت سر یکدیگر بصورتی به یکدیگر متصل نماییم (جریان تنها در یک مسیر هدایت شود) و دو سر ابتدا وانتهای آنها را به ولتاژ Vوصل نماییم گوئیم آنها را بصورت سری (متوالی) بسته ایم. برای این مدار میتوان گفت: ۱-شدت جریان در تمام قسمتهای مدار یکسان است. ۲-اختلاف پتانسیل بین دو سر ابتدایی وانتهایی مقاومتها برابر مجموع اختلاف پتانسیلهای دو سر هر مقاومت می باشد. ۳- نسبت ولتاژ کل به جریان کل مقدار مقاومتی را نشان می دهد که معادل این چند مقاومت سری شده است.

٤–مقاومت معادل چند مقاومت سری برابر مجموع آنها می باشد:

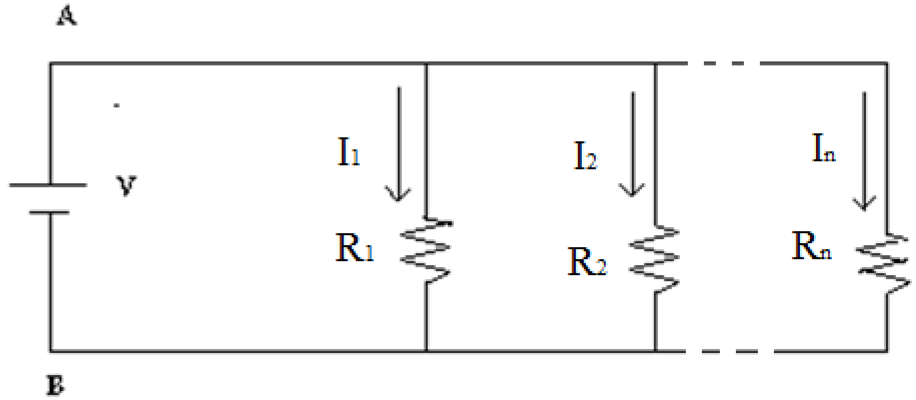


$$\left\{\begin{array}{l} I_{total} = I_1 = I_2 = \ldots = I_n \\ V_{total} = V_1 + V_2 + \ldots + V_n \\ R_{total} = \dfrac{V_{total}}{I_{total}} \Rightarrow V_{total} = R_{total} I_{total} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$R_{total} I_{total} = R_1 I_1 + R_2 I_2 + \ldots + R_n I_n \Rightarrow R_{total} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

۲–موازی:

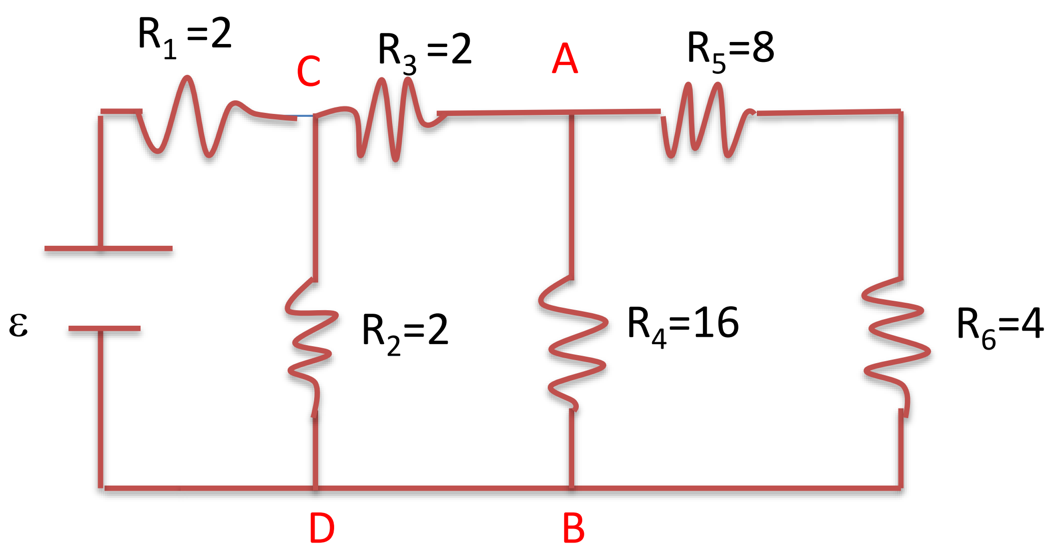
اگر چند مقاومت بطور موازی بهم وصل شوند و بین دو نقطه ی A و B ختلاف پتانسیل الکتریکی برقرار گردد ، شرایط زیر وجود خواهد داشت: ۱– جریان کلی مدار برابر مجموع جریانهای جداگانه ای است که از هر مقاومت می گذرد. ۲– ولتاژ دو سر همهء مقاومت ها مساوی بوده و برابر ولتاژ دو سر منبع تغذیه می باشد. ۳– مقاومت معادل از رابطه ی زیر بدست می آید:



$$\left\{\begin{array}{l} V_{total} = V_1 = V_2 = \ldots = V_n \\ I_{total} = I_1 + I_2 + \ldots + I_n \\ R_{total} = \dfrac{V_{total}}{I_{total}} \Rightarrow I_{total} = \dfrac{V_{total}}{R_{total}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{V_{total}}{R_{total}} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \ldots + \frac{V_n}{R_n} \Rightarrow \frac{1}{R_{total}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

مثال : در شکل زیر اگر جریان عبوری از R6 ، 1.4 A باشد مطلوب است محاسبه ی نیرو محرکه منبع.

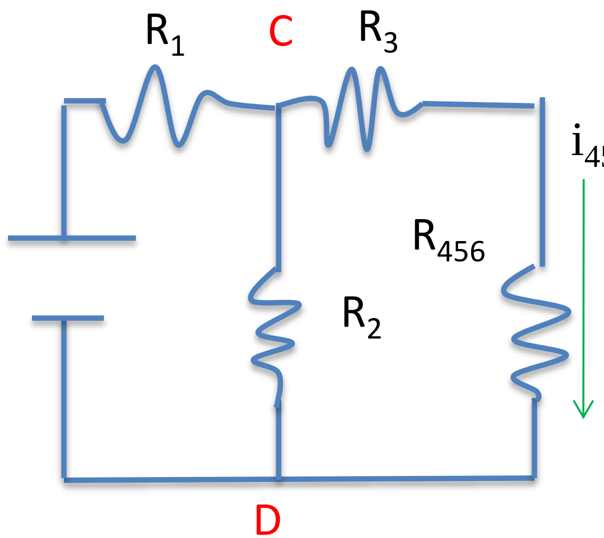


$$R_{56} = R_5 + R_6 = 8 + 4 = 12$$

$$R_{456} = \frac{R_4 \times R_{56}}{R_4 + R_{56}} = \frac{16 \times 12}{16+12} = 6.86\ \Omega$$

$$V_{AB} = R_{56} \times i_6 = 12 \times 1.4 = 16.8 \text{ volt}$$

$$i_{456} = \frac{V_{AB}}{R_{456}} \Longrightarrow i_{456} = \frac{16.8}{8.86} = 2.45$$



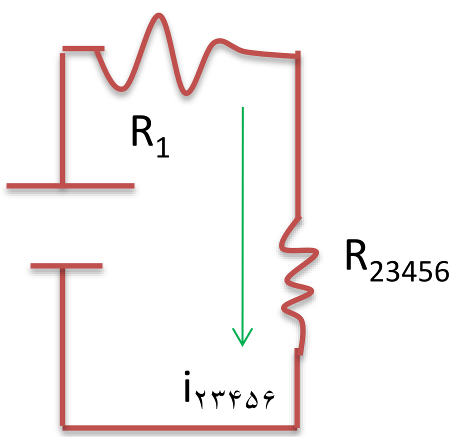
$i_{456} = 2.45$ A

$$R_{3456} = R_3 + R_{456} = 2 + 6.86 = 8.86\ \Omega$$

$$R_{23456} = \frac{R_2 \times R_{3456}}{R_2 + R_{3456}} = \frac{2 \times 8.86}{2 + 8.86} = 1.68\ \Omega$$

$$V_{CD} = R_{456} \times i_{456} = 6.86 \times 2.45 = 21.7 \text{ Volt}$$

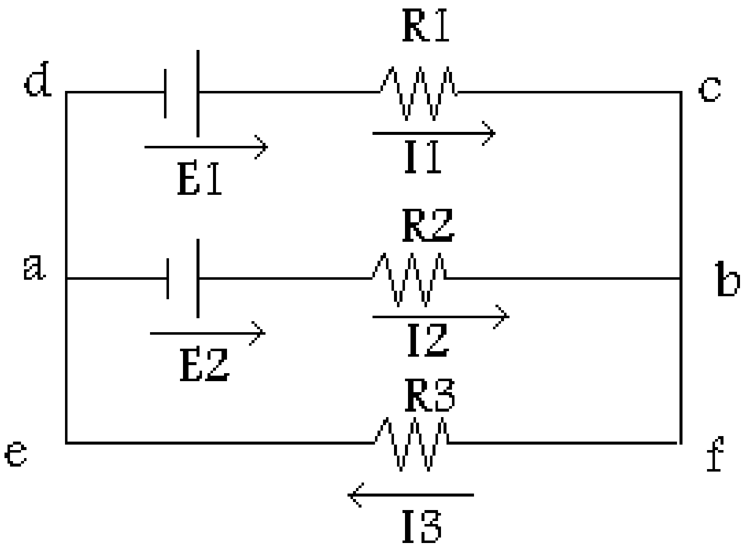
$$i_{23456} = \frac{V_{CD}}{R_{423456}} = \frac{21.7}{1.68} = 13.3 \text{ A}$$



$$R_{\text{کل}} = R_1 + R_{23456} = 2 + 1.68 = 3.68$$

$$\varepsilon = R_{\text{کل}} \times i_{۲۳۴۵۶} = 3.68 \times 13.3 = 48.3 \text{ Volt}$$

چنانچه مداری مانند شکل داشته باشیم دیگر تنها قوانین اهمی جوابگوی حل مساله نیست وبرای این منظور می بایست قوانین جدیدی وضع شود.



برای پیدا کردن شدت جریان یا اختلاف پتانسیل در مدارهایی که انشعاب های زیادی دارند ، قوانین دوگانهء کیرشهف بسیار مفیدند که بصورت زیر بیان می شوند :

۱–قانون اول کیرشهف { Kirchhoff's Current Law (KCL) } – قانون جریان ها یا قضیهء گره ها :

به موجب این قانون ، مجموع جبری جریانهایی که به یک نقطه (گره) در مدار وارد می شوند صفر می باشد.

این قانون از روی اصل بقای بار نتیجه گرفته شده است ، چرا که جریان به معنی مقدار باری است که از سطح مقطع سیمی در واحد زمان می گذرد و چون بار از بین نمی رود پس مقدار باری که در واحد زمان به یک نقطه می رسد ، می بایستی به همان مقدار از آن نقطه در واحد زمان خارج شود. بعبارت دیگر جمع جبری جریانهایی که به یک نقطه از انشعاب وارد و خارج می شوند صفر است یعنی در گره داریم :

$$\sum_{J=1}^{N} I_J = 0$$

۲- قانون دوم کیرشهف { Kirchhoff's Voltage Law (KVL) } – قانون ولتاژها یا قضیه ی حلقه ها :

قانون دوم کیرشهف بیان می نماید که مجموع تغییرات پتانسیل در یک حلقه ی کامل صفر است .

برای هر حلقه ی کامل یک مسیر دلخواه و یک جهت جریان انتخاب می نماییم و معادله ی تغییرات پتانسیل را با شروع از یک نقطه در مدار و طی کردن کامل مدار با توجه به نکات زیر می نویسیم :

۱-هرگاه مقاومتی در جهت جریان طی شود ، تغییر پتانسیل آن منفی و در جهت مخالف مثبت خواهد بود .

۲-اگر یک منبع نیرو محرکه الکتریکی ، در جهت نیرو محرکه ، از پایانه ی منفی به پایانه ی مثبت طی شود تغییر پتانسیل آن مثبت و اگردر جهت مخالف طی شود منفی است .

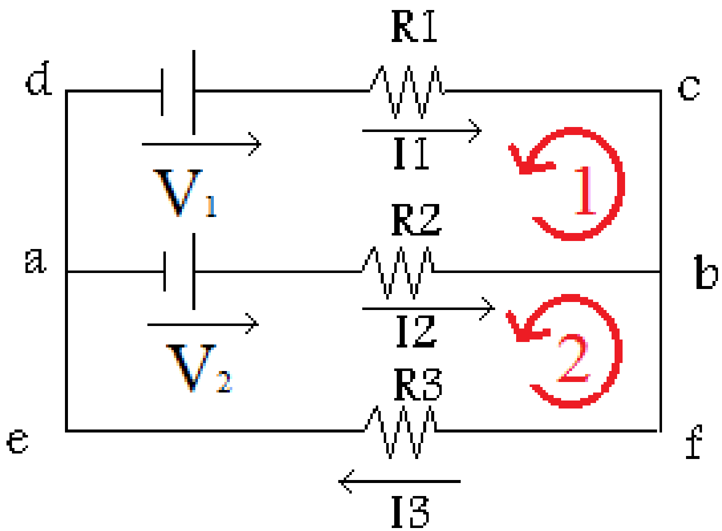
پس از حل معادلات اگر شدت جریان در شاخه ای منفی بدست آید ، معلوم می شود که جهت مفروض با جهت واقعی مخالف یکدیگر بوده اند.

در شبکه های پیچیده که تعداد زیادی کمیت مجهول در آنها وجود دارد ، بدست آوردن معادلات مستقل (آنهم به تعداد کافی) کاری دشوار و گاهی گمراه کننده است ، برای احتراز از گمراه شدن بکار بستن دستورات زیر مفید است :

۱-هرگاه n نقطهء انشعاب وجود داشته باشد ، n-1 گره موجود است که معادله ی مفید دارد.

۲-شبکه را به تعداد ممکن شکلهای هندسی تقسیم کنید ، بطوریکه محیط هر شکل مسیر جریان باشد و مسیر از وسط شکل عبور نکند. سپس قضیه ی حلقه را در مورد هر یک از شکل ها بکار برید .

مثال: مطلوبست محاسبه جریان در شاخه های جریانی شکل:



گره a : $-i_1 - i_2 + i_3 = 0$

گره b: $+ i_1 + i_2 - i_3 = 0$

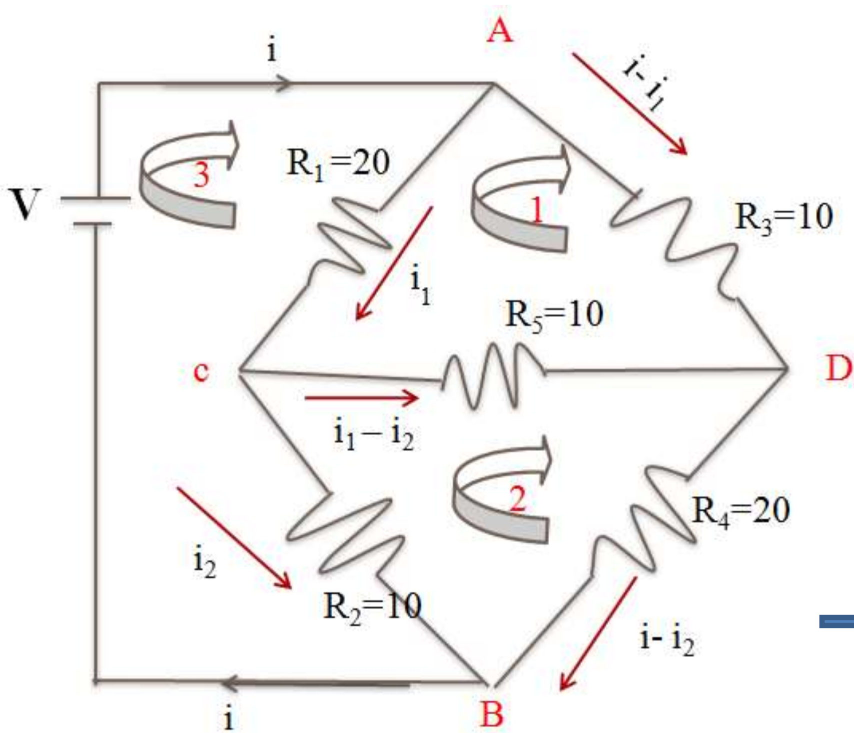
حلقه 1 : $V_C + i_1 R_1 - V_1 + V_2 - i_2 R_2 = V_C$

حلقه 2 : $V_b + i_2 R_2 - V_2 + i_3 R_3 = V_b$

با حل ۳ معادله ۳ مجهول i_1, i_2, i_3 دست می آیند.

اگر مقاومت های ۱ الی ۳ به ترتیب ۱۰، ۱۵ و ۲۲ اهم و ولتاژ منبع اول ۲ ولت و منبع دوم ۳ ولت باشند، جریان هر شاخه چقدر است؟

مثال :در شکل زیر مطلوب است محاسبه ی مقاومت معادل بین نقاط A و B.



(1) : $- R_3 (i- i_1)+ R_5 (i_1 - i_2) + R_1 i_1 =0$

(2) : $- R_4 (i- i_2) + R_2 i_2 - R_5 (i_1 - i_2)=0$

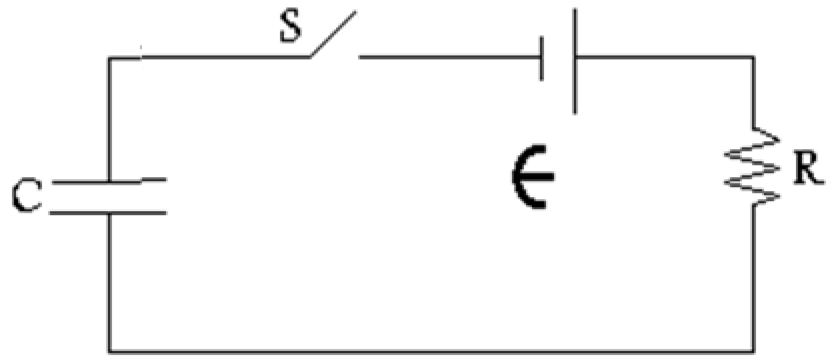
(3) : $V- R_1 i_1 - i_2 R_2 =0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10 i +40 i_1 -10 i_2 =0 \Rightarrow i_2= 4 i_1 - i \\ -20i - 10 i_1 + 40 i_2 =0 \\ 20 i_1 +10 i_2 = V \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -20i -10 i_1 + 40(4 i_1 -i)=0 \\ 20 i_1 +10(4 i_1 -i)=V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -60i + 150 i_1 =0 \\ 60 i_1 -10i = V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = (2/5) i \\ 60 (2/5) i -10i = V \end{cases}$$

$$\Rightarrow 14 i =v \Rightarrow R_{کل} = 14$$

مثال: مطلوب است محاسبه ی V_C بر حسب زمان در مدار شکل زیر وقتی کلید S بسته شد.



$$\varepsilon = V_R + V_C \quad ; \quad \varepsilon = R\,i + \frac{q}{c} \Rightarrow \varepsilon = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} \Rightarrow \varepsilon - \frac{q}{c} = R\frac{dq}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c}(\varepsilon c - q) = R\frac{dq}{dt} \Rightarrow \varepsilon c - q = cR\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{\varepsilon c - q} = \frac{dt}{Rc} \Rightarrow$$

$$\int_{q_\circ}^{q} \frac{dq}{\varepsilon.c - q} = \int_{t.}^{t} \frac{dt}{Rc} \Rightarrow -Ln(\varepsilon c - q) = \frac{t}{Rc} + k_\circ \quad (*)$$

شرط اولیه: در t=0 ، q=0 است پس داریم:

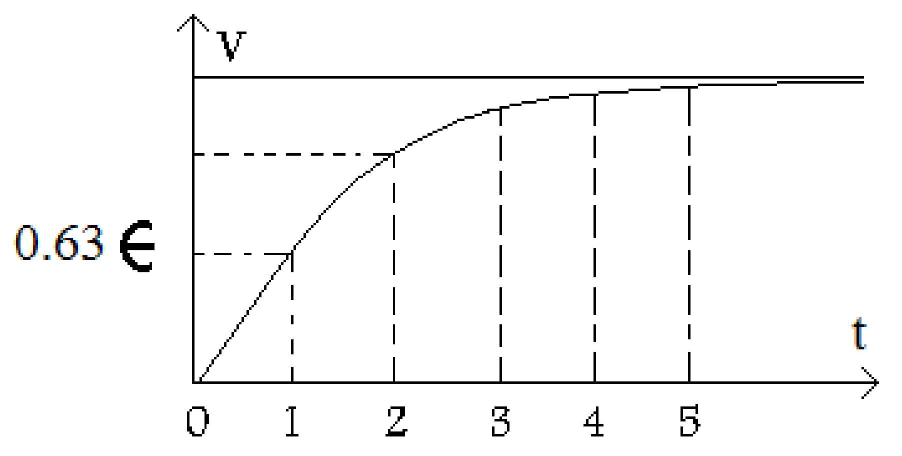
$$-\mathrm{Ln}(\varepsilon c-0)=\frac{0}{Rc}+k_{\circ}\Rightarrow k_{\circ}=-\mathrm{Ln}(\varepsilon c)$$

با قرار دادن در (*) داریم:

$$-\mathrm{Ln}(\varepsilon c-q)=\frac{t}{Rc}-\mathrm{Ln}(\varepsilon c)\Rightarrow \mathrm{Ln}(1-\frac{q}{\varepsilon c})=-\frac{t}{Rc}\Rightarrow 1-\frac{q}{\varepsilon c}=e^{-\frac{t}{Rc}}\Rightarrow$$

$$q=\varepsilon c(1-e^{-\frac{t}{Rc}})\xrightarrow{q=c\,V_c}V_c=\varepsilon(1-e^{-\frac{t}{Rc}})$$

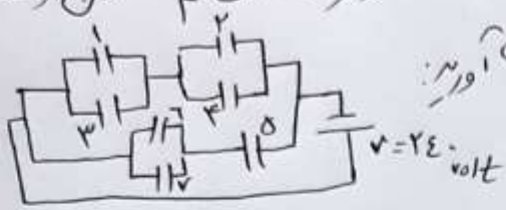
$$\text{if}:\begin{cases}t=0\rightarrow & V_c=0\\ t\Rightarrow\infty\rightarrow & V_c=\varepsilon\\ t=R\,c\rightarrow & V_c=0.63\,\varepsilon\end{cases}$$



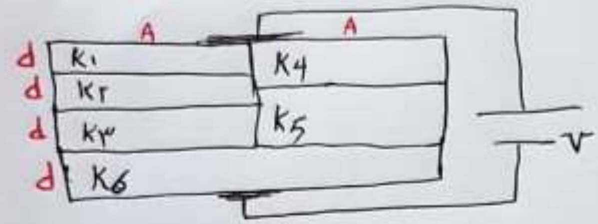
تکلیف ۲ فیزیک ۲

۱- اگر شعاع داخلی دو خازن کروی برابر و شعاع خارجی آنها متفاوت باشد، مطلوب است نسبت شعاع خارجی خازن دوم وقتی انرژی ذخیره شده در آن وقتی انرژی ذخیره شده در آن $\frac{1}{4}$ خازن اول باشد.

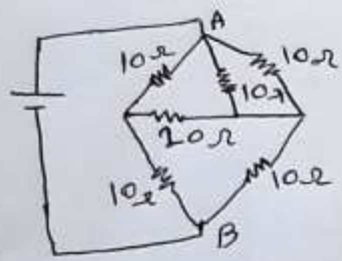
۲- ظرفیت معادل، ولتاژ و بار هر خازن را در شکل روبرو بدست آورید:
ظرفیت هر خازن شماره‌ی آن است.
مانند: $۴ \rightarrow C_4 = 4\,\mu f$



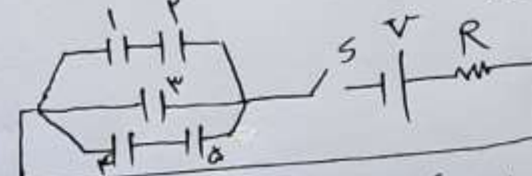
۳- ظرفیت خازن معادل شکل روبرو را بدست آورید:



۴- مقاومت معادل مدار شکل روبرو چیست؟
(مقاومت معادل بین A و B).



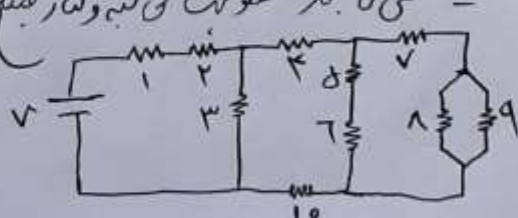
۵- در مدار شکل زیر V_C (ولتاژ خازن معادل) در زمان t چقدر است؟
ظرفیت خازن ها ۲ میکروفاراد است:



۶- اگر چگالی جریان در سطح مقطع سیم استوانه‌ای به صورت زیر تغییر نماید، مطلوب است مقاومت سطح مقطع سیم (جریان از درون سیم استوانه‌ای که سطح آن جریان دارد).

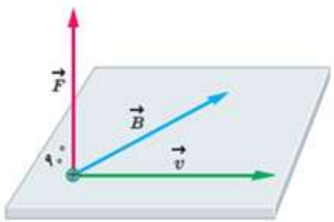
$$J = J_0\left(r - 1 + \frac{r}{R} + \frac{R}{r^2}\right) \quad ; \quad R:\ \text{شعاع سطح مقطع سیم است}$$

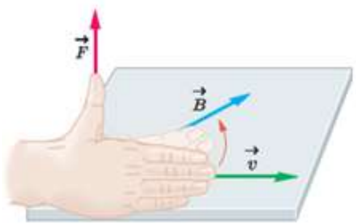
۷- در شکل زیر مقاومت ها، $\frac{1}{2}$ اهمی می‌باشند، مطلوب است ولتاژ منبع (V) اگر از مقاومت ۷ جریان ۱ آمپر بگذرد:



فصل هفتم: میدان های مغناطیسی ساکن

تا کنون با دو میدان برداری بنام های ثقل و الکتریکی آشنا شده ایم. نوع دیگری از میدان برداری نیز وجود دارد که به آن میدان برداری مغناطیسی یا میدان برداری چگالی شار مغناطیسی (B) گوییم و عامل ایجاد آن یک آهنربای دائمی و یا سیم حامل جریان می باشد. به تجربه ثابت شده است اگر یک بار متحرک در یک میدان مغناطیسی قرار گیرد، نیرویی از طرف میدان به بار وارد می شود که این نیرو حالات زیر را ایجاد می کند :





جهت نیرو بر میدان مغناطیسی و همچنین بردار سرعت ذره عمود است.

مقدار نیرو با حاصلضرب بار ذره، سرعت ذره و میان مغناطیسی متناسب است.

بیشترین نیرو وقتی ایجاد می شود، که ذره بر میدان مغناطیسی عمود باشد.

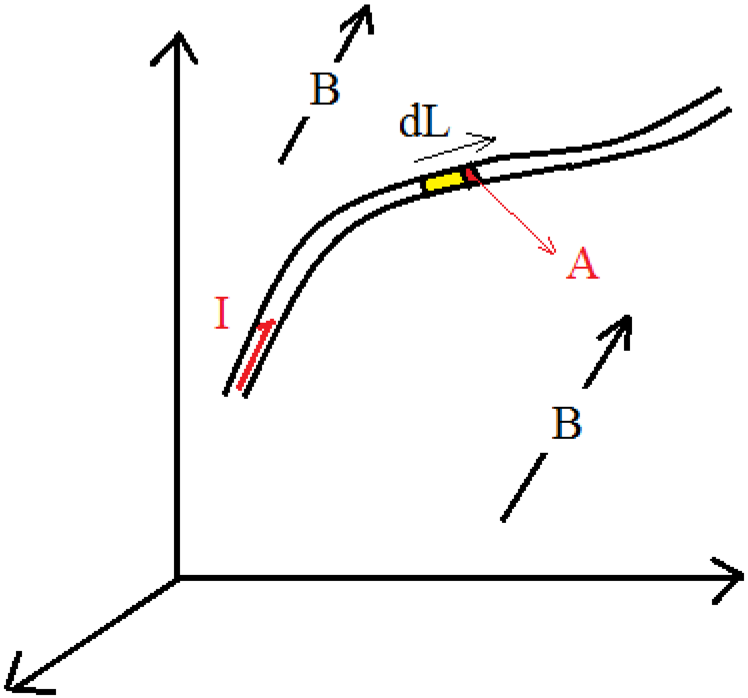
جمع بندی این حالات به شکل فرمول زیر است :

$$\vec{F}_B = q(\vec{V} \times \vec{B})$$

میدان مغناطیسی موجب تغییر سرعت و انرژی جنبشی ذره نخواهد شد و تنها اثر آن جابجایی ذره در جهت «F» می باشد. پس میدان مغناطیسی تنها بر بارهای متحرک اثر می گذارد و اثری بر بارهای جایگزیده ندارد.

چنانچه بار متحرک تحت تأثیر دو میدان برداری B (مغناطیسی) و E قرار گیرد، نیروی وارد بر ذره که به آن نیروی لورنس گویند برابر است با :

$$\vec{F}_L = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E} + q(\vec{V} \times \vec{B}) = q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)$$



نیروی وارد بر سیم حامل جریان از طرف میدان مغناطیسی

$$d\vec{F} = Q\vec{v}\times\vec{B} = Nq\vec{v}\times\vec{B}$$

که در آن N تعداد حامل بار در طول dL و v سرعت حرکت حامل ها است. می توان نوشت:

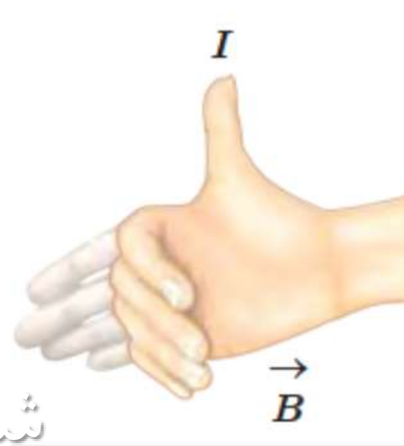
$$d\vec{F} = n\,A\,d\vec{L}\,q\bar{v}\times\vec{B}$$

n تعداد بار در واحد حجم و A سطح مقطع سیم می باشد.

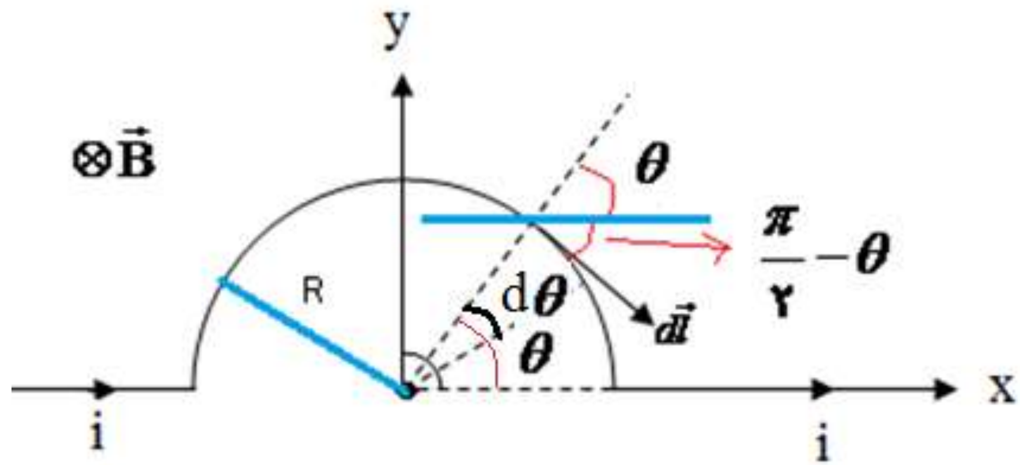
از طرفی داریم: $\vec{J} = \rho\,\bar{v} = n\,q\,\bar{v}$ پس مس توان نوشت:

$$\underbrace{A\,\vec{J}}_{=I}\quad d\vec{F} = A\,\vec{J}\,d\vec{L}\times\vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = I\,d\vec{L}\times\vec{B} \Rightarrow \oint_C d\vec{F} = I\oint_C d\vec{L}\times\vec{B} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = I\oint_C d\vec{L}\times\vec{B}}$$

در سیم مستقیم داریم: $\boxed{\vec{F} = I\,\vec{L}\times\vec{B}}$



مثال: مطلوب است محاسبه نیروی وارد بر سیم نیم‌دایره‌ای که در میدان مغناطیسی ثابت در شکل زیر قرار دارد:



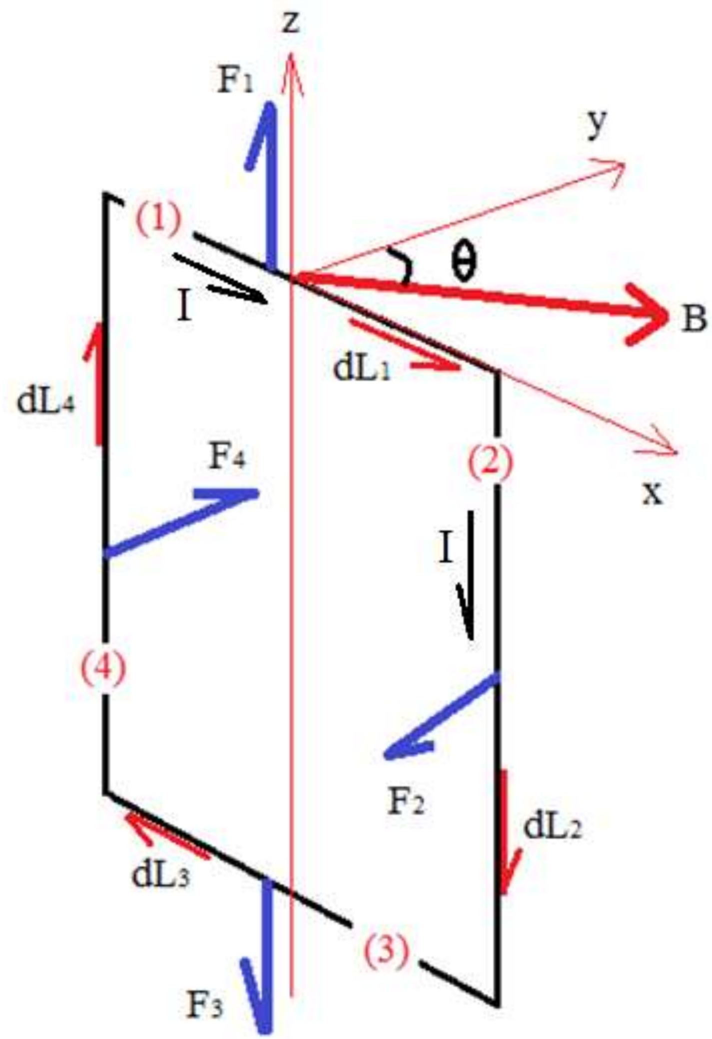
$$\vec{F} = I\int d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad ; \quad \vec{B} = B\left(-\hat{k}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} d\vec{\ell} = \left|d\vec{\ell}\right|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\hat{i} - \left|d\vec{\ell}\right|\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\hat{j} \\ \left|d\vec{\ell}\right| = Rd\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow d\vec{\ell} = Rd\theta\left[\sin\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j}\right] \end{array}\right]$$

$$\vec{F} = IR\int d\theta\left[\sin\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j}\right] \times \left(-B\hat{k}\right) \Rightarrow \vec{F} = IRB\int_{\pi}^{0}\left[\sin\theta\left(-\hat{j}\right) + \cos\theta\hat{i}\right]d\theta \Rightarrow$$

$$\vec{F} = IRB\underbrace{\left[-\cos\theta\left(-\hat{j}\right)\Big|_{\pi}^{0} + \sin\theta\left(\hat{i}\right)\Big|_{\pi}^{0}\right]}_{=2\hat{j}} \Rightarrow \vec{F} = 2IRB\hat{j}$$

مثال: مطلوبست محاسبه نیروها و گشتاور نیروهای وارد بر قابی مستطیل شکل که در میدان مغناطیسی B مطابق شکل قرار گرفته است (گشتاور نیرو حول محور Z محاسبه شود)



$$\vec{B} = B\left(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}\right)$$

$$\vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B}$$

$$\vec{F}_1 = I\vec{L}_1 \times \vec{B} = I\left(a\hat{i}\right)\times B\left(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{F}_1 = I\,a\,B\cos\theta\ \hat{K}$$

$$\vec{F}_2 = I\vec{L}_2 \times \vec{B} = I\,b\left(-\hat{k}\right)\times B\left(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{F}_2 = I\,bB\left[\sin\theta\left(-\hat{j}\right) + \cos\theta\hat{i}\right]$$

$$\vec{F}_3 = I\vec{L}_3 \times \vec{B} = I\left(-a\hat{i}\right)\times B\left(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{F}_3 = I\,aB\cos\theta\left(-\hat{k}\right)$$

$$\vec{F}_4 = I\vec{L}_4 \times \vec{B} = I\,b\left(\hat{k}\right)\times B\left(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{F}_4 = I\,b\,B\left[\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i}\right]$$

$$\vec{F}_{total} = \sum_{i=1}^{4}\vec{F}_i = 0$$

چون نیروهای F_1 ، F_3 در امتداد لولا عمل می‌کند پس گشتاور نداریم. اما محاسبه ی گشتاور نیروهای F_2 ، F_4 .

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = 0\hat{k} \times \vec{F}_1 = 0 \quad ; \quad \vec{\tau}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = 0$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

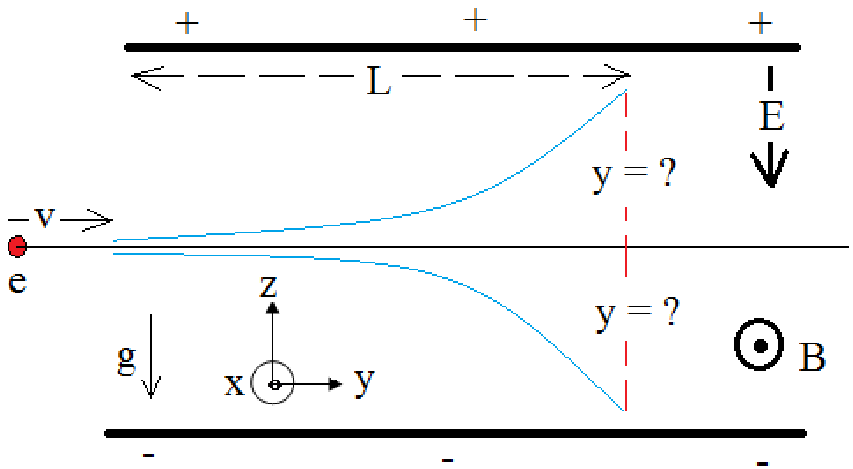
$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \left(\frac{a}{2}\hat{i}\right) \times \left(IbB\left[-\sin\theta\hat{j} + \cos\theta\hat{i}\right]\right) = \frac{-aIbB\sin\theta\,\hat{k}}{2}$$

$$\vec{\tau}_4 = \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = \left(-\frac{a}{2}\hat{i}\right) \times \left(IbB\left[\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{i}\right] = \frac{-aIbB\sin\theta\,\hat{k}}{2}\right)$$

$$\vec{\tau}_{total} = \sum_{i=1}^{4} \vec{\tau}_i = \circ + \circ + \left(\frac{-aIbB\sin\theta\,\hat{k}}{2}\right) + \left(\frac{-aIbB\sin\theta\,\hat{k}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{\tau}_{total} = aIbB\sin\theta\left(-\hat{k}\right)$$

مثال: آزمایش تامپسون: مطابق شکل الکترونی با بار e و جرم m با سرعت v بین صفحات خازن تختی وارد می‌شود.
مطلوبست محاسبه مقدار انحراف عمودی ذره در طول L بین صفحات خازن.



$$\vec{F}_L = e\left(\vec{E} + V \times \vec{B}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{F}_L = e\left[E\left(-\hat{k}\right) + V\left(\hat{j}\right) \times B\left(\hat{i}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\vec{F}_L = e[E + VB]\left(-\hat{k}\right)$$

اما نیروی mg نیز به الکترون وارد می شود ، بنابر این نیروی کل وارد بر الکترون از سوی سه میدان برداری می شود:

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_L + \vec{F}_{mg} = e[E + vB]\left(-\hat{k}\right) + mg\left(-\hat{k}\right) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{electron charge is negative}} \vec{F}_{total} = [eE + evB - mg]\left(\hat{k}\right)$$

$$\left.\begin{cases} L = vt \rightarrow t = \dfrac{L}{v} \quad ; \quad y = \dfrac{1}{2}at^2 \\ \vec{F}_{total} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \dfrac{\vec{F}_{total}}{m} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{e}{m}[E + vB - g]\left(\hat{k}\right) \end{cases}\right\} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\left[\frac{e}{m}[E + vB - g]\right]\left(\frac{L}{v}\right)^2 \left(\hat{k}\right) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{if: } (eE+evB) > mg} y = \left(\frac{e}{m}\right)\left[[E + vB - g]\left(\frac{L^2}{2v^2}\right)\right]\left(\hat{k}\right)$$

مثال: پروتونی با انرژی جنبشی ۱۰ مگا الکترون ولت در یک میدان مغناطیسی حرکتی دایره‌ای انجام می‌دهد و شعاع حرکت R می‌باشد مطلوب است محاسبه انرژی جنبشی ذره ی α برای آنکه این ذره نیز این مسیر دایره‌ای را بپیماید.

$$q_\alpha = 2q_p \quad ; \quad m_\alpha = 4m_p$$

$$\left.\begin{cases} E_K = \dfrac{1}{2}mv^2 \to v = \sqrt{\dfrac{2E_K}{m}} \\ \left.\begin{cases} F_L = qvB \\ F_R = \dfrac{mv^2}{R} \end{cases}\right\} \Rightarrow qvB = \dfrac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \dfrac{qBR}{m} \end{cases}\right\} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_K}{m}} = \frac{qBR}{m} \to R = \sqrt{\frac{2\,m\,E_K}{q^2B^2}} \Rightarrow$$

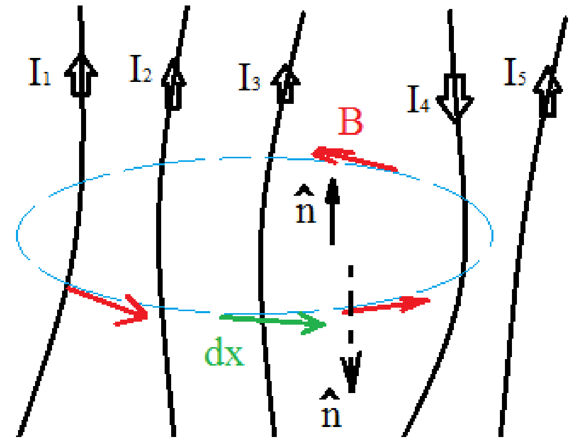
$$\xrightarrow{R_P = R_\alpha} \sqrt{\frac{2m_p\left(E_k\right)_P}{q_p^2B^2}} = \sqrt{\frac{2m_\alpha\left(E_k\right)_\alpha}{q_\alpha^2B^2}} \to \sqrt{\frac{2m_p \times 10_{mev}}{q_p^2B^2}} = \sqrt{\frac{2\left(4m_p\right)\left(E_k\right)_\alpha}{\left(2q_p\right)^2 B^2}} \Rightarrow$$

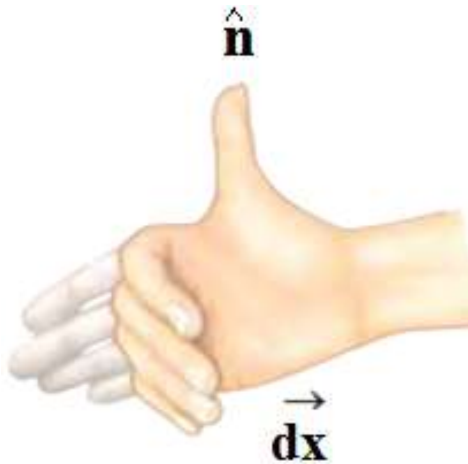
$$\to E_{k\alpha} = E_{kp} = 10 \quad Mev$$

قانون آمپر: گفتیم در اطراف سیم حامل جریان میدان مغناطیسی درست می‌شود. قانون آمپر بیان می‌داد و چنانچه در فضا چند سیم حامل جریان داشته باشیم و حلقه‌ای بسته (حلقه آمپری) بدور آن جریان‌ها انتخاب کنیم، بردار B کل یا چرخش حول این حلقه بسته مقداری می‌یابد که برابر با جمع جبری جریانهای داخل حلقه می‌باشد.

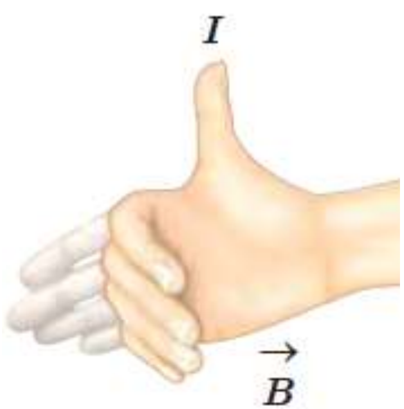
$$\oint \vec{B}.d\vec{x} = \mu_\circ \sum_{j=1}^{N} i_j$$

$$\oint \vec{B}.d\vec{x} = \mu_\circ \left(I_1 + I_2 + I_3 - I_4 \right)$$



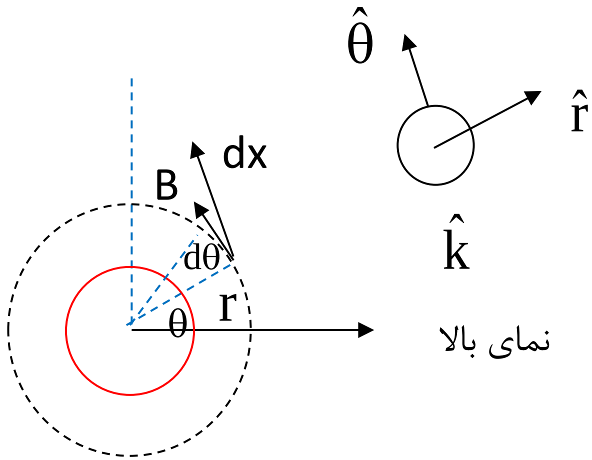


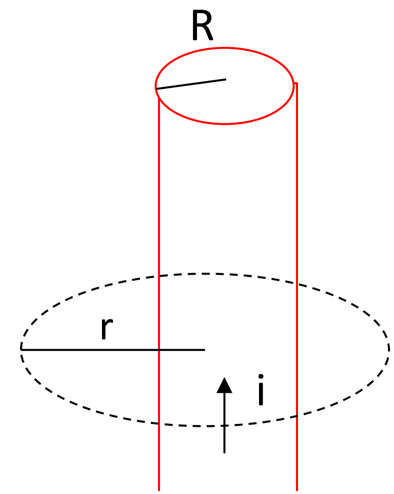
۱- انتخاب جهت dx: چنانچه شست دست راست را در جهت بردار نرمال سطح حلقه بسته بگیریم، ٤ انگشت جهت dx را نمایش می‌دهد.



۲- جهت B: شست دست راست در جهت جریان روی سیم قرار دهیم، جهت بسته شدن ٤ انگشت جهت میدان B را می‌دهد.

مثال: سیمی استوانه‌ای به شعاع R حامل جریان I است، مطلوبست محاسبه میدان مغناطیسی در داخل و خارج سیم.



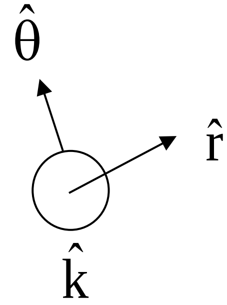


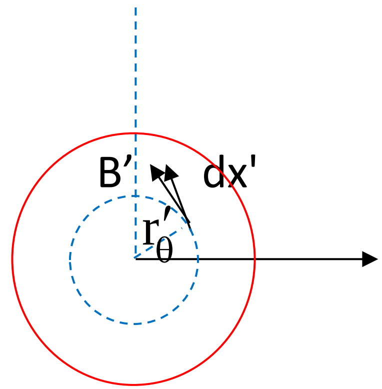
نقاط خارج سیم:

$$\oint \vec{B}.d\vec{x} = \mu_\circ I \Rightarrow \oint \left(B\hat{\theta}\right).\left(dx\hat{\theta}\right) = \mu_\circ I \Rightarrow \oint B\,dx = \mu_\circ I \xrightarrow{dx=r\,d\theta}$$

$$\int_0^{2\pi} Br\,d\theta = \mu_\circ I \Rightarrow Br\left(2\pi\right) = \mu_\circ I \Rightarrow B = \frac{\mu_\circ I}{2\pi r} \quad ; \quad r \rangle R$$

نقاط داخل سیم:





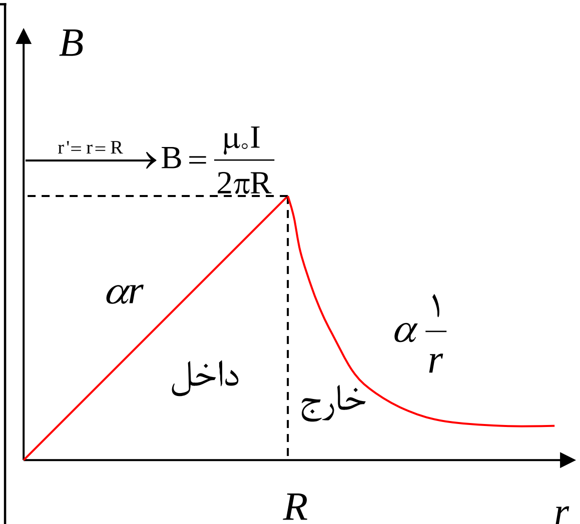
نمای بالا

$$\oint \vec{B}'.d\vec{x}' = \mu_\circ I' \Rightarrow \oint \left(B'\hat{\theta}\right).\left(dx'\hat{\theta}\right) = \mu_\circ I' \Rightarrow \oint B'\, dx' = \mu_\circ I' \xrightarrow{dx'=r'd\theta}$$

$$\int_0^{2\pi} B' r'\, d\theta = \mu_\circ I' \Rightarrow B' r'\left(2\pi\right) = \mu_\circ I' \Rightarrow B' = \frac{\mu_\circ I'}{2\pi r'} \quad ; \quad r' < R$$

$$\left\{\begin{bmatrix} J = \dfrac{I}{\pi R^2} \\ I' = J\left(\pi r'^2\right) \end{bmatrix} \Rightarrow I' = \frac{I}{\pi R^2}\left(\pi r'^2\right) \Rightarrow I' = \frac{I r'^2}{R^2}\right\}$$

$$\Rightarrow B' = \frac{\mu_\circ \left(\dfrac{I r'^2}{R^2}\right)}{2\pi r'} \Rightarrow B' = \frac{\mu_\circ I r'}{2\pi R^2} \quad ; \quad r' < R$$



قانون بیوساوار:

برای محاسبه B در حالت کلی بکار می رود.

فرض کنید سیمی مطابق شکل در فضا حامل جریان i است. برای استفاده از قانون بیوساوار داریم:

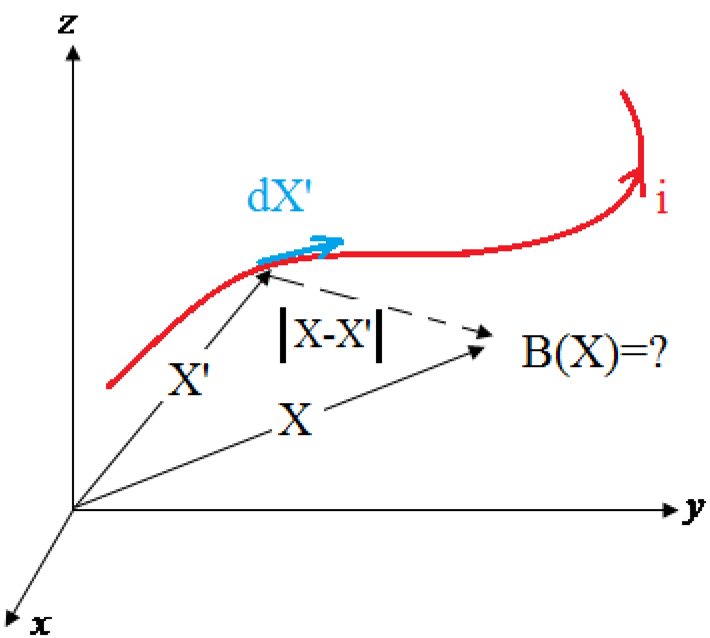
۱- انتخاب دستگاه مختصات مناسب .

۲- بردار مکانی که از مبدا تا نقطه ای که می خواهیم B را بدست آوریم رسم می‌شود را با X نمایش می‌دهیم.

۳- انتخاب dX' (المان طولی در سیم حامل جریان) می بایست در جهت جریان باشد.

٤- بردار مکانی که از مبدا تا اول dX' رسم می‌شود را X' می گیریم.

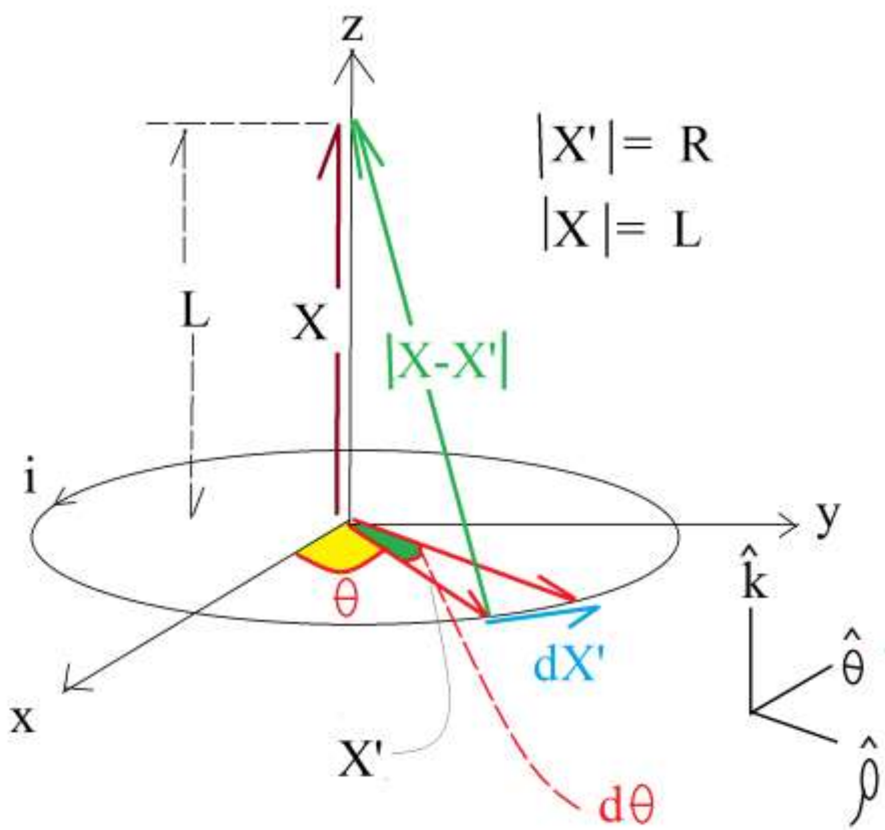
۵- استفاده از فرمول :



$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_\circ i}{4\pi}\int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X}-\vec{X}')}{|\vec{X}-\vec{X}'|}$$

شهروز نصیریان

مثال: حلقه ای به شعاع R حامل جریان i است. مطلوبست محاسبه ی میدان مغناطیسی حاصل از آن در فاصله ی L از مرکز حلقه و واقع بر خط عمود بر صفحه ی حلقه و گذرنده از مر کز آن.



$$d\vec{X}' = dX'\hat{\theta} = Rd\theta\hat{\theta}$$

$$\vec{X} = L\,\hat{k} \quad ; \quad \vec{X}' = R\hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{X} - \vec{X}'\right| = \sqrt{L^2 + R^2} \;;\quad \hat{\rho} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$

$$\boxed{\vec{B}\left(\vec{X}\right) = \frac{\mu_\circ i}{4\pi}\oint \frac{d\vec{X}' \times \left(\vec{X} - \vec{X}'\right)}{\left|\vec{X} - \vec{X}'\right|^3}}$$

$$\rightarrow \vec{B}(R) = \frac{\mu_\circ i}{4\pi}\int \frac{R\,d\theta\,\hat{\theta} \times \left(L\hat{k} - R\hat{\rho}\right)}{\left(R^2 + L^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

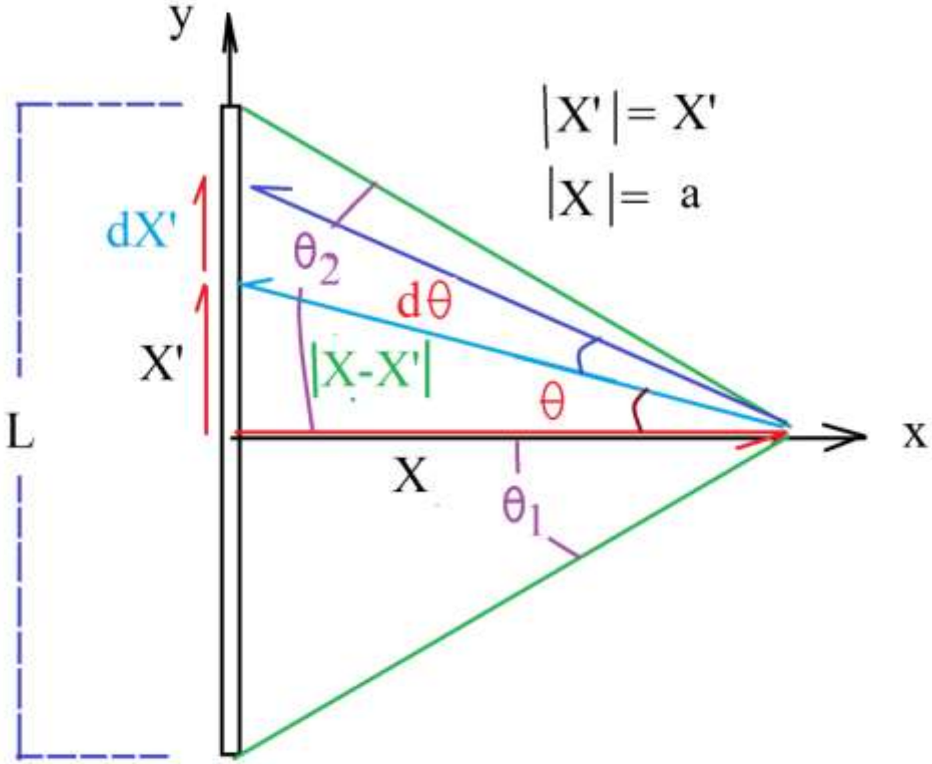
$$\rightarrow \vec{B}(R) = \frac{\mu_\circ\, i\, R}{4\pi\left(R^2 + L^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\theta\left[L\hat{\rho} + R\,\hat{k}\right]$$

$$\rightarrow \vec{B}(R)=\frac{\mu_\circ\, i\, R}{4\pi\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\theta\left[L\left(\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j}\right)+R\,\hat{k}\right]\Rightarrow$$

$$\vec{B}(R)=\frac{\mu_\circ\, i\, R}{4\pi\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left\{\underbrace{\left(L\,\hat{i}\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta\right)}_{=0}+\underbrace{\left(L\,\hat{j}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\right)}_{=0}+\left(R\,\hat{k}\int_0^{2\pi} d\theta\right)\right\}\Rightarrow$$

$$\vec{B}(R)=\frac{\mu_\circ\, i\, R}{4\pi\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(R\,\hat{k}\,(2\pi)\right)\Rightarrow\boxed{\vec{B}(X=R)=\frac{\mu_\circ\, i\, R^2\,\hat{k}}{2\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

مثال: سیمی مستقیم بطول L دارای جریان i می باشد. مطلوبست محاسبه ی میدان مغناطیسی حاصل از آن در فاصله ی a از سیم و واقع بر خط عمود منصف آن.



$$d\vec{X}' = dX'\,\hat{j} \quad ; \quad \vec{X} = a\,\hat{i} \quad ; \quad \vec{X}' = \vec{X}'\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{X} - \vec{X}'\right| = \sqrt{X'^2 + a^2}$$

$$\boxed{\vec{B}\left(\vec{X}\right) = \frac{\mu_\circ i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{X}' \times \left(\vec{X} - \vec{X}'\right)}{\left|\vec{X} - \vec{X}'\right|^3}}$$

$$\rightarrow \vec{B}\left(\vec{X}\right) = \frac{\mu_\circ i}{4\pi} \int \frac{dX'\,\hat{j} \times \left(a\,\hat{i} - \vec{X}'\,\hat{j}\right)}{\left(X'^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\rightarrow \vec{B}\left(\vec{X}\right) = \frac{\mu_\circ\, i}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{a\,dX'(-\hat{k})}{\left(X'^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} + 0$$

$$\to \vec{B}\left(\vec{X}\right)=\frac{\mu_\circ\, i\, a\,(-\hat{k})}{4\pi a^3}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{dX'}{\left(\left(\frac{X'}{a}\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{X'}{a}=\tan\theta\to\frac{dX'}{a}=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\ \to dX'=\frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

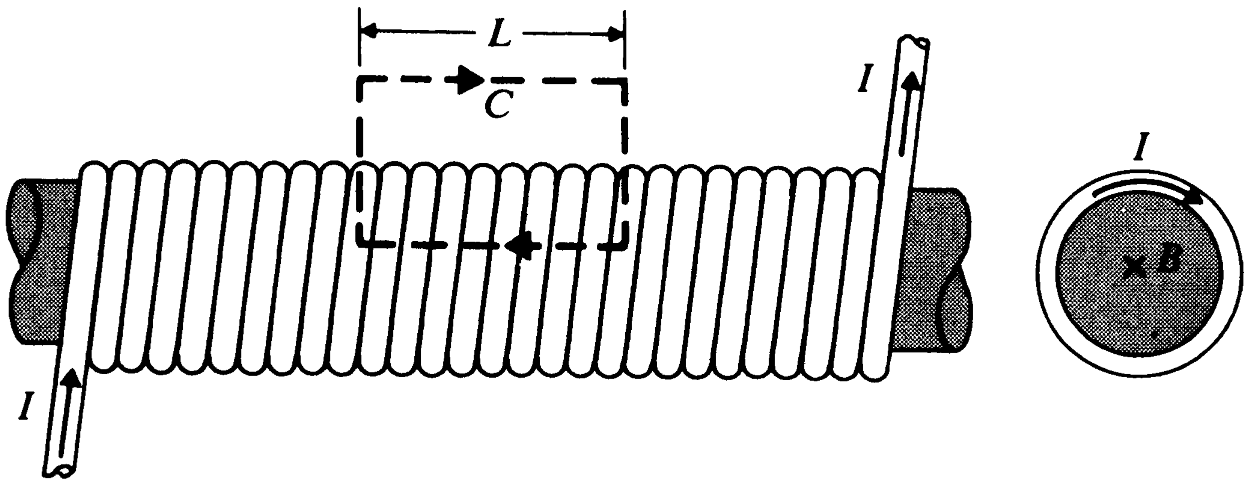
$$\vec{B}\left(\vec{X}\right)=\frac{\mu_\circ\, i\, a\,(-\hat{k})}{4\pi a^3}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{\frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta}}{\left(\tan^2\theta+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_\circ\, i\,(-\hat{k})}{4\pi a}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\cos^3\theta}}=\frac{\mu_\circ\, i\,(-\hat{k})}{4\pi a}\int_{-\frac{L}{2}\to\theta_2}^{\frac{L}{2}\to\theta_1}\cos\theta\, d\theta\Rightarrow$$

$$\vec{B}\left(\vec{X}\right)=\frac{\mu_\circ\, i\,(-\hat{k})}{4\pi a}\left(\mathrm{Sin}\,\theta_1-\mathrm{Sin}\,\theta_2\right)$$

$$\left\{\sin\theta_1=\frac{-\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{L}{2}\right)^2+a^2}}=\frac{-L}{\sqrt{4L^2+a^2}}\quad;\quad\sin\theta_2=\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+a^2}}=\frac{L}{\sqrt{4L^2+a^2}}\right\}$$

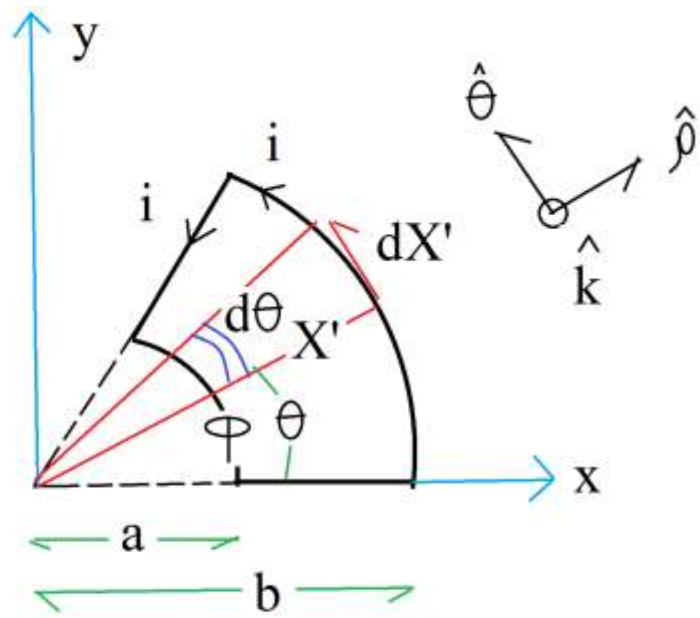
روش دیگر حل این مساله استفاده از قانون آمپر است:

واضح است در خارج سلونوئید هیچ میدانی نداریم، پس برای تعیین B در داخل مسیر مستطیلی C به طول L را چنان تشکیل می دهیم که بخشی از ان داخل و بخشی دیگر در خارج باشد. بدلیل تقارن خطوط میدان می بایست در داخل بصورت موازی و بموازات محور اصلی سولنوئید باشند. با استفاده از قانون آمپر داریم:



$$\oint \vec{B}.d\vec{x} = \mu_\circ I \Rightarrow BL = \mu_\circ nLI \Rightarrow B = \mu_\circ nI$$

مثال: در شکل دو کمان از دایره ای هایی هم مرکز با شعاع های a و b داریم. اگر مداری شامل کمان ها و خطوط شعاعی واصلشان درست شده باشد که حامل جریان i باشد. مطلوبست محاسبه ی میدان مغناطیسی در مرکز دو کمان.



$$d\vec{X}' = b\,d\theta'\,\hat{\theta} \;;\; \vec{X} = 0 \;;\; \vec{X}' = b\,\hat{\rho} \;;\; \left|\vec{X}-\vec{X}'\right| = b$$

$$\vec{B}(\vec{X}) = \frac{\mu_\circ i}{4\pi}\int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X}-\vec{X}')}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3}$$

$$\to \vec{B}(\vec{X}) = \frac{\mu_\circ i}{4\pi}\int_0^{\varphi} \frac{b\,d\theta\,\hat{\theta} \times (0 - b\,\hat{\rho})}{(b)^3}$$

$$\to \vec{B}(\vec{X}) = \frac{\mu_\circ i\, b^2}{4\pi}\int_0^{\varphi} \frac{d\theta(\hat{k})}{(b)^3} = \frac{\mu_\circ i(\hat{k})}{4\pi b}\int_0^{\varphi} d\theta$$

$$\to \vec{B}(\vec{X}) = \frac{\mu_\circ i \varphi(\hat{k})}{4\pi b}$$

بهمین ترتیب برای کمان a داریم:

$$\vec{B}(\vec{X}) = \frac{\mu_\circ i \varphi(-\hat{k})}{4\pi a}$$

اما در بخش های شعاعی چون

$$\left[d\vec{X}' = d\rho\,\hat{\rho} \quad \text{and} \quad (X - \vec{X}') = b\hat{\rho} \;\text{ or }\; -a\hat{\rho}\right] \Rightarrow d\vec{X}' \times (\vec{X}-\vec{X}') = 0 \to \vec{B} = 0$$

فلذا داریم:

$$\vec{B}(\vec{X}=0) = \frac{\mu_\circ i \varphi(\hat{k})}{4\pi}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]$$

نیروی مغناطیسی وارد بر یک سیم حامل جریان از سوی سیم دیگر حامل جریان:

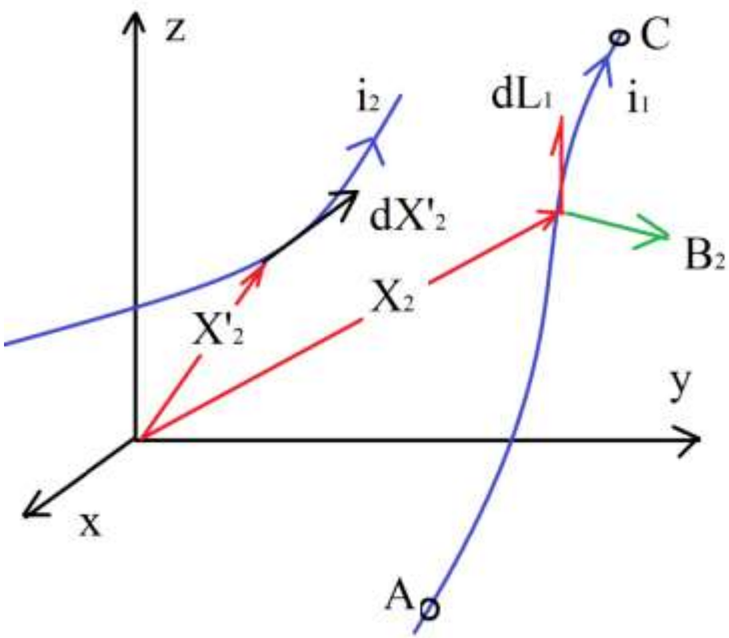
قبلاً دیدیم که نیروی وارد بر یک سیم حامل جریان از طرف میدان مغناطیسی B می شد: $\vec{F}_1 = i_1 \int d\vec{L}_1 \times \vec{B}$

حال اگر این میدان مغناطیسی توسط سیم حامل جریان دومی ایجاد شده باشد می بایست مقدار B حاصل از آن را در مکان سیم اول محاسبه نمود و داریم:

$$\vec{B}_2(\vec{X}) = \frac{\mu_\circ i_2}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}'_2 \times (\vec{X}_2 - \vec{X}'_2)}{|\vec{X}_2 - \vec{X}'_2|^3}$$

پس می توان نوشت:

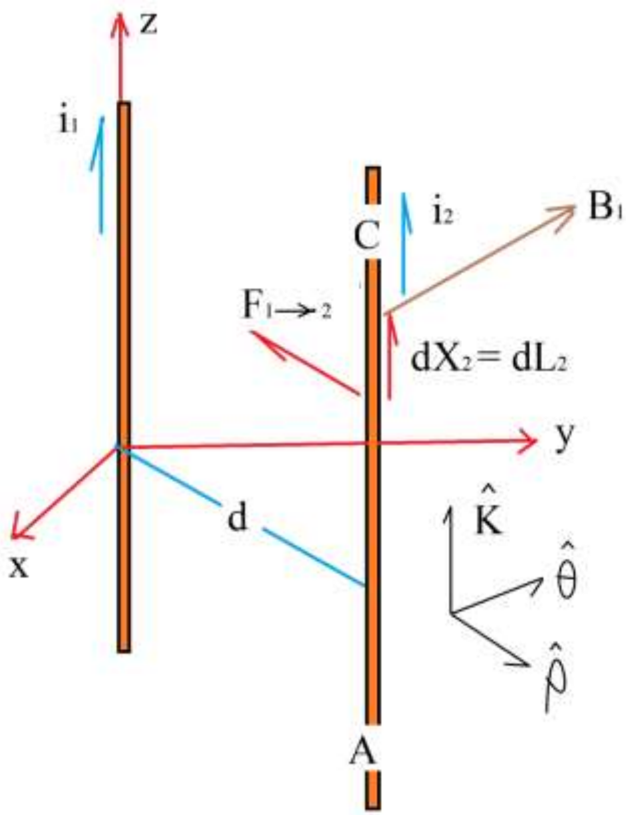
$$\vec{F}_{2\to1} = i_1 \int d\vec{L}_1 \times \vec{B}_2$$



و با قرارد دادن B2 در $\vec{F}_{2\to1}$ داریم:

$$\vec{F}_{2\to1} = i_1 \int_A^C d\vec{L}_1 \times \left(\frac{\mu_\circ i_2}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}'_2 \times (\vec{X}_2 - \vec{X}'_2)}{|\vec{X}_2 - \vec{X}'_2|^3} \right)$$

مثال: دو سیم موازی به فاصله ی d با جریان های i_1 و i_2 که در یک جهت حرکت می کنند داریم. مطلوبست محاسبه ی نیروی وارد بر سیم حامل جریان i_2 از سوی سیم حامل جریان i_1.



قبلاً با استفاده از قانون آمپر مقدار میدان مغناطیسی حاصل از سیم حامل جریان در فاصله ی d از آن بدست آمده که شده است:

$$\vec{B}(r,\theta,z)=\frac{\mu_\circ\, i_1}{2\pi r}\hat{\theta}$$

برای این مساله می شود:

$$\vec{B}(d,\theta,z)=\frac{\mu_\circ\, i_1}{2\pi d}\hat{\theta}$$

و حال F می شود:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}_{1\to 2}=i_2\int d\vec{L}_2\times\vec{B}_1\\ \vec{B}_1(d,\theta,z)=\dfrac{\mu_\circ\, i_1}{2\pi d}\hat{\theta}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{F}_{1\to 2}=i_2\int_{Z_A}^{Z_C} d\vec{L}_2\times\frac{\mu_\circ\, i_1}{2\pi d}\hat{\theta}$$

$$\xrightarrow{d\vec{L}_2=dz\,\hat{k}}\vec{F}_{1\to 2}=\frac{\mu_\circ\, i_1\, i_2}{2\pi d}\int_{Z_A}^{Z_C} dz\ \hat{k}\times\hat{\theta}\Rightarrow$$

$$\vec{F}_{1\to 2}=\frac{\mu_\circ\, i_1\, i_2}{2\pi d}\int_{Z_A}^{Z_C} dz\left(-\hat{\rho}\right)=\frac{\mu_\circ\, i_1\, i_2}{2\pi d}\left(Z_C-Z_A\right)\left(-\hat{\rho}\right)$$

که نشان دهنده ی نیروی جاذبه ی بین دو سیم است.

توجه: چنانچه جهت جریان در یکی از دو سیم برعکس شود نیروی جاذبه بین سیم ها ایجاد می شود.

شار مغناطیسی:

اگر یک آهنربا را به یک حلقه ی بسته از یک سیم رسانا نزدیک نماییم، مشاهده می شود که جریانی در سیم پدیدار می شود. اگر برعکس آهنربا را از حلقه دو نماییم نیز جریان در حلقه ایجاد می شود ولی در جهت خلاف حالت قبل.

بنابراین تغییر شار مغناطیسی حاصل از میدان برداری مغناطیسی و گذرنده از سطح حلقه موجب ایجاد این جریان القایی می گردد.

قانون فاراده:

اگر شار مغناطیسی گذرنده از مسیر تغییر نماید، در دو سوی آن مسیر یک نیروی محرکه ی القایی (emf) ایجاد می شود.

اگر مسیر مورد نظر بسته باشد در آن جریانی موسوم به جریان القایی ایجاد می گردد و اگر دو سر مسیر باز باشد در دو سر آن ولتاژ القایی ایجاد می شود. تغییر شار به ۳ روش امکان پذیر است: ۱- مسیر مورد نظر یا قسمتی از آن متحرک باشد. ۲- میدان مغناطیسی متغییر با زمان باشد. ۳- مسیر متحرک و نیز میدان مغناطیسی متغییر باشند. داریم :

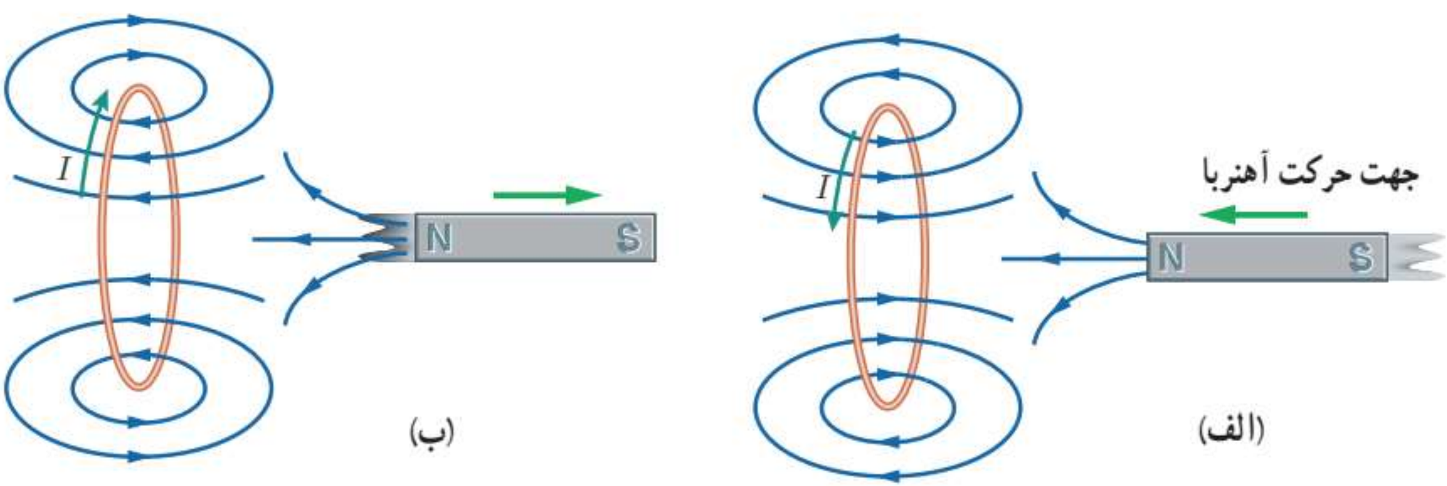
$$\left(\Phi_B = \int \vec{B}(\vec{x},t).d\vec{a}\right)$$

حال فرمولبندی این قانون بصورت زیر است:

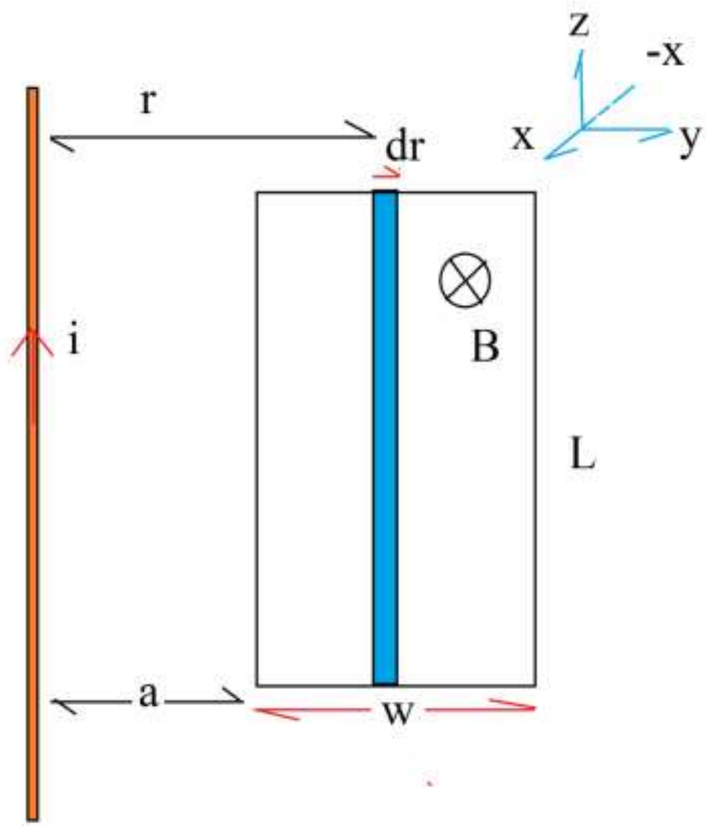
$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int \vec{B}(\vec{x},t).d\vec{a}\right) = \oint \vec{E}.d\vec{x} = \varepsilon$$

قانون لنز:

حال فرض نمایید تغییر شار (به هر دلیل) موجب ایجاد جریان در مسیر بسته شود. این جریان در جهتی جاری می گردد که میدان مغناطیسی حاصل از آن در خلاف جهت میدان مغناطیسی ایجاد کننده باشد. یعنی شاری که میدان ثانویه ایجاد می نماید با شار ایجاد کننده ی جریان مخالفت می نماید. یعنی اگر شار مغناطیسی ایجاد کننده ی جریان القایی رو به افزایش (کاهش) باشد، میدان مغناطیسی ناشی از جریان القایی (و نهایتاً شار حاصل از آن) سعی در کاهش (افزایش) جریان دارد. این بیان، قانون لنز است. جهت جریان القایی و نهایتاً جهت میدان حاصل از آن را می توان با استفاده از قانون لنز و قانون دست راست بدست آورد.



مثال : سیمی مستقیم حامل جریان i در فاصله ی a از قابی رسانا مطابق شکل قرار دارد. مطلوبست محاسبه ی شار مغناطیسی گذرنده از قاب.



B در اطراف سیم مستقیم قبلاً محاسبه شده و مقدار آن در فاصله ی R از سیم (و گذرنده از سطح قاب) عبارت است از :

$$\vec{B}(r)=\frac{\mu_\circ i}{2\pi r}\left(-\hat{i}\right)$$

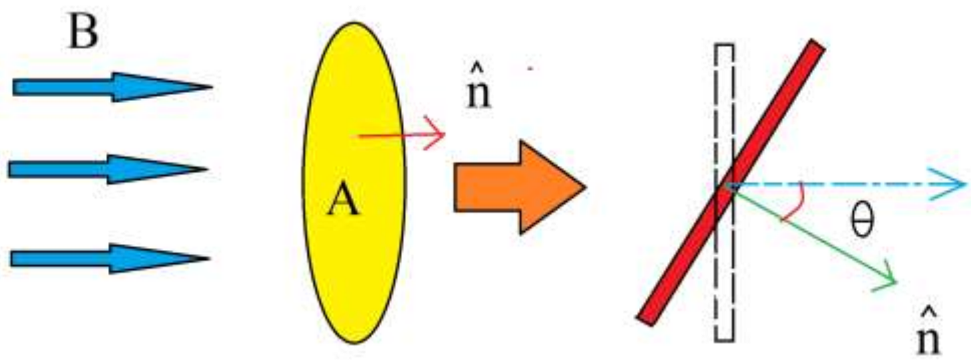
این میدان بر هر چهار سیم قاب عمود است، لذا:

$$d\Phi_B=\vec{B}.d\vec{a}=B.da=\frac{\mu_\circ i}{2\pi r}L\,dr\Rightarrow$$

$$\Phi_B=\oint d\Phi_B=\int_a^{a+w}\frac{\mu_\circ i}{2\pi r}L\,dr\Rightarrow$$

$$\Phi_B=\frac{\mu_\circ i L}{2\pi r}Ln\left(\frac{a+w}{a}\right)$$

مثال : سیم رسانا و دایره ای به شعاع a دارای مقاومت R است. در زمان صفر سطح این حلقه بر میدان مغناطیسی خارجی عمود است. در زمان $t > 0$ انرا با سرعت زاویه ای ω حول یکی از اقطار اصلی اش می چرخانیم. مطلوبست محاسبه ی جریان القایی در حلقه اگر تغییر میدان مغناطیسی با زمان بشکل زیر باشد. $\vec{B}(t) = B_\circ \cos(\omega t)$



$$d\Phi_B = \vec{B}.d\vec{a} = B(t)\ da\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Phi_B = \oint d\Phi_B = B(t)\ A\cos\theta \xrightarrow{\theta=\omega t}$$

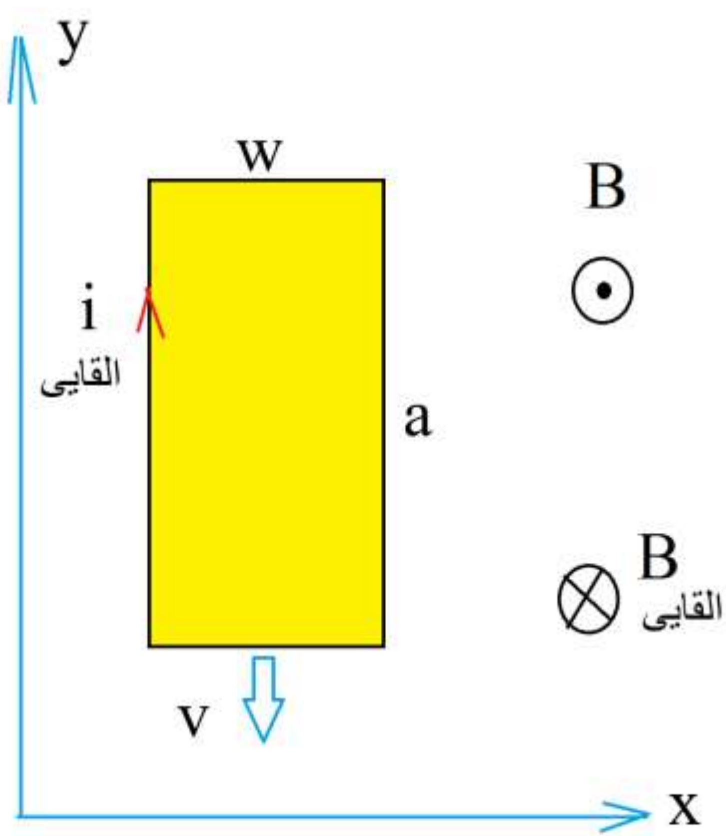
$$\Phi_B = B(t)\ A\cos(\omega t) \xrightarrow{\vec{B}(t)=B_\circ \cos(\omega t)}$$

$$\Phi_B = B_\circ A\cos(\omega t)\cos(\omega t) \Rightarrow$$

$$\Phi_B = B_\circ A\cos^2\omega t \Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = -2B_\circ A\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t) \xrightarrow{\varepsilon=-\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

$$\varepsilon = 2B_\circ A\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t) = \frac{1}{2}B_\circ A\omega\ \sin(2\omega t) \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B_\circ A\omega\ \sin(2\omega t)}{2R}$$

مثال: قاب مستطیل شکلی $(w \times a)$ با سرعت یکنواخت v در یکنواخت که بر سطح قاب همواره عمود است سقوط می کند. اگر مقاومت قاب R باشد جریان القایی در آن چقدر است؟



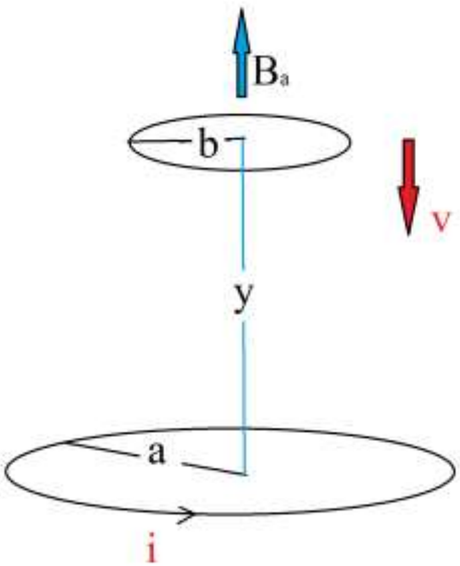
$$\Phi_B = \oint d\Phi_B = \oint \vec{B}.d\vec{a} = B\,A\cos 0 = B\,w\,y$$

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\,w\,\frac{dy}{dt} \xrightarrow{y=vt \to \frac{dy}{dt}=v}$$

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\,w\,v = \varepsilon \Rightarrow$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\,w\,v}{R}$$

مثال: حلقه ای با n دور سیم و شعاع a حامل جریان i_a است. حلقه ی دیگری با شعاع b می افتد و به سمت حلقه ی a با سرعت ثابت حرکت می کند بنحوی که همواره بردار نرمال های دو سطح موازی هستند. مطلوب است محاسبهٔ نیرو محرکهٔ القایی در حلقهٔ به شعاع b. (فاصله دو حلقه L می باشد)



B حلقهٔ اول (a) در مکان حلقهٔ دوم:

$$B_a = \frac{\mu_{\circ} i_a\, n\, a^2}{2(a^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

حال:

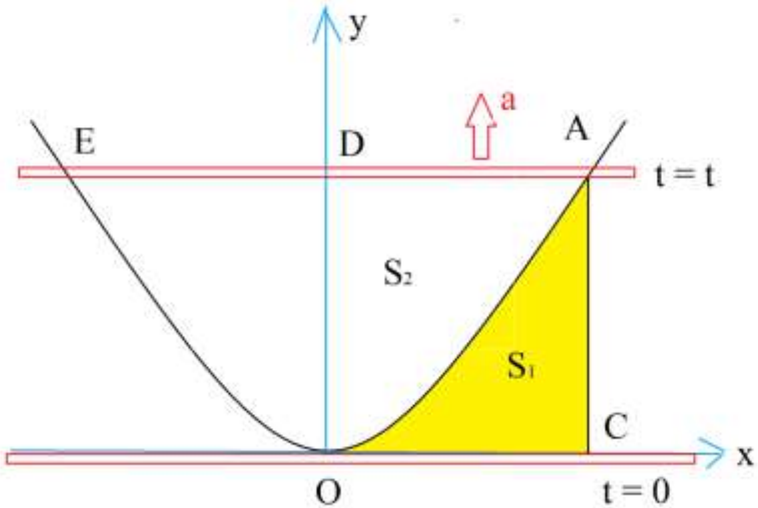
$$\varphi_{a\to b} = \vec{B}_a \cdot \vec{S}_b = B_a\ S_b \Rightarrow$$

$$\varphi_{a\to b} = \frac{\mu_{\circ} i_a\, n\, a^2}{2(a^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}\left(\pi b^2\right) \Rightarrow \varphi_{a\to b} = \frac{\mu_{\circ}\pi i_a\, n\, a^2 b^2}{2(a^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_{\circ}\pi i_a\, n\, a^2 b^2}{2(a^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}\right) \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\left(-\frac{3}{2}\frac{\mu_{\circ}\pi i_a\, n\, a^2 b^2 (2y)}{2(a^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\xrightarrow{y=y_{\circ}-vt \Rightarrow \frac{dy}{dt}=-v} \varepsilon = \left(\frac{3\mu_{\circ}\pi i_a\, n\, a^2 b^2 (2y)}{4(a^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{3\mu_{\circ}\pi i_a\, n\, a^2 b^2 (2y)}{4(a^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}(-v)\right)$$

مثال: مطابق شکل سیمی سهمی شکل با معادلهٔ $y=kx^2$ داریم. میله ای از رأس سهمی با شتاب ثابت (a) به سمت بالا حرکت می کند اگر مجموعهٔ فوق در میدان یکنواخت خارجی که عمود بر سطح سهمی است قرار داشته باشد مطلوبست محاسبهٔ نیرو محرکهٔ القایی در مجموعه.



برای حل می بایست ابتدا مساحت بین سهمی و میله را بدست آورد.

$$\begin{cases} S_1 = \int_0^{x_A} y\,dx = \int_0^{x_A} k\,x^2\,dx = \dfrac{k\ x_A^{\ 3}}{3} \\ S_{OCAD} = x_A\ \ y_A \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\Rightarrow x_A = \sqrt{\frac{y_A}{k}}]{y_A = kx_A^{\ 2}} \begin{cases} S_1 = \dfrac{k\ \dfrac{y_A}{k}\sqrt{\dfrac{y_A}{k}}}{3} = \dfrac{y_A}{3}\sqrt{\dfrac{y_A}{k}} \\ S_{OCAD} = \sqrt{\dfrac{y_A}{k}}\ \ y_A \end{cases}$$

$$S_2 = S_{OCAD} - S_1 = \sqrt{\frac{y_A}{k}}\ \ y_A - \frac{y_A}{3}\sqrt{\frac{y_A}{k}} = \frac{2y_A}{3}\sqrt{\frac{y_A}{k}} \Rightarrow$$

$$S_{OAEO} = 2S_2 = \frac{4y_A}{3}\sqrt{\frac{y_A}{k}} = \frac{4\left(y_A\right)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{k}}$$

میله با شتاب ثابت بسمت بالا حرکت می نماید، پس داریم:

$$y_A = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y_A}{a}}$$

حال داریم:

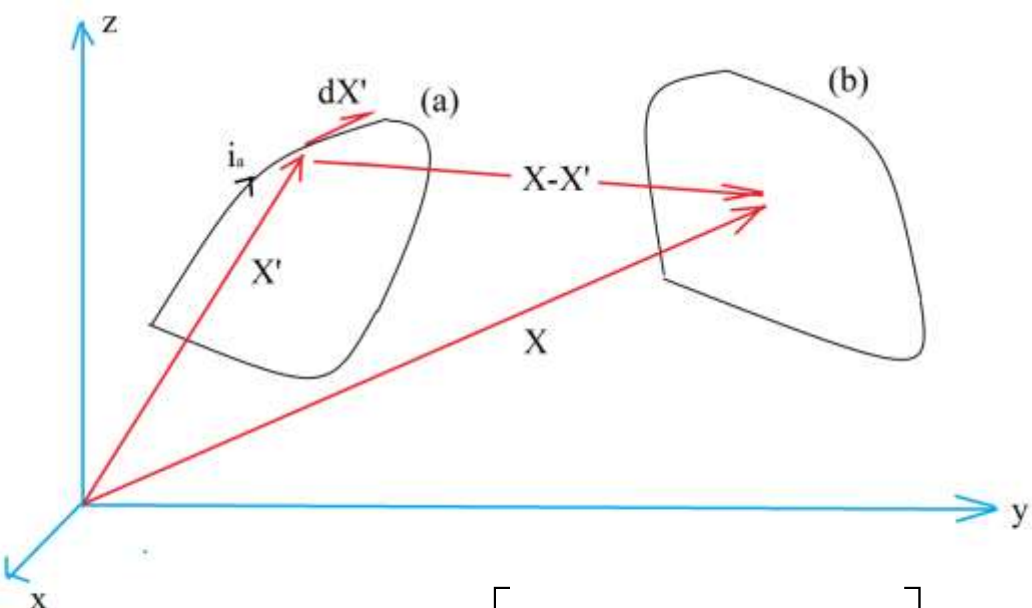
$$\Phi_B = \oint d\Phi_B = \oint \vec{B}.d\vec{a} = B S_{OAEO} \Rightarrow \Phi_B = B\frac{4\left(y_A\right)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{k}} \xrightarrow{y_A = \frac{1}{2}at^2} \Phi_B = \frac{4B\left(\frac{1}{2}at^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{k}} \Rightarrow$$

$$\Phi_B = \frac{4B\left(\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} t^3}{3\sqrt{k}} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\frac{4B\left(\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} t^3}{3\sqrt{k}}\right] = \frac{4B\left(\frac{1}{2}a\right)^{\frac{3}{2}} 3t^2}{3\sqrt{k}}$$

$$\xrightarrow{t=\sqrt{\frac{2y_A}{a}}} \varepsilon = \frac{4B\left(\frac{1}{2}a\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{2y_A}{a}\right)}{\sqrt{k}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{4B\,y_A}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{2}a\right)^{\frac{1}{2}}$$

القائیدگی – القاء متقابل – خودالقاء

فرض کنید مطابق شکل دو حلقه در فضا داریم که حلقه‌ی (a) دارای جریان i_a است. میدان مغناطیسی حاصل از حلقه ی a در مکان حلقه ی b توسط قانون بیوساوار محاسبه می شود و جواب خواهد شد:



$$\vec{B}_a = \frac{\mu_\circ i_a}{4\pi}\int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X}-\vec{X}')}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3}$$

این میدان در حلقه ی b شار مغناطیسی ایجاد می نماید و مقدارش عبارت است از:

$$\varphi_{ab} = \int \vec{B}_a . d\vec{S}_b \Rightarrow \varphi_{ab} = \int \left[\frac{\mu_\circ i_a}{4\pi}\int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X}-\vec{X}')}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3}\right] . d\vec{S}_b \Rightarrow \varphi_{ab} = i_a \underbrace{\int \left[\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X}-\vec{X}')}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3}\right] . d\vec{S}_b}_{=M_{ab}}$$

که در آن M_{ab} ضریب القای متقابل (اندوکتانس متقابل) بین a و b می باشد.

بنابر این داریم:
$$\boxed{\varphi_{ab} = M_{ab} i_a \quad \text{or} \quad d\varphi_{ab} = M_{ab}\, d i_a}$$

اگر بر عکس حساب می شد، یعنی حلقه ی b جریان i_b داشت و می خواستیم شار ناشی از آن را در مکان حلقه ی a حساب نماییم ، داشتیم:

$$\varphi_{ba} = \int \vec{B}_b . d\vec{S}_a \Rightarrow \varphi_{ba} = \int \left[\frac{\mu_\circ i_b}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{\left|\vec{X} - \vec{X}'\right|^3} \right] . d\vec{S}_a \Rightarrow$$

$$\varphi_{ba} = i_b \underbrace{\int \left[\frac{\mu_\circ}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{\left|\vec{X} - \vec{X}'\right|^3} \right] . d\vec{S}_a}_{= M_{ba}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{ba} = M_{ba}\, i_b \quad \text{or} \quad d\,\varphi_{ba} = M_{ba}\, d i_b}$$

که در آن M_{ba} ضریب القای متقابل (اندوکتانس متقابل) بین b و a می باشد.

همواره داریم:

$$M_{ab} = M_{ba} = M$$

ضریب خود القا:

فرض نمایید حلقه ای با جریان i_a داریم، بردارهای میدان مغناطیسی حاصل از حلقه مجدداً به خود حلقه باز می گردد بنابراین میدان مغناطیسی حاصل از حلقه در مکان خودش می شود:

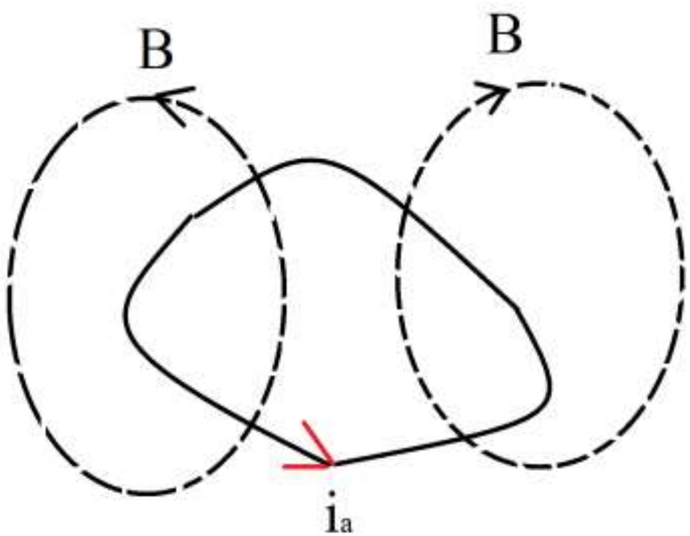
$$\vec{B}_a=\frac{\mu_\circ i_a}{4\pi}\int\frac{d\vec{X}'\times(\vec{X}-\vec{X}')}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3}$$

حال شار ناشی از میدان مغناطیسی حلقه و عبوری از سطح خود حلقه می شود:

$$\varphi_{aa}=\int\vec{B}_a.d\vec{S}_a\Rightarrow$$

$$\varphi_{aa}=\int\left[\frac{\mu_\circ i_a}{4\pi}\int\frac{d\vec{X}'\times(\vec{X}-\vec{X}')}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3}\right].d\vec{S}_a\Rightarrow$$

$$\varphi_{aa}=i_a\underbrace{\left[\int\left[\frac{\mu_\circ}{4\pi}\int\frac{d\vec{X}'\times(\vec{X}-\vec{X}')}{\left|\vec{X}-\vec{X}'\right|^3}\right].ds_a\right]}_{=L_a}\Rightarrow$$



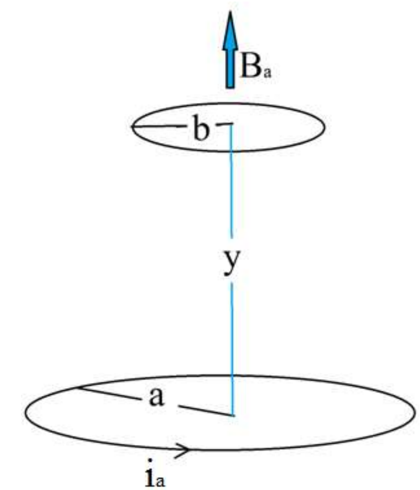
$$\boxed{\varphi_{aa}=L_a i_a\qquad \text{or}\qquad d\varphi_{aa}=L_a\,di_a}$$

که در آن L_a را ضریب خود القای (اندوکتانس خودی) حلقه ی a می نامند.

مثال : حلقه ی به شعاع a دارای n_a دور سیم پیچ حامل جریان i_a است. این حلقه بطور افقی روی سطح زمین قرار دارد. حلقه ای دیگر با شعاع b $(b < a)$ دارای n_b دور سیم پیچ است و در فاصله ی L از سطح حلقه ی a قرار دارد، بنحوی که سطوح دو حلقه موازی اند. مطلوبست محاسبه ی ضریب القای متقابل بین دو حلقه و ضریب خود القای حلقه ی a.

قبلاً محاسبه شده که میدان حاصل از حلقه ی به شعاع a در فاصله ی L از مرکزش می شود:

$$B_a = \frac{\mu_\circ i_a a^2}{2(a^2+L^2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{\text{with } n_a} B_a = \frac{\mu_\circ i_a\, n_a\, a^2}{2(a^2+L^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (*)$$



حال داریم:

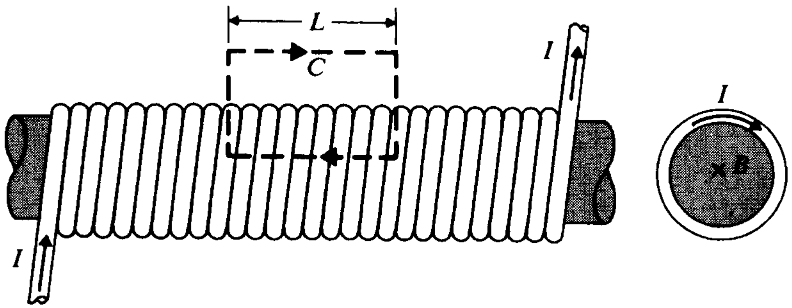
$$\Phi_{ab} = \vec{B}_a.\vec{S}_b = B_a S_b \xrightarrow{(*)} \Phi_{ab} = \frac{\mu_\circ i_a\, n_a\, a^2}{2(a^2+L^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\pi n_b\, b^2\right) \xrightarrow{\Phi_{ab} = M_{ab}\, i_a}$$

$$M_{ab} = \frac{\mu_\circ\, \pi n_a\, n_b\, a^2\, b^2}{2(a^2+L^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{and}$$

$$\Phi_{aa} = \vec{B}_a.\vec{S}_a = B_a S_a \longrightarrow \left(B_a = \frac{\mu_\circ i_a\, n_a\, a^2}{2(a^2+L^2)^{\frac{2}{3}}} \xrightarrow{\text{if } L=0} B_a = \frac{\mu_\circ i_a\, n_a\, a^2}{2(a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_\circ i_a\, n_a}{2a} \right) \rightarrow$$

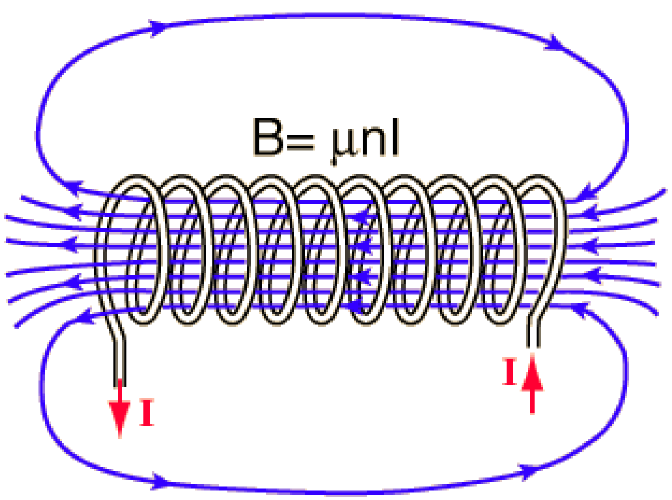
$$\Phi_{aa} = \frac{\mu_\circ i_a\, n_a}{2a}\left(\pi n_a\, a^2\right) \xrightarrow{\Phi_{aa} = L_a\, i_a} L_a = \frac{\mu_\circ \pi i_a\, n_a{}^2 a}{2}$$

مثال: سیم لوله‌ای (سلفی) به طول L_1 ، دارای N_1 دور سیم در طول سیم لوله حاوی جریان I است. شعاع سطح مقطع سیم لوله r_1 می‌باشد. مطلوبست محاسبه‌ی (الف) ضریب خودالقا ی سیم لوله. (ب) اگر سیم لوله‌ای دیگر با شعاع سطح مقطع r_2 ($r_2 < r_1$) و تعداد N_2 دور در طول L_2، در داخل این سلف قرار گیرد ننحوی که دو سلف هم محور باشند مطلوبست محاسبه ی ضریب القاء متقابل دو سلف چقدر است؟



(الف) داشتیم:

$$B_1 = \mu_\circ n_a I = \mu_\circ \frac{N_1}{L_1} I$$



$$\Phi_{11} = \vec{B}_1 . \vec{S}_1 = B_1 S_1 \xrightarrow{B_1 = \mu_\circ n_a I = \mu_\circ \frac{N_1}{L_1} I}$$

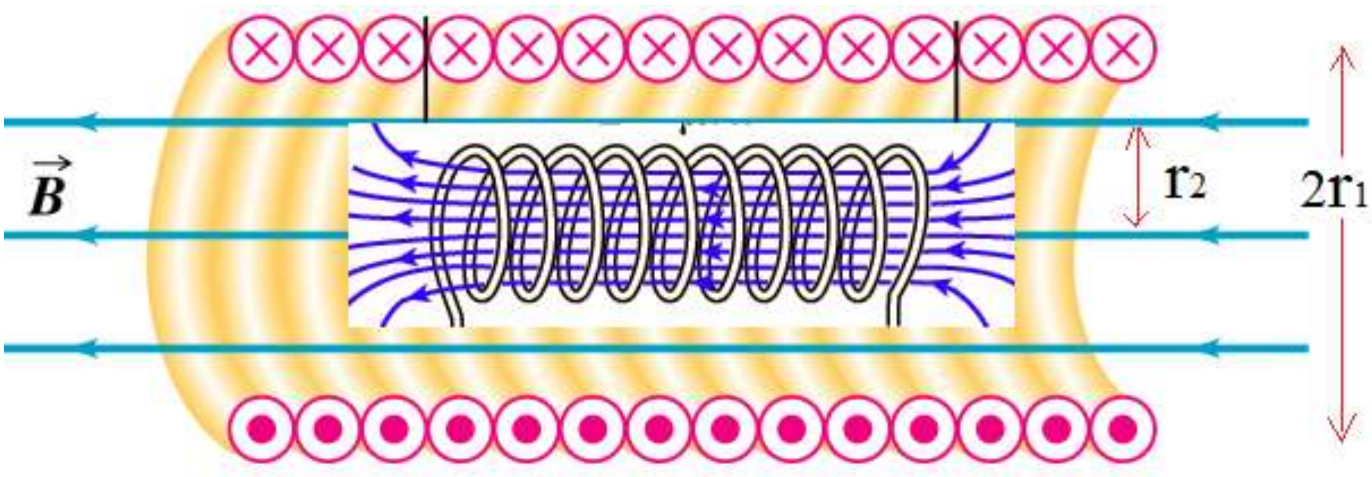
$$\Phi_{11} = \mu_\circ \frac{N_1}{L_1} I \left[\left(\pi r_1^2 \right) N_1 \right] = \frac{\mu_\circ \pi r_1^2 N_1^2}{L_1} I$$

$$\xrightarrow{\Phi_{11} = L_1 I} L_1 = \frac{\mu_\circ \pi r_1^2 N_1^2}{L_1}$$

(ب) داریم:

$$B_1 = \mu_\circ n_a I = \mu_\circ \frac{N_1}{L_1} I$$

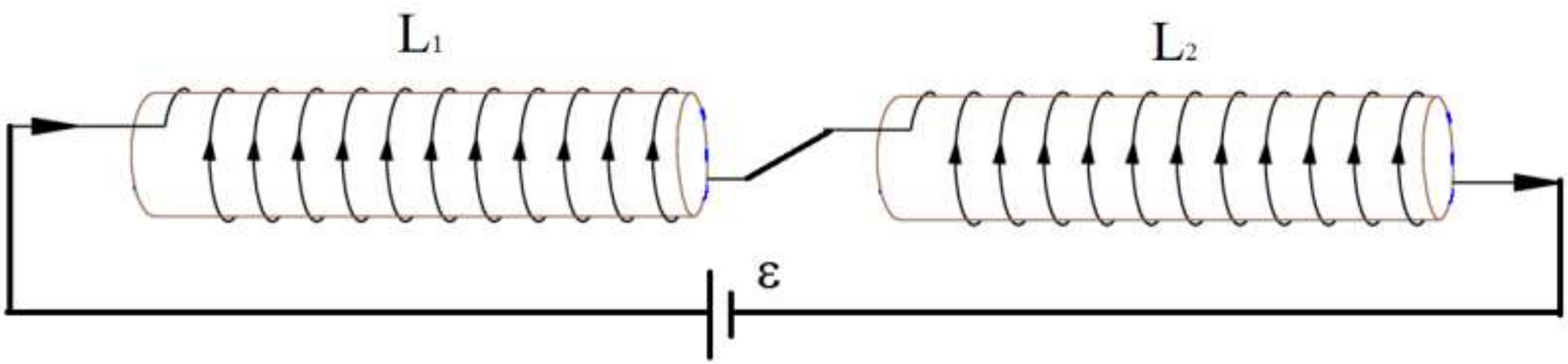
حال اگر این B از سلونوئید دوم عبور نماید داریم:



$$\Phi_{12} = \vec{B}_1 . \vec{S}_2 = B_1 S_2 \xrightarrow{B_1 = \mu_\circ n_a I = \mu_\circ \frac{N_1}{L_1} I} \Phi_{12} = \mu_\circ \frac{N_1}{L_1} I \left[\left(\pi r_2^2 \right) N_2 \right] = \frac{\mu_\circ \pi r_2^2 N_1 N_2}{L_1} I$$

$$\xrightarrow{\Phi_{12} = M_{12} I} M_{12} = \frac{\mu_\circ \pi r_2^2 N_1 N_2}{L_1}$$

مثال: در شکل زیر مطلوبست محاسبه ی ضریب خودالقای (اندوکتانس خودی) سلف هم ارز.



$$\Phi_{11}=L_1 i_1 \xrightarrow{(\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt})} \varepsilon_1=-L_1\frac{di_1}{dt} \quad \text{and} \quad \Phi_{12}=M_{12}\, i_1 \xrightarrow{(\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt})} \varepsilon_{12}=-M_{12}\frac{di_1}{dt}$$

$$\varepsilon_{11}=-L_1\frac{di_1}{dt} \quad ; \quad \varepsilon_{22}=-L_2\frac{di_2}{dt} \quad ; \quad \varepsilon_{12}=-M_{12}\frac{di_1}{dt} \quad ; \quad \varepsilon_{21}=-M_{21}\frac{di_2}{dt}$$

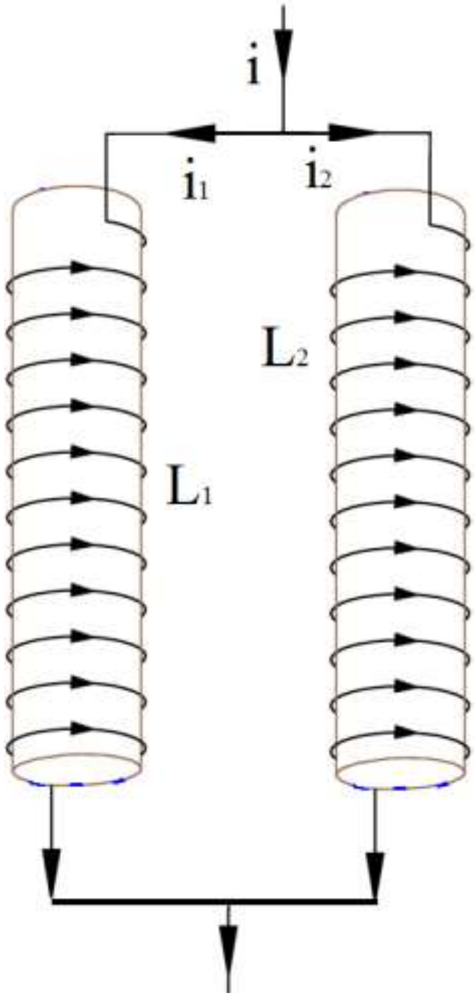
$$\begin{bmatrix} \left\{\begin{matrix} i_1=i_2=i \Rightarrow \\ \frac{di_1}{dt}=\frac{di_2}{dt}=\frac{di}{dt} \end{matrix}\right\} \\ \varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2 \quad \text{and} \quad M_{12}=M_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{total}=-L_1\frac{di_1}{dt}-L_2\frac{di_2}{dt}-M\frac{di_1}{dt}-M\frac{di_2}{dt} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{total}=\left(-L_1-L_2-2M\right)\frac{di}{dt} \xrightarrow{\varepsilon_{total}=\left(-L_{total}\right)\frac{di}{dt}} L_{total}=L_1+L_2+2M$$

توجه: در صورتی که جریان ها هم سو نبودند داشتیم:

$$L_{total}=L_1+L_2-2M$$

مثال: در شکل زیر مطلوبست محاسبه ی ضریب خودالقای (اندوکتانس خودی) سلف هم ارز.



$$\begin{cases}\varepsilon_1=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{21}=-L_1\dfrac{di_1}{dt}-M_{21}\dfrac{di_2}{dt}\\[2ex] \varepsilon_2=\varepsilon_{22}+\varepsilon_{12}=-L_2\dfrac{di_2}{dt}-M_{21}\dfrac{di_1}{dt}\end{cases}\xrightarrow[M_{21}=M_{21}=M]{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon}$$

$$\underbrace{\begin{cases}-\varepsilon=L_1\dfrac{di_1}{dt}+M\dfrac{di_2}{dt} & (1)\\[2ex] -\varepsilon=L_2\dfrac{di_2}{dt}+M\dfrac{di_1}{dt} & (2)\end{cases}\times\begin{cases}-M\\[2ex] L_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M\varepsilon=-ML_1\dfrac{di_1}{dt}-M^2\dfrac{di_2}{dt}\\[2ex] -L_1\varepsilon=L_1L_2\dfrac{di_2}{dt}+L_1M\dfrac{di_1}{dt}\end{cases}}_{\overset{+}{\Downarrow}}$$

$$\Rightarrow M\varepsilon-L_1\varepsilon=L_1L_2\frac{di_2}{dt}-M^2\frac{di_2}{dt}\Rightarrow\frac{di_2}{dt}=\frac{\varepsilon\left(M-L_1\right)}{\left(L_1L_2-M^2\right)}\quad(*)$$

با قرار دادن (*) در (۱) داریم:

$$\begin{cases} -\varepsilon = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \quad (1) \\ \dfrac{di_2}{dt} = \quad (*) \end{cases} \Rightarrow -\varepsilon = L_1 \frac{di_1}{dt} + M\left[\frac{\varepsilon\left(M - L_1\right)}{\left(L_1 L_2 - M^2\right)}\right] \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{\varepsilon\left(M - L_2\right)}{\left(L_1 L_2 - M^2\right)} \quad (**)$$

اما در مدار موازی داریم:

$$\left\{ i = i_1 + i_2 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right\}$$

حال با قرار دادن روابط (*) و (**) در رابطه ی اخیر داریم:

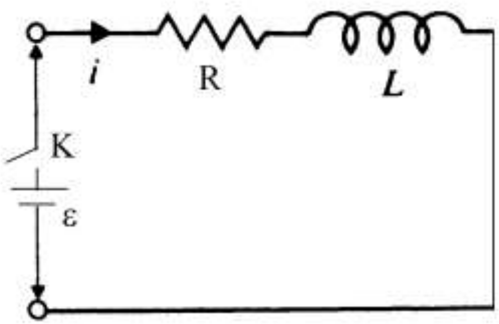
$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon\left(M - L_2\right)}{\left(L_1 L_2 - M^2\right)} + \frac{\varepsilon\left(M - L_1\right)}{\left(L_1 L_2 - M^2\right)} \Rightarrow \varepsilon_{total} = -\frac{\left(L_1 L_2 - M^2\right)}{\left(L_1 + L_2 - 2M\right)} \frac{di}{dt} \xrightarrow{\varepsilon_{total} = \left(-L_{total}\right)\frac{di}{dt}}$$

$$L_{total} = \frac{\left(L_1 L_2 - M^2\right)}{\left(L_1 + L_2 - 2M\right)}$$

توجه: اگر جهت دو جریان خلاف یکدیگر باشد داریم:

$$L_{total} = \frac{\left(L_1 L_2 - M^2\right)}{\left(L_1 + L_2 + 2M\right)}$$

مثال: در شکل زیر اگر کلید k بسته شود مطلوبست محاسبه‌ی جریان مدار برحسب زمان و نیز محاسبه نیرو محرکه‌ی القایی در سلف.



KVL برای مدار نوشته شود:

$$\varepsilon - iR - L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \varepsilon - iR = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{L} - \frac{R}{L}i = \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{-R}{L}(i - \frac{\varepsilon}{R}) = \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{i - \frac{\varepsilon}{R}} = \frac{-R}{L}dt \Rightarrow$$

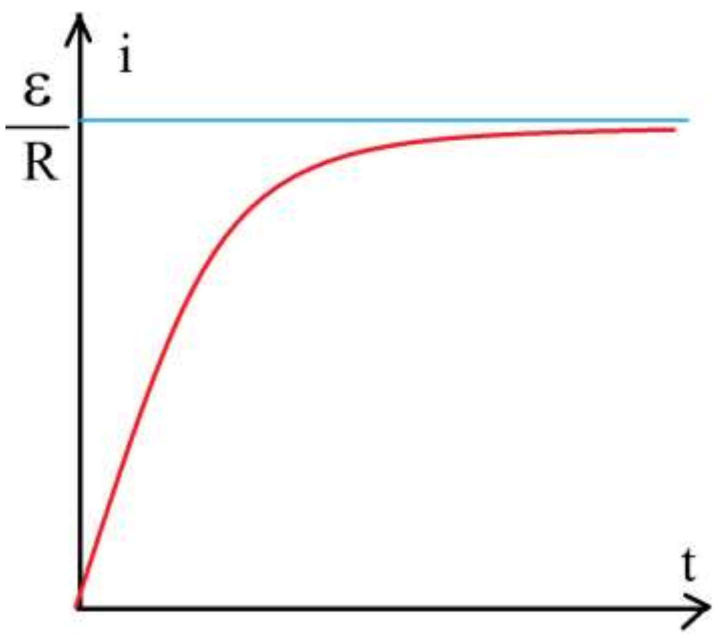
$$\int_{i_\circ}^{i} \frac{di}{i - \frac{\varepsilon}{R}} = \int_{t_\circ}^{t} \frac{-R}{L}dt \Rightarrow Ln\left(i - \frac{\varepsilon}{R}\right) = \frac{-R}{L}t + k_\circ \xrightarrow{\text{in } t=0 \rightarrow i=0} Ln\left(-\frac{\varepsilon}{R}\right) = k_\circ \Rightarrow$$

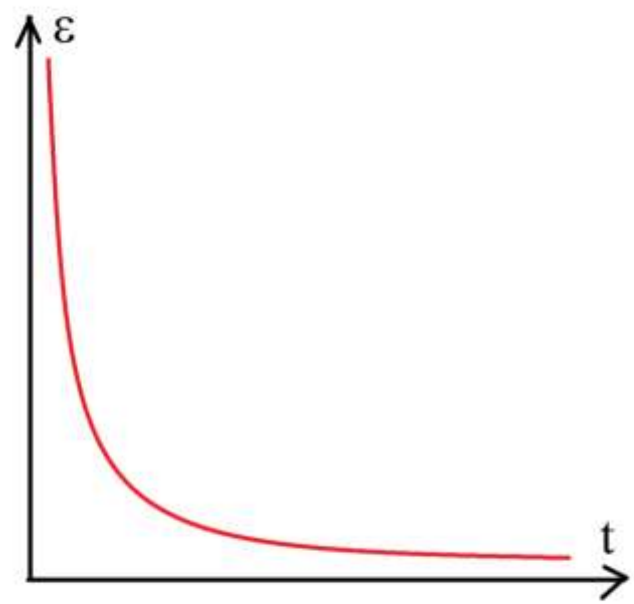
$$Ln\left(i - \frac{\varepsilon}{R}\right) = \frac{-R}{L}t + Ln\left(\frac{-\varepsilon}{R}\right) \Rightarrow Ln\left(i - \frac{\varepsilon}{R}\right) - Ln\left(\frac{-\varepsilon}{R}\right) = -\frac{R}{L}t \rightarrow Ln\left[\frac{i - \frac{\varepsilon}{R}}{\frac{-\varepsilon}{R}}\right] = -\frac{R}{L}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ln}\left(\frac{i}{\frac{-\varepsilon}{R}}+1\right)=\frac{-R}{L}t \Rightarrow \frac{i}{-\frac{\varepsilon}{R}}+1=e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow \boxed{i=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})}$$

برای نیرو محرکه القایی داریم:

$$\varepsilon=-L\frac{di}{dt} \Rightarrow \varepsilon=-L\frac{d}{dt}\left[\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)\right] \Rightarrow \varepsilon=\left|-L\times\frac{\varepsilon}{R}\times\frac{-R}{L}\left[-e^{-\frac{R}{L}t}\right]\right| \rightarrow \varepsilon=\varepsilon e^{-\frac{R}{L}t}$$

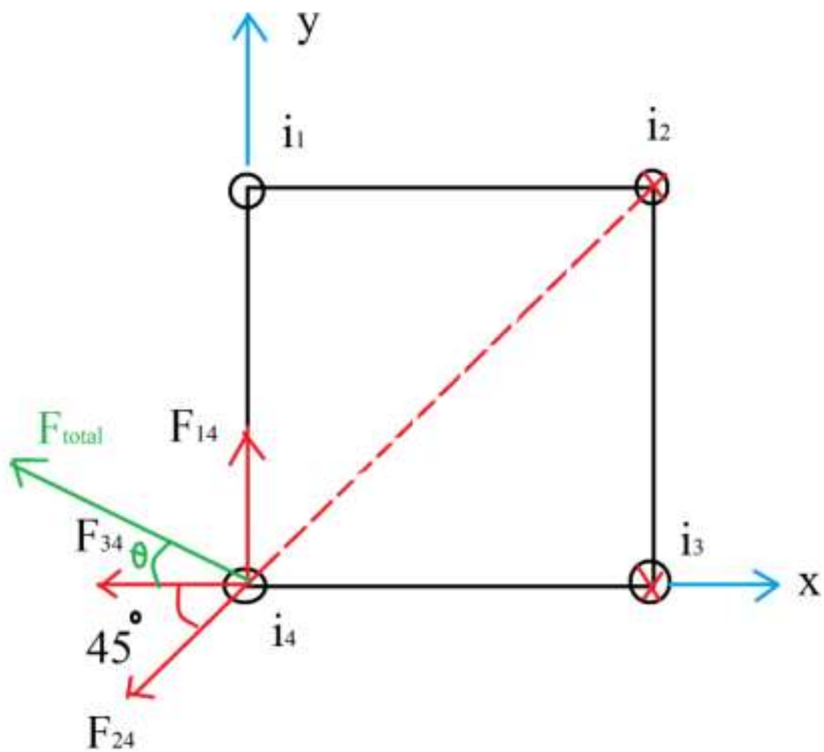




مسائل تکمیلی

مثال: در شکل زیر ٤ رشته سیم واقع بر چهار راس مربعی به ضلع a حامل جریانهای i_1 الی i_4 می باشند. مطلوبست محاسبه ی مقدار و جهت نیروی وارد بر سیم چهارم از طرف ۳ سیم دیگر.

قبلاً محاسبه شده برای دو سیم با جهات جریان هم سو نیرو جاذبه و برای غیر هم سو نیرو دافعه می باشد. پس داریم:



$$\vec{F}_{1\to4} = \frac{\mu_\circ\, i_1\, i_4}{2\pi a} L_4 \left(\hat{j}\right)$$

$$\vec{F}_{3\to4} = \frac{\mu_\circ\, i_3\, i_4}{2\pi a} L_4 \left(-\hat{i}\right)$$

$$\vec{F}_{2\to4} = \frac{\mu_\circ\, i_2\, i_4}{2\pi a} L_4 \left(\cos 45^\circ \left(-\hat{i}\right) + \sin 45^\circ \left(-\hat{j}\right)\right)$$

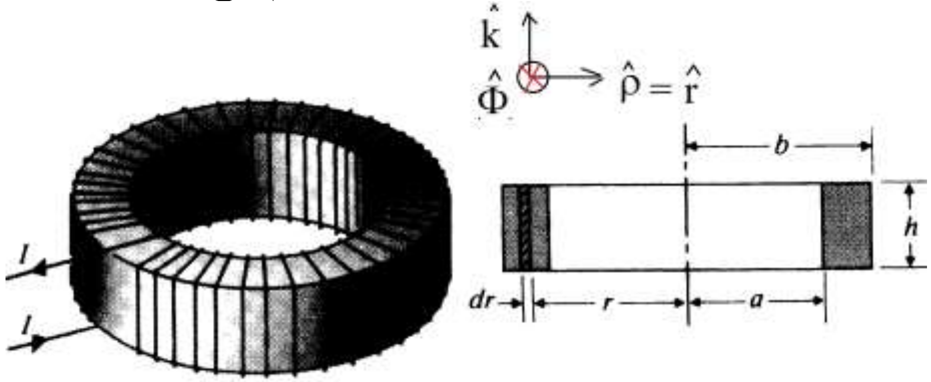
$$\left.\begin{aligned}\left[\vec{F}_4\right]_x &= \frac{\mu_\circ i_3 i_4}{2\pi a} L_4\left(-\hat{i}\right) + \frac{\mu_\circ i_2 i_4}{2\pi a} L_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\hat{i}\right)\right) = \frac{\mu_\circ i_4}{2\pi a} L_4\left[i_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} i_2\right]\left(-\hat{i}\right)\\ \left[\vec{F}_4\right]_y &= \frac{\mu_\circ i_1 i_4}{2\pi a} L_4\left(\hat{j}\right) + \frac{\mu_\circ i_2 i_4}{2\pi a} L_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\hat{j}\right)\right) = \frac{\mu_\circ i_4}{2\pi a} L_4\left[i_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} i_2\right]\left(\hat{j}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left|\vec{F}_4\right| = \sqrt{\left(\frac{\mu_\circ i_4}{2\pi a} L_4\left[i_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} i_2\right]\right)^2 + \left(\frac{\mu_\circ i_4}{2\pi a} L_4\left[i_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} i_2\right]\right)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{In equal i}} \left.\begin{aligned}\left[\vec{F}_4\right]_x &= \frac{\mu_\circ i^2}{2\pi a} L_4\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\left(-\hat{i}\right)\\ \left[\vec{F}_4\right]_y &= \frac{\mu_\circ i^2}{2\pi a} L_4\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\left(\hat{j}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\left[\vec{F}_4\right]_x &= \frac{\mu_\circ i^2}{2\pi a} L_4\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]\left(-\hat{i}\right)\\ \left[\vec{F}_4\right]_y &= \frac{\mu_\circ i^2}{2\pi a} L_4\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]\left(\hat{j}\right)\end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\left|\vec{F}_4\right| = \frac{\mu_\circ i^2}{2\pi a} L_4 \sqrt{\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]^2 + \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]^2} = \frac{\sqrt{3}\,\mu_\circ i^2}{2\pi a} L_4 \quad , \quad \tan\theta = \frac{\dfrac{\mu_\circ i^2}{2\pi a} L_4\left[\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right]}{\dfrac{\mu_\circ i^2}{2\pi a} L_4\left[\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right]} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

مثال: فرض کنید N دور سیم بطور فشرده روی یک قاب چنبره ای با مقطع عرضی مستطیلی پیچیده شده باشد. فرض کنید نفوذ پذیری مغناطیسی محیط μ_0 است. مطلوبست محاسبه ی اندوکتانس خودی سیم پیچ چنبره.



Assuming a current I in the conducting wire, we find, by applying Eq. (6–10) to a circular path with radius r $(a < r < b)$:

$$\boxed{\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I. \quad (6\text{–}10)}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\phi B_\phi,$$

$$d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{a}_\phi r d\phi,$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi} B_\phi r\, d\phi = 2\pi r B_\phi.$$

This result is obtained because both B_ϕ and r are constant around the circular path C.

Since the path encircles a total current NI, we have $2\pi r B_\phi = \mu_0 NI$

and $$B_\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

Next we find

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left(\mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \right) \cdot (\mathbf{a}_\phi h \, dr)$$

$$= \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

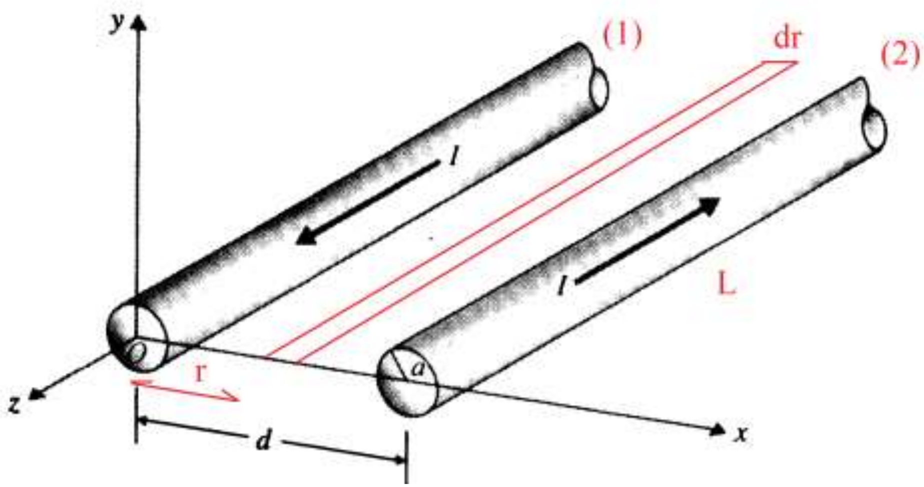
The flux linkage Λ is $N\Phi$ or

$$\Lambda = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Finally, we obtain

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \qquad \text{(H)}. \tag{6–132}$$

مثال: یک خط انتقال شامل دو سیم مسی موازی و بلند به قطر 2R حامل جریان های i در جهات مختلف اند. (الف) با فرض آنکه فاصله ی بین محورهای مرکزی آنها d باشد، شار مغناطیسی بازای هر متر سیم را که در فضای بین دو محور سیم ها وجود دارد محاسبه نمایید. (ب) اندوکتانس های داخلی و خارجی در واحد طول را محاسبه نمایید. (ج) چه کسری از این شار در داخل سیم ها قرار دارد. (د) اگر جریان ها هم سو باشند نتایج چه می شود.



(الف): بنا بر قانون آمپر میدان حاصل از سیم (۱) در فضای بین دو سیم تا محور سیم (۲) می شود:

$$B_1 = \frac{\mu_\circ i}{2\pi r}$$

حال شار این میدان که از عنصر سطح dr می گذرد عبارت است از:

$$d\Phi_1 = B_1\, dA = \frac{\mu_\circ i}{2\pi r} L\, dr = \frac{\mu_\circ L i}{2\pi}\frac{dr}{r} \Rightarrow \Phi_1 = \int d\Phi_1 = \frac{\mu_\circ L i}{2\pi}\left[\int_a^{d-a}\frac{dr}{r} + \int_{d-a}^{d}\frac{dr}{r}\right] \Rightarrow$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_\circ L i}{2\pi}\left[\left(Ln\frac{d-a}{a}\right) - \left(Ln\frac{d}{d-a}\right)\right]$$

میدان سیم (۲) و جهت آن همجهت با میدان سیم (۱) و بسمت داخل صفحه است بنابراین شار کل می شود:

$$\Phi_{total} = 2\Phi_1 = \frac{\mu_\circ L i}{\pi}\left[\left(Ln\frac{d-a}{a}\right)+\left(Ln\frac{d}{d-a}\right)\right] \qquad (I)$$

جمله ی اول شار عبوری در بین سطوح خارجی دو سیم است و جمله ی دوم مربوط به شار میدان یک سیم است که از درون سیم دیگر می گذرد. حال می بایست شار هر سیم را که از درون خودش می گذرد حساب نمود. برای میدان هر سیم در درون خودش (که قبلاً با قانون آمپر بدست آمده) داریم:

$$B_1^* = \frac{\mu_\circ L i}{2\pi a^2} r' \quad ; \quad r'\langle a$$

حال شار خود القایی می شود:

$$d\Phi_1^* = B_1^* dA = \frac{\mu_\circ i L}{2\pi a^2} r' dr' = \frac{\mu_\circ L i}{2\pi a^2} r' dr' \Rightarrow \Phi_1^* = \int d\Phi_1^* = \frac{\mu_\circ L i}{2\pi a^2}\left[\int_0^a r' dr'\right] \Rightarrow$$

$$\Phi_1^* = \frac{\mu_\circ L i}{2\pi a^2}\left[\frac{a^2}{2}\right] = \frac{\mu_\circ L i}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{two\ wire}^* = 2\Phi_1^* = \frac{\mu_\circ L i}{2\pi} \qquad (II)$$

روابط (I) و (II) برای طول کل سیم ها است . برای شار در واحد طول داریم:

$$\left.\begin{array}{l} (I): \dfrac{\Phi_{total}}{L} = \dfrac{\mu_\circ i}{\pi}\left[\left(Ln\dfrac{d-a}{a}\right)+\left(Ln\dfrac{d}{d-a}\right)\right] \\ (II): \dfrac{\Phi_{two\ wire}^*}{L} = \dfrac{\mu_\circ i}{2\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Phi_{total}^*}{L} = \frac{\Phi_{total}}{L} + \frac{\Phi_{two\ wire}^*}{L} = \frac{\mu_\circ i}{\pi}\left[\frac{1}{2} + Ln\frac{d}{a}\right] \qquad (III)$$

(ب): با استفاده از (I) و (II) برای اندوکتانس خودی دو سیم داریم:

(در محاسبه ی اندوکتانس خودی کل داخل سیم ها می بایست اثر سیم دیگر نیز محاسبه شود)

$$\xrightarrow[\text{(I)}]{\text{(II)}} : \Phi^*_{\text{total two wire}} = 2\underbrace{\left(\frac{\mu_\circ L i}{4\pi} + \frac{\mu_\circ L i}{2\pi}\left(\operatorname{Ln}\frac{d}{d-a}\right)\right)}_{=\Phi^*_{\text{total one wire}}} \xrightarrow{L_\Phi = \frac{\Phi^*_{\text{total two wire}}}{i}}$$

$$L_\Phi = \frac{\mu_\circ L}{2\pi} + \frac{\mu_\circ L}{\pi}\left(\operatorname{Ln}\frac{d}{d-a}\right) \xrightarrow{\text{if}: d \rangle\rangle a} L_\Phi = \frac{\mu_\circ L}{2\pi}$$

برای اندوکتانس کل از (III) داریم:

$$\text{(III)}: \quad \frac{\Phi_{\text{total}}}{L} = \frac{\mu_\circ i}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \operatorname{Ln}\frac{d}{a}\right] \xrightarrow{L_\Phi = \frac{\left(\frac{\Phi_{\text{total}}}{L}\right)}{i}} L_{\Phi\,(\text{total})} = \frac{\mu_\circ}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \operatorname{Ln}\frac{d}{a}\right]$$

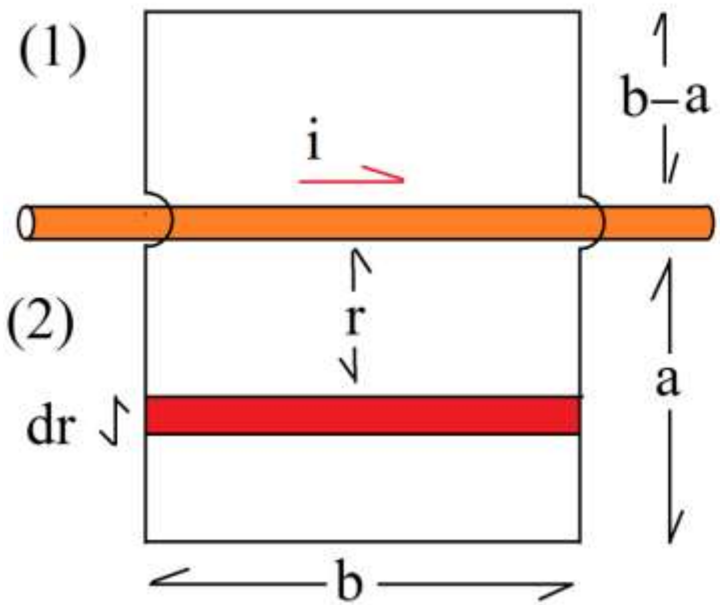
(ج) کسری از شار که داخل سیم ها است:

$$\frac{\Phi_{\text{internal}}}{\Phi_{\text{total}}} = \frac{\dfrac{\mu_\circ i}{2\pi} + \dfrac{\mu_\circ i}{\pi}\operatorname{Ln}\dfrac{d}{d-a}}{\dfrac{\mu_\circ i}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} + \operatorname{Ln}\dfrac{d}{a}\right]} = \frac{\left[1 + \operatorname{Ln}\dfrac{d}{d-a}\right]}{\left[\dfrac{1}{2} + \operatorname{Ln}\dfrac{d}{a}\right]}$$

(د) اگر جریان ها یکسویه بودند، جهت میدان ها بر خلاف یکدیگر می شد و با توجه

به تقارن مساله یکدیگر را خنثی می کردند و شار کل صفر می شد.

مثال: در شکل زیر $a = 12\ cm$ و $b = 16\ cm$ است. جریان بر حسب آمپر در سیم مستقیم با رابطه ی $i = 4.5\ t^2 - 10\ t$ داده شده است. (الف) در ثانیه ی ۳ مقدار emf در حلقه ی مربع چقدر است. (ب) جریان القا شده در حلقه در کدام جهت است.



شکل را به دو بخش بالایی (۱) و پایینی (۲) تقسیم می کنیم.

بنابر قانون دست راست در (۱) میدان بسمت خارج و شار مغناطیسی مثبت و در (۲) میدان بسمت داخل و شار مغناطیسی منفی است.

در سیم مستقیم می دانیم که:

$$B = \frac{\mu_\circ i}{2\pi r}$$

$$d\Phi_B = B\,dA = \frac{\mu_\circ i}{2\pi r} b\,dr \Rightarrow \Phi_B = \int d\Phi_B = \int_0^{b-a} d\Phi_{(1)} - \int_0^{a} d\Phi_{(2)} \Rightarrow$$

$$\Phi_B = \int_0^{b-a} \frac{\mu_\circ i}{2\pi r} b\,dr - \int_0^{a} \frac{\mu_\circ i}{2\pi r} b\,dr = \frac{\mu_\circ ib}{2\pi} \mathrm{Ln}\, r\Big|_0^{b-a} - \frac{\mu_\circ ib}{2\pi} \mathrm{Ln}\, r\Big|_0^{a} \Rightarrow$$

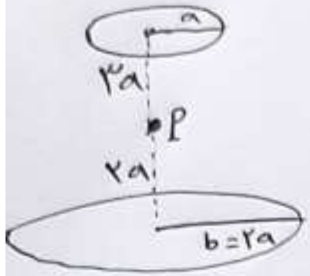
$$\Phi_B = \frac{\mu_\circ ib}{2\pi}\Big[\big(\mathrm{Ln}(b-a)-\mathrm{Ln}(0)\big)-\big(\mathrm{Ln}(a)-\mathrm{Ln}(0)\big)\Big] \Rightarrow$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_\circ ib}{2\pi}\left[\mathrm{Ln}\frac{(b-a)}{a}\right]$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{di}\frac{di}{dt} = -\frac{d}{di}\left\{\frac{\mu_\circ ib}{2\pi}\left[\mathrm{Ln}\frac{(b-a)}{a}\right]\right\}\frac{di}{dt} \Rightarrow$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu_\circ b}{2\pi}\left[\mathrm{Ln}\frac{(b-a)}{a}\right]\frac{di}{dt} \xrightarrow{i=4.5t^2-10t} \varepsilon = -\frac{\mu_\circ b}{2\pi}\left[\mathrm{Ln}\frac{(b-a)}{a}\right][9t-10]_0^3 \Rightarrow$$

$$\varepsilon = -\frac{(4\pi\times10^{-7})(0.16)}{2\pi}\left[\mathrm{Ln}\frac{(0.16-0.12)}{0.12}\right][9\times3-10] \Rightarrow \varepsilon = 5.98\times10^{-7}\ \text{volt}$$



۱- دو حلقه ی به شعاع های a و b مطابق شکل داریم و حامل جریان هایی به ترتیب i و ۲i می باشند. مطلوبست محاسبه ی میدان مغناطیسی در نقطه ی P :

۲- مطلوبست محاسبه ی میدان مغناطیسی در نقطه ی O :

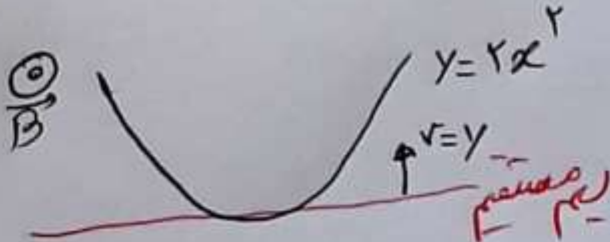
۳- مطلوبست محاسبه ی میدان مغناطیسی در نقطه ی Q :

۴- مطلوبست محاسبه ی نیروی وارد بر سیم ۱ از طرف ۳ سیم دیگر (جریان سیم ها در شکل نشان داده شده است).

۵- حلقه ی ۱، n_1 دور سیم و حلقه ی ۲، n_2 دور سیم دارند. اگر حلقه ی ۲ رها شود و با شتاب ثابت به سمت حلقه ی ۱ سقوط نماید مطلوبست محاسبه ی جریان القایی در حلقه ی ۲.
اگر مقاومت حلقه ی ۲، R باشد. (در حین سقوط دو حلقه همواره موازی اند).

۶ـ مطابق شکل سیم نیم دایره‌ای به معادله‌ی $x^2+y^2=4$ داریم.
اگر سیم مستقیم به شتاب ثابت $\vec{a}$ به سمت بالا حرکت کند مطلوبست محاسبه‌ی جریان القایی در مجموعه دایره و سیم مستقیم وقتی سیم مستقیم به نقطه‌ی P رسید. (مقاومت سیم‌ها R است).

۷ـ مطابق شکل سیمی سهمی شکل به معادله‌ی $y=2x^2$ داریم.
اگر سیم مستقیم با سرعت متغیر $v=y$ به سمت بالا حرکت کند مطلوبست محاسبه‌ی نیروی محرکه القایی در مجموعه وقتی سیم مستقیم به اندازه‌ی زمان t بالا رفت.

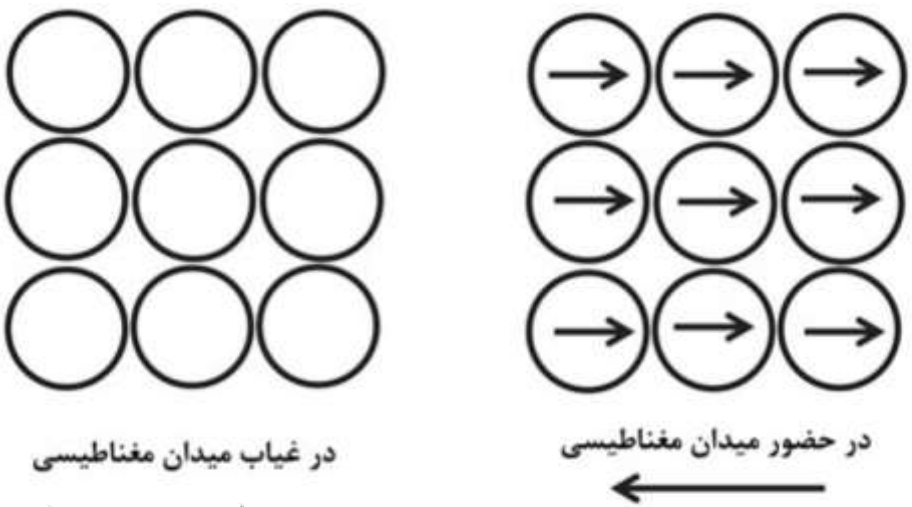


خواص مغناطیسی مواد

رفتار مغناطیسی مواد مختلف بر اساس پاسخ آن‌ها به اثر میدان مغناطیسی خارجی، دسته‌بندی می‌شود که عبارتند از: دیامغناطیس (Diamagnetism) ، پارامغناطیس (Paramagnetism)، و فرومغناطیس (Ferromagnetism).

۱- دیا مغناطیس

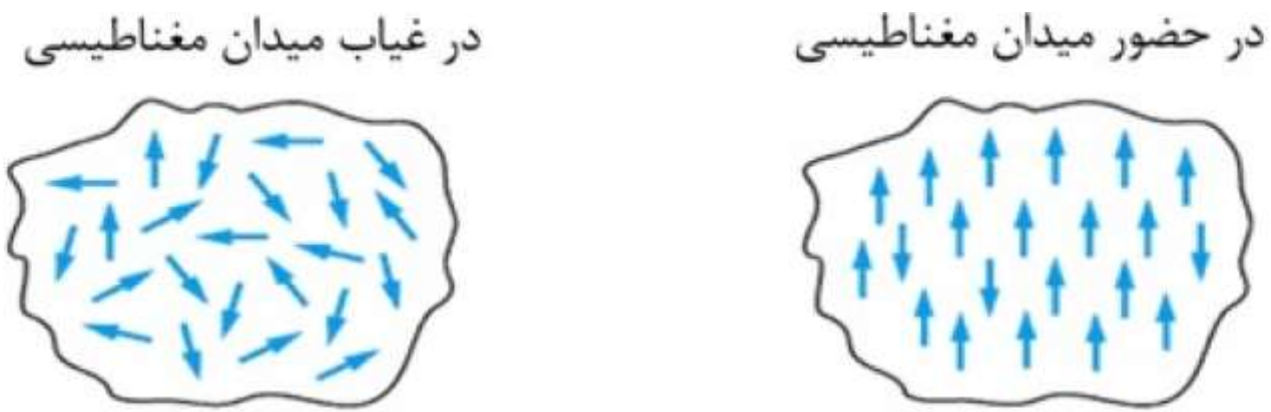
کلیه ی موادی که فاقد الکترون فرد باشند، دیا مغناطیس هستند. دیامغناطیس ها موادی هستند که مولکول‌ها، اتم ها و یا یون‌های آنها به گونه‌ای رفتار می کنند که اگر گشتاور مغناطیسی خارجی اعمال شود، اتم‌های آنها دارای گشتاور مغناطیسی القایی می‌شوند (مثل اتم مس) و جهت این گشتاور مغناطیسی خلاف جهت میدان اعمالی است. این دسته از مواد اگر در میدان مغناطیسی قرار گیرند، مغناطش منفی از خود نشان می‌دهند و به این دلیل اجسام دیامغناطیس توسط یک میدان مغناطیس خارجی دفع می شوند.



۲- پارامغناطیس

مواد پارامغناطیس (مانند منیزیم، لیتیم و تانالیوم) دارای یک الکترون جفت نشده هستند و در اثر اعمال میدان مغناطیسی خارجی، الکترون‌های جفت نشده خود را با میدان همسو کرده و موجب تقویت میدان می‌شوند. در این مواد، توزیع جهت گشتاورها به‌صورت تصادفی بوده و یکدیگر را خنثی می‌کنند و در نتیجه، مغناطیس خالص برابر صفر است. با قرارگرفتن این مواد در یک میدان مغناطیسی، تعدادی از گشتاورها در جهت میدان اعمال‌شده می‌چرخند و خاصیت مغناطیسی ضعیفی در آن‌ها ایجاد می‌شود.

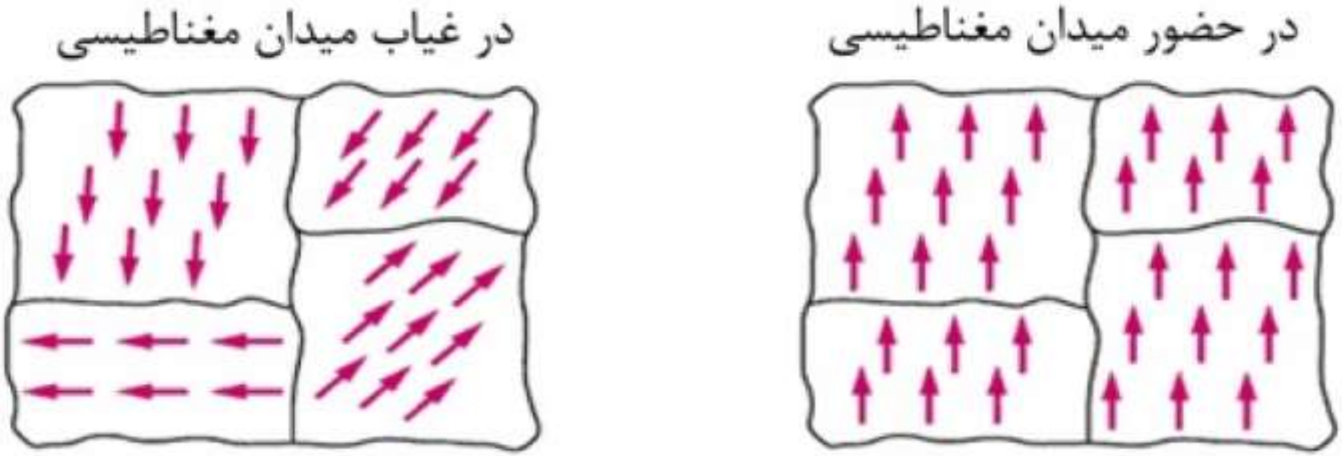
از آنجا که همه مواد، حتی مواد پارامغناطیس، دارای الکترون‌های جفت‌شده نیز هستند، لذا خاصیت دیامغناطیسی یک پدیده عمومی است و در مواد پارامغناطیس نیز وجود دارد. اما از آنجایی که شدت خاصیت پارا مغناطیسی از شدت خاصیت دیامغناطیسی بسیار بیشتر است، خاصیت پارامغناطیسی همواره بر خاصیت دیامغناطیسی غلبه می‌کند.



خاصیت پارامغناطیسی

۳- فرومغناطیس

مواد فرومغناطیس (آهن، نیکل و کبالت) دارای الکترون‌های جفت نشده هستند و گشتاورهای مغناطیسی اتمی این مواد در حضور میدان مغناطیسی خارجی در یک جهت آرایش می‌یابند. علاوه براین، ساختار بلوری این مواد شرایط برهم‌کنش مستقیم و جفت شدن گشتاورها را فراهم می‌آورد. بنابراین، هنگامی که میدان خارجی حذف شود، خاصیت مغناطیسی این مواد کماکان حفظ می‌شود. به این دسته از مواد که با حذف میدان خارجی، خاصیت مغناطیسی خود را حفظ می‌کنند، آهنربای سخت (Hard Magnets) نیز گفته می‌شود. این مواد با اعمال یک میدان مغناطیسی کوچک، به‌شدت مغناطش پیدا کرده و با حذف میدان مغناطیسی، خاصیت مغناطیسی خود را به‌طور کامل از دست نمی‌دهند.



خاصیت فرومغناطیسی

دوره تناوب تابع:

تابع $f(x)$ را دوره ای یا متناوب می گوییم اگر این تابع بازای هر عدد حقیقی x تعریف شده باشد و عددی مثبت مانند T موجود باشد بطوری که بازای هر x داشته باشیم: $f(x+T)=f(x)$

عدد T را دوره تناوب تابع $f(x)$ می گوییم و تابع در هر بازه باندازه T مجدد تکرار می شود. بازای هر عدد صحیح n و هر عدد حقیقی x داریم:

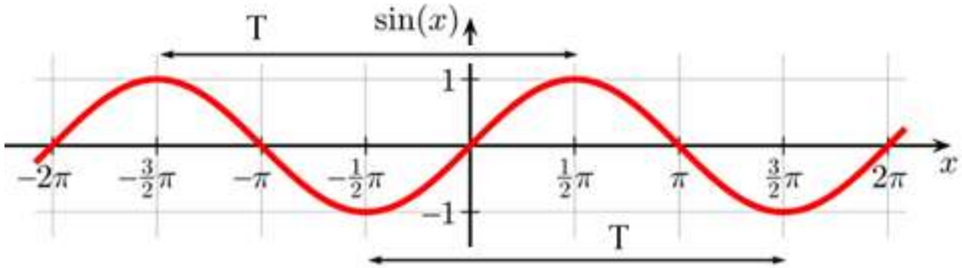
$$f(x+T)=f(x+2T)=f(x+3T)=\ldots=f(x+nT)=f(x)$$

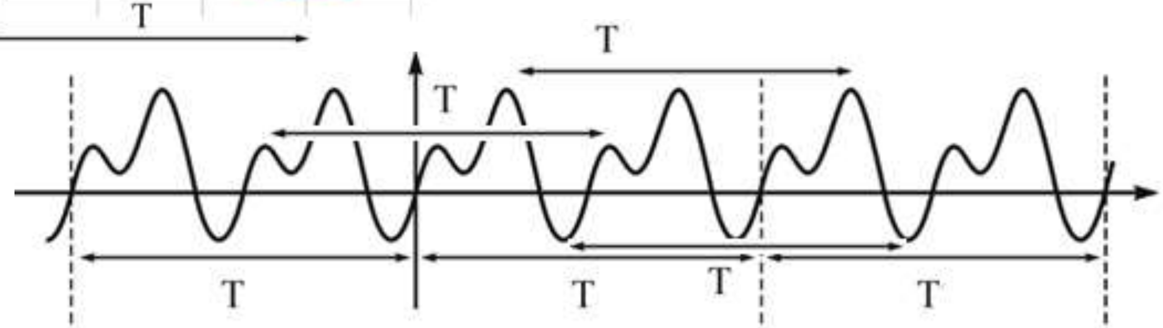
۱- اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ متناوب با دوره تناوب T باشندآنگاه $h(x)=af(x)+bg(x)$ دارای دوره تناوب T است. (a و b اعداد ثابت و حقیقی هستند).

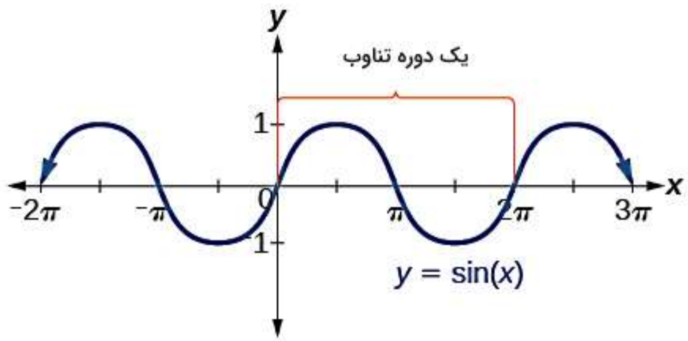
۲- تابع $f(x)=c$ (تابع ثابت) بازای هر عدد مثبت T تابعی متناوب با دوره تناوب T است.

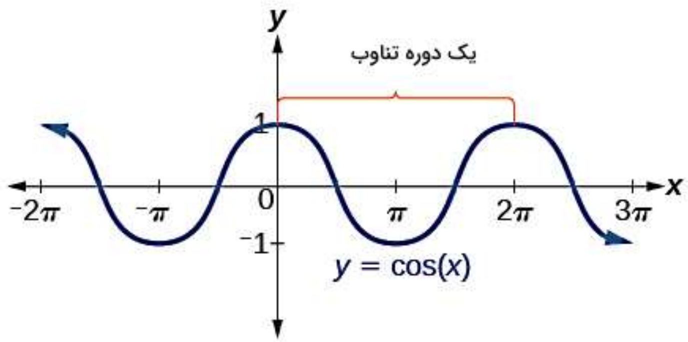
۳- اگر تابع $f(x)$ دوره تناوب T داشته باشد، آنگاه تابع $f(ax)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $\frac{T}{a}$ و تابع $f(\frac{x}{b})$ متناوب با دوره تناوب bT است (a و b اعداد حقیقی مثبت هستند).

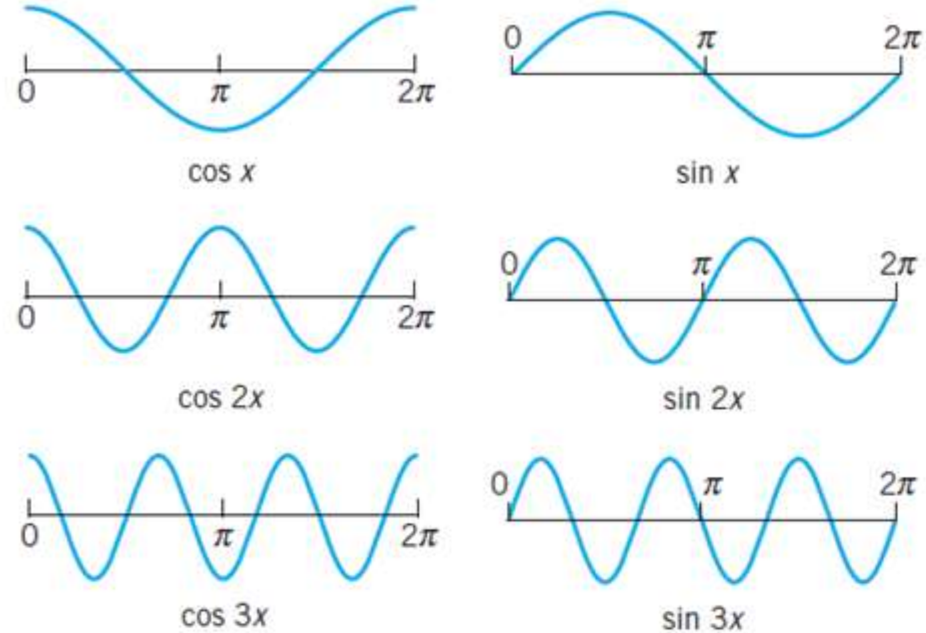
٤- توابع Sin و Cos دوره تناوب 2π دارند.

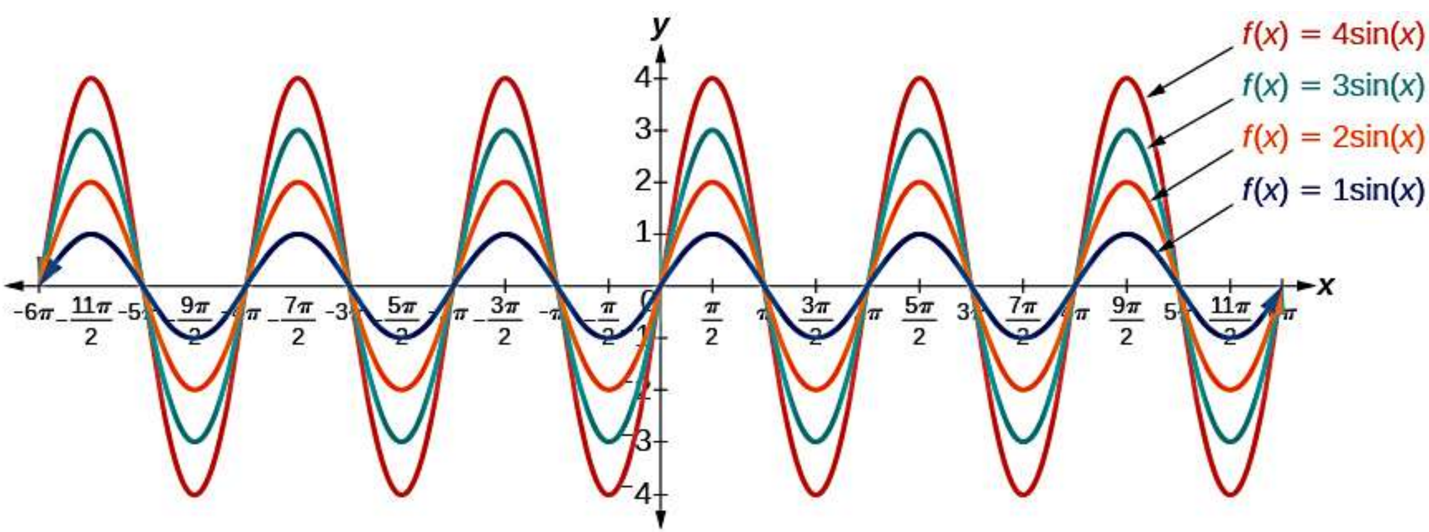










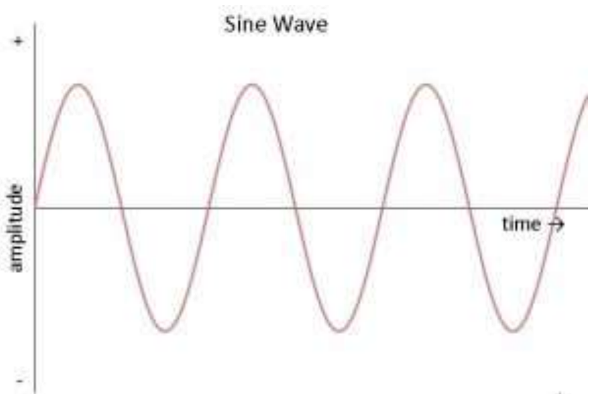


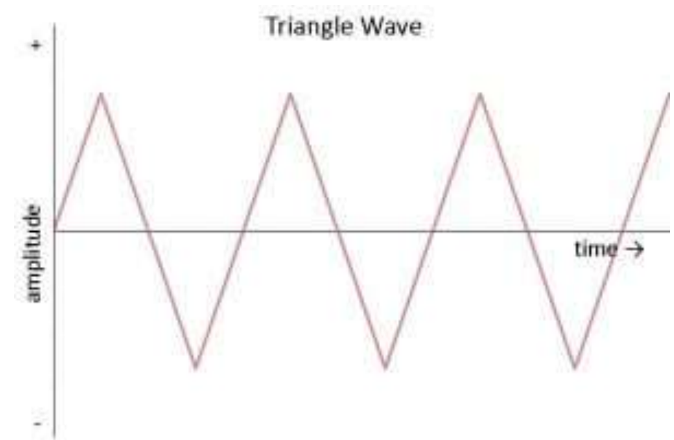
شهروز نصیریان

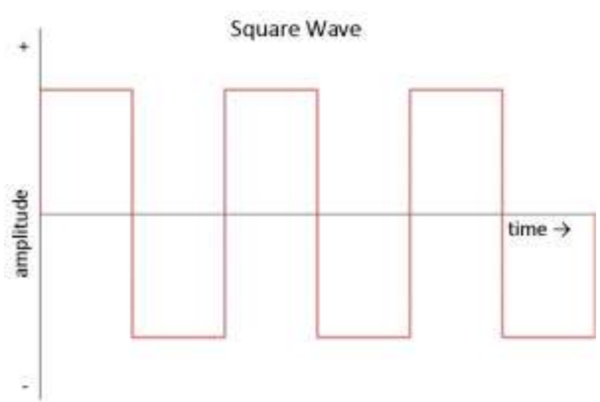
جریان های متناوب (Alternating Current-AC):

جریان متناوب، جریانی است که به طور منظم تغییر جهت می‌دهد (دوره تناوب دارد). نتیجه‌ی این تغییرات این است که سطح ولتاژ همزمان با تغییر جهت جریان، معکوس می‌شود. از جریان AC برای رساندن برق به خانه‌ها، ساختمان‌ها و غیره استفاده می‌شود. جریان AC توسط دستگاهی به نام مولد جریان متناوب (Alternator) تولید می‌شود. این دستگاه یک نوع خاصی از ژنراتور برق است که برای تولید جریان متناوب ساخته شده‌است.

جریان AC دارای دوره تناوب است و می‌تواند شکل موج ها و حالت های مختلفی داشته باشد. در بیشتر اوقات جریان AC توسط موج سینوسی تولید شده و نمایش داده می شود.

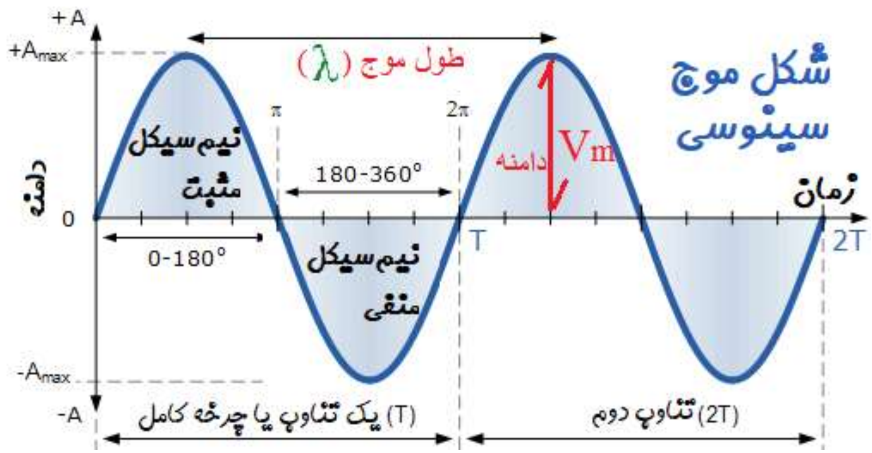






تعریف موج سینوسی:

شکل موج AC را به صورت یک تابع ریاضی تعریف می‌کنیم و معمولاً از موج سینوسی استفاده می‌کنیم. هر موج سینوسی سه بخش دارد: دامنه، فرکانس و فاز. بخش ولتاژ یک موج سینوسی:



$$\begin{cases} V(t) = V_m \operatorname{Sin}(wt+\varphi) = V_m \operatorname{Sin}(2\pi f\, t+\varphi) \\ V(t) = V_m \operatorname{Cos}(wt+\varphi) = V_m \operatorname{Cos}(2\pi f\, t+\varphi) \end{cases}$$

V(t): تابع ولتاژ وابسته به زمان است و با تغییر زمان، تغییر می‌کند.

Vm: دامنه است. این مقدار مشخص می‌کند که حداکثر ولتاژی که موج سینوسی می‌تواند دریافت کند (در هر جهتی)، چقدر است. یعنی ولتاژ ما یا می‌تواند Vm+ ولت، یا Vm− ولت، و یا یک مقدار بین این دو مقدار باشد.

تابع Sin مشخص می‌کند که ولتاژ باید بصورت یک موج سینوسی باشد، که یک شکل نوسانی حول محور صفر ولت است.

مقدار ۲Π یک ثابت است که فرکانس هر دوره (هرتز) را به فرکانس زاویه‌ای (رادیان بر ثانیه) تبدیل می‌کند.

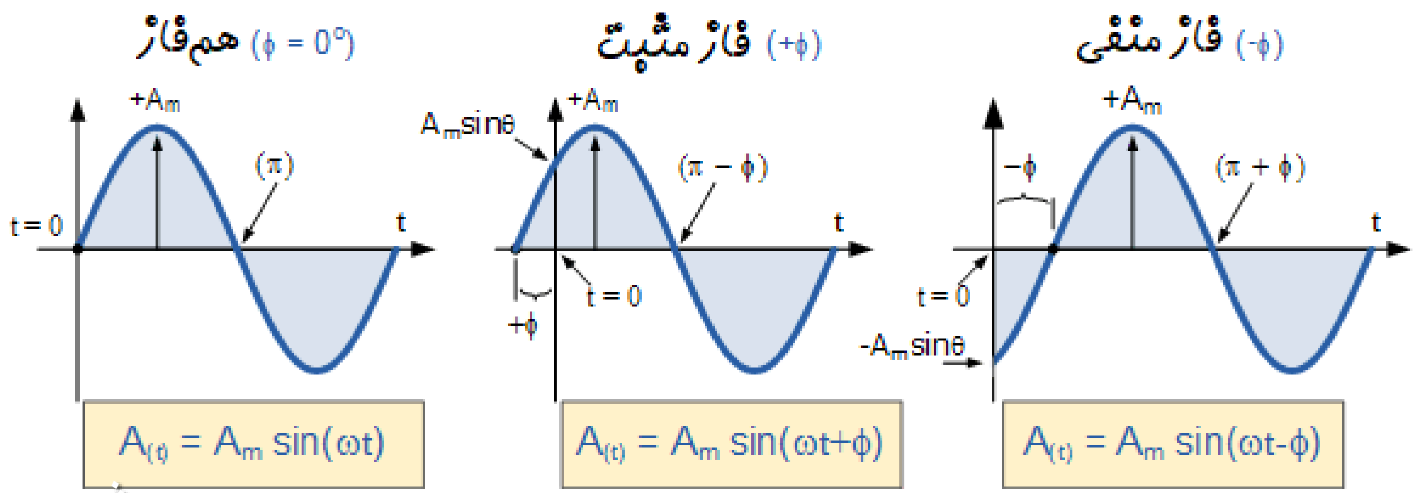
f: فرکانس موج سینوسی است. این مقدار بر حسب «هرتز» یا «واحد بر ثانیه» داده می‌شود. فرکانس مشخص می‌کند که در هر ثانیه چند طول موج شکل می‌گیرد و یا از یک نقطه عبور می کند.

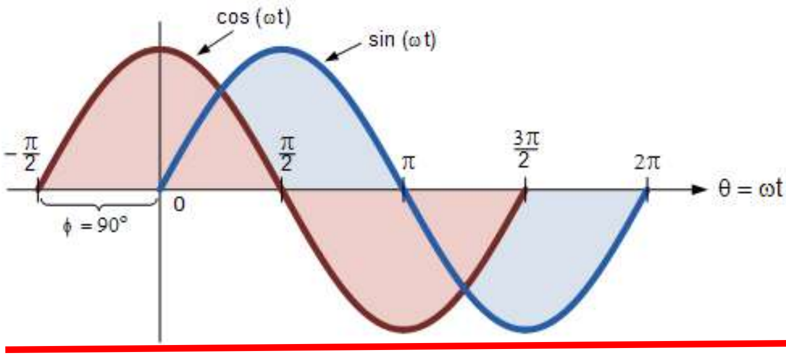
t : متغیر وابستگی است بر حسب ثانیه. با تغییر زمان، شکل موج نیز تغییر می‌کند.

2πf=w: سرعت زاویه ای موج می باشد.

فاز (φ)، و اختلاف فاز در موج سینوسی:

یکی از ویژگی های نقاط ارتعاش کننده در روی یک موج، فاز آن هاست. فاز به تنهایی فقط یک مفهوم ریاضی است. فاز به صورت یک زاویه بر حسب درجه (بین ۰ تا ۳٦۰ درجه) در ریاضی بیان می شود و در فیزیک همواره به یک نقطه خاص روی یک موج، نوسان یا ارتعاش اشاره می کند. فاز چیزی نیست که بتوان آن را یک ویژگی قابل لمس برای یک موج دانست اما می توان تعریف کرد: فاز موج سینوسی (φ)، اندازه‌ی تغییر شکل موج در هر زمان مشخص است. از آنجایی که موج سینوسی ساختاری منظم دارد، اگر موج ما ۳٦۰ درجه تغییر کرده باشد، دوباره به همان شکل موج قبلی تبدیل می‌شود، یعنی انگار که صفر درجه تغییر کرده‌است. اختلاف فاز برای یک موج سینوسی، مقدار جابجایی زاویه‌ای شکل موج نسبت به نقطه مرجع معین روی محور افقی است. اختلاف فاز بین دو موج، اختلاف بین دو شکل موج نسبت به یک محور مشترک است. طبق قرارداد، تنها شکل موج‌های سینوسی با فرکانس یکسان می‌توانند اختلاف فاز داشته باشند.





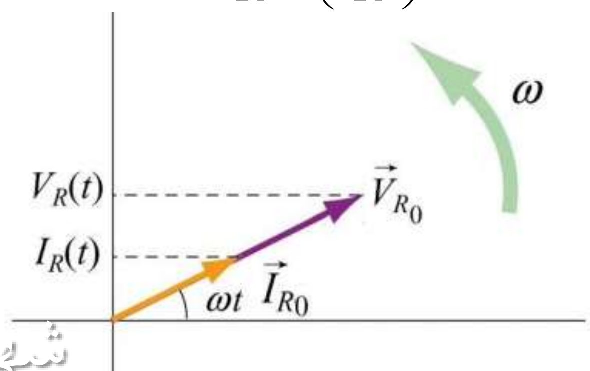
اختلاف فاز بین موج سینوسی و موج کسینوسی

از مقاومت در مدارها برای کاهش شدت جریان استفاده می کنند. پس مقاومت در مدار، تغییری در فرکانس جریان متناوبی که از مدار می گذرد ، نمی دهد، و منحنی ولتاژ و شدت جریان مربوط به یک مقاومت در جریان متناوب، همفاز می باشند. اگر مولد، نوسان روبرو را پدید آورد :

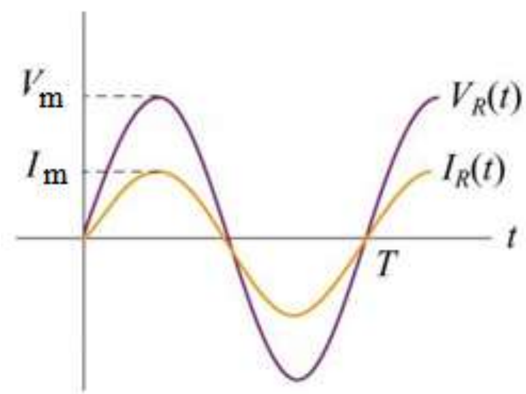
$$\boxed{V = V_m \mathrm{Cos}(\omega t) \quad \text{or} \quad V = V_m \mathrm{Sim}(\omega t)}$$

مقاومت از قانون اهم $V=RI$ پیروی می کند ، بنابراین جریانی که از مقاومت می گذرد برابر است با :

$$\begin{cases} \text{if}: \boxed{V = V_m \mathrm{Cos}(\omega t)} \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \left(\frac{V_m}{R}\right) \times \mathrm{Cos}(\omega t) \Rightarrow \boxed{I = I_m \times \mathrm{Cos}(\omega t)} \\ \text{if}: \boxed{V = V_m \mathrm{Sim}(\omega t)} \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \left(\frac{V_m}{R}\right) \times \mathrm{Sin}(\omega t) \Rightarrow \boxed{I = I_m \times \mathrm{Sin}(\omega t)} \end{cases}$$



نمودار فازوری

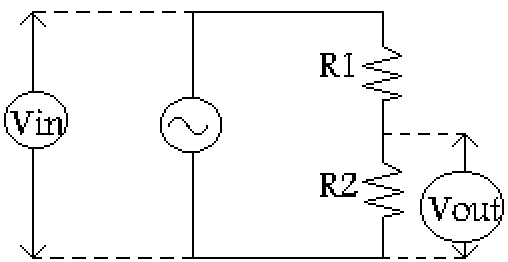


مقاومت ها هم جریان DC و هم جریان AC را از خود عبور می دهند و اختلاف فاز بین ولتاژ ورودی و خروجی ایجاد نمی کنند و مقاومت در مدار متناوب برای ولتاژهای کم مانند یک هادی خطی عمل می کند.

بررسی اختلاف فاز جریان و ولتاژ، و نحوه تغییرات جریان در مدار های R-R و R-C و R-L :

۱– مدار R-R :

شکل یک مدار R-R را در مدار با منبع AC نشان می دهد. رابطه ولتاژ ورودی بر حسب زمان را می توان بصورت زیر نوشت :



$$V_{in} = V_m \operatorname{Sin}(\omega t)$$

طبق قانون اهم برای دو مقاومت که بصورت سری بسته شده باشند ، داریم :

$$V_{in} = V_1 + V_2 = I \times R_1 + I \times R_2 \Rightarrow I = \frac{V_{in}}{R_1 + R_2} = \frac{V_m}{R_1 + R_2}\left[\operatorname{Sin}(\omega t)\right]$$

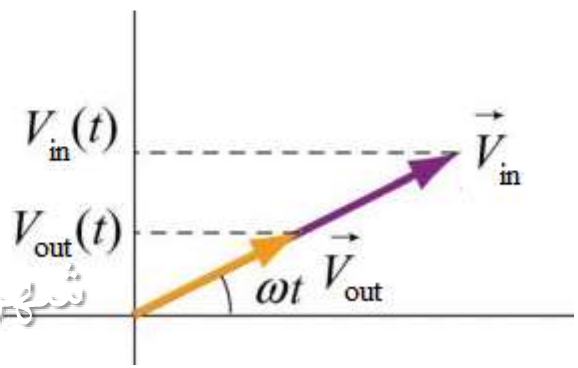
و برای ولتاژ خروجی (ولتاژ دو سر مقاومت ۲) داریم :

$$V_{Out} = I \times R_2 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) \times V_m \times \operatorname{Sin}(\omega t)$$

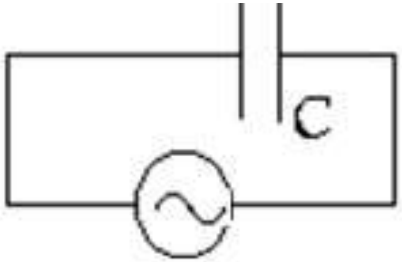
حال تقسیم دو رابطه:

$$\frac{V_{Out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

پس اختلاف فازی بین ولتاژ ورودی و خروجی وجود ندارد .



نمودار فازوری



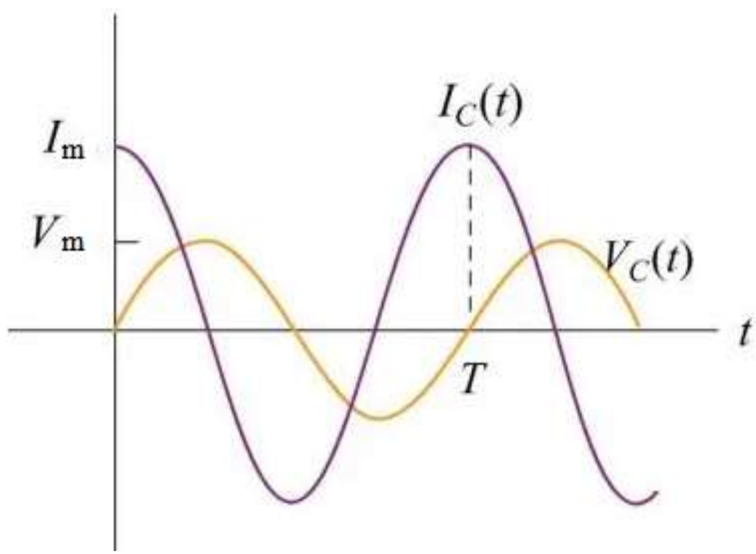
۲- مدار R-C :

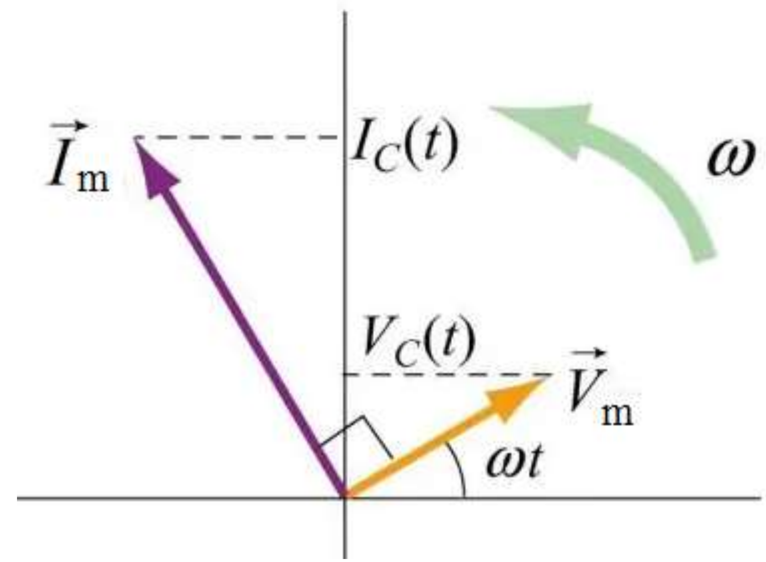
مدار خالص خازنی داریم که شامل یک خازن و یک مولد می باشد. بنابراین داریم:

(راکتانس خازنی)

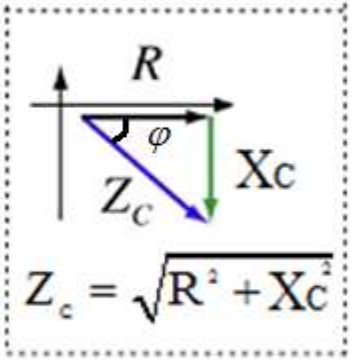
$$\left.\begin{array}{l}\boxed{V=V_m\sin(\omega t)}\\ V=\dfrac{q}{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dV}{dt}=\left(\frac{1}{C}\right)\times\underbrace{\left(\frac{dq}{dt}\right)}_{=I}=\frac{I}{C}\Rightarrow I=C\times\left(\frac{dV}{dt}\right)\Rightarrow \boxed{I=\underbrace{\overset{=\frac{1}{X_C}}{\omega\times C}\times V_m}_{=I_m}\times\cos(\omega t)}$$

روابط بالا نشان می دهند که جریان با ولتاژ همگام نیست. این امر در شکل زیر نشان داده شده است، که در آن فاز جریان از فاز ولتاژ $\frac{\pi}{2}$ جلوتر است (جریان الکتریکی به اندازه ۱/٤ زمان کل سیکل، زودتر به مقدار ماکزیمم خود می‌رسد).





نمودار فازوری



شکل زیر که یک مدار R-C را نشان می دهد. اگر فرکانس مدار را تغییر دهیم ، جریان متناوبی که از این مدار می گذرد، دیگر ثابت نخواهد بود ، بنابراین جریان به فرکانس مدار وابسته است .

مقاومت ظاهری مدار یعنی Zc برابر است با : $Z_C = \sqrt{R^2 + X_C^2}$

که در آن R مقاومت اهمی مدار و Xc مقاومت ظاهری خازن (راکتانس خازنی) می باشد. حال برای شدت جریان مدار داریم:

$$I = \frac{V_Z}{Z_C} \xrightarrow[X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi f C}]{Z_C = \sqrt{R^2 + X_C^2}} I = \frac{V_Z}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \Rightarrow \boxed{I = \frac{V_Z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2}}}$$

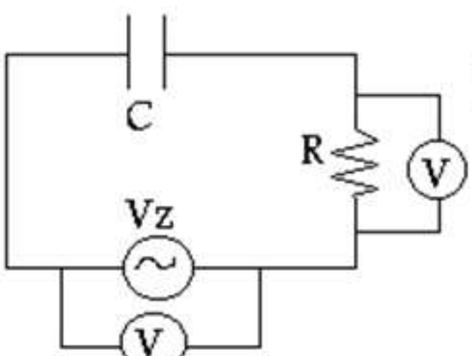
پس شدت جریان بستگی به فرکانس مدار دارد.

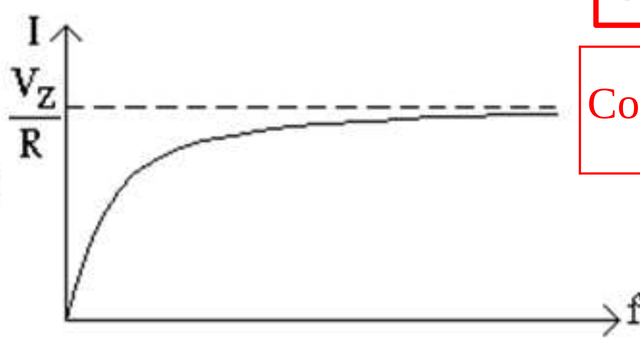
$$I = \frac{V_Z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2}} \Rightarrow \begin{cases} \text{if}: \ f = 0 \quad \Rightarrow I = 0 \\ \text{if}: \ f \to \infty \ \Rightarrow I = \frac{V_Z}{R} \end{cases}$$

زاویه‌فاز (φ) بین ولتاژ منبع تغذیه (Vs) و جریان مدار (I) همان زاویه‌ی بین Z و R در مثلث امپدانس است.

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{Z_C} \ , \ \sin(\varphi) = \frac{X_C}{Z_C} \ , \ \tan(\varphi) = \frac{X_C}{R}$$

ضریب توان زاویه





مثال: یک مدار سری R-C، دارای یک مقاومت Ω ۱۰و یک خازن ۱۰۰μF که به یک منبع‌تغذیه 50Hz ، ۱۱۰ ولت متصل‌شده اند داریم. امپدانس کلی مدار، جریان مدار، ضریب توان زاویه را محاسبه نموده و نمودار فازوری آن را رسم کنید.

راکتانس خازنی :

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 100 \times 10^{-6}} = 31.83\ \Omega$$

امپدانس مدار:

$$Z_C = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{(10)^2 + (31.83)^2} = 33.36\ \Omega$$

جریان مدار:

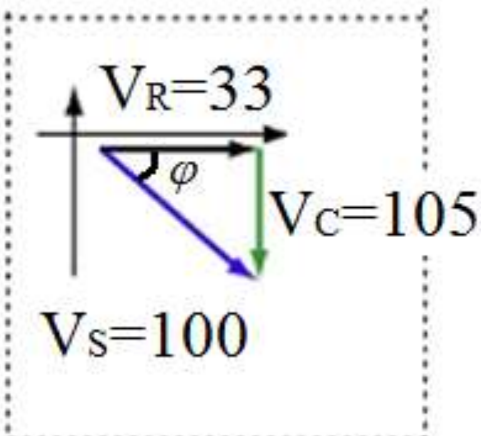
$$I = \frac{V_s}{Z_C} = \frac{110}{33.36} = 3.3\ A$$

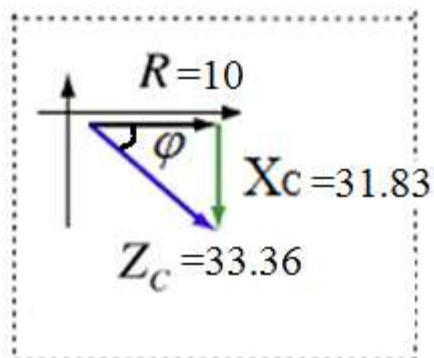
ضریب توان و زاویه فاز:

$$\mathrm{Cos}(\varphi) = \frac{R}{Z_C} = \frac{10}{33.36} = 0.3 \Rightarrow \varphi = \mathrm{Cos}^{-1}(0.3) = 72.54^{o}$$

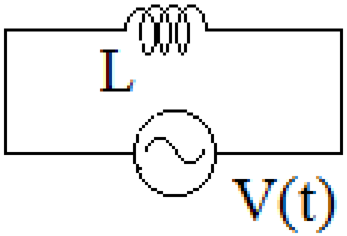
محاسبه ولتاژها:

$$\begin{cases} V_R = RI = 10 \times 3.3 = 33\ \text{volts} \\ V_C = X_C I = 31.83 \times 3.3 = 105\ \text{volts} \end{cases}$$





۳- مدار R-L :



مدار خالص سلفی مانند شکل در نظر بگیرید که شامل یک سلف و یک مولد می باشد.

البته این مدار غیر واقعی می باشد، چرا که پیچه دارای مقاومتی غیر قابل چشم پوشی است،

ولی فعلا"برای سادگی فرض می کنیم چنین خود القای ایده آلی وجود داشته باشد .

بنا بر قانون لنز ، نیروی محرکهء الکتریکی که از جریان متغییر در القاگر حاصل می شود برابر $-L\dfrac{dI}{dt}$ می باشد که در آن علامت منفی مخالف بودن نیروی محرکهء الکتریکی و ولتاژ را نشان می دهد .

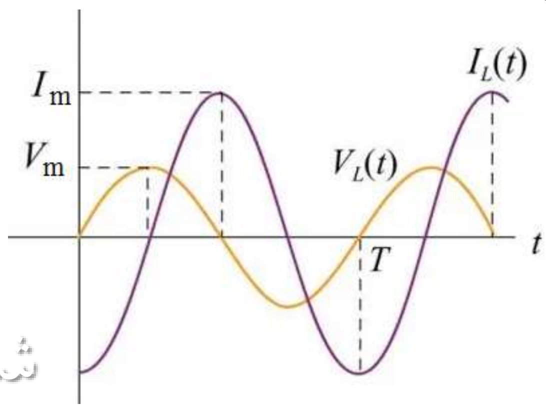
در مدار شکل بالا این نیروی محرکهء الکتریکی با ولتاژ مولد برابری می کند ، لذا داریم :

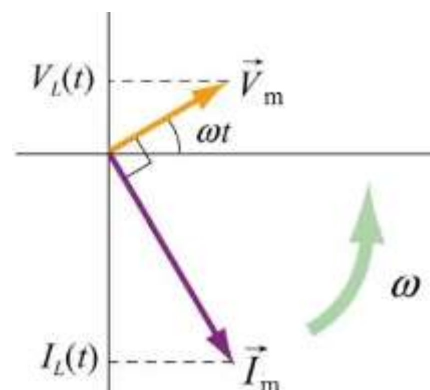
$$\boxed{V = V_m \operatorname{Sin}(\omega t) = -L\frac{dI}{dt}} \Rightarrow -LdI = V_m \operatorname{Sin}(\omega t)dt \Rightarrow \int -LdI = \int V_m \operatorname{Sin}(\omega t)dt \Rightarrow$$

$$-L\int dI = V_m \int \operatorname{Sin}(\omega t)dt \Rightarrow -LI = -\frac{V_m}{\omega}\operatorname{Cos}(\omega t) \Rightarrow I = \frac{V_m}{L\omega}\operatorname{Cos}(\omega t) \Rightarrow \boxed{I = \frac{V_m}{\underbrace{L\omega}_{=X_L}}\operatorname{Sin}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

(راکتانس سلفی)

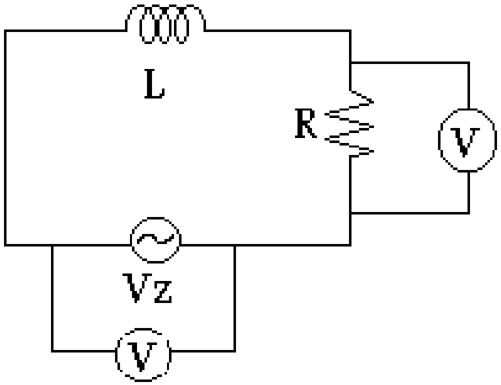
در اینجا یک اختلاف فاز $\dfrac{\pi}{2}$ بین جریان و ولتاژ وجود دارد ، ولی در اینجا فازجریان از فازولتاژ اعمال شده عقبتر است .

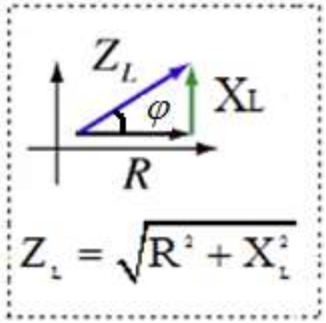




نمودار فازوری

شکل یک مدار R-L را نشان می دهد. اگر فرکانس مدار را تغییر دهیم ، جریان متناوبی که از این مدار می گذرد، دیگر ثابت نخواهد بود ، بنابراین جریان به فرکانس مدار وابسته است .





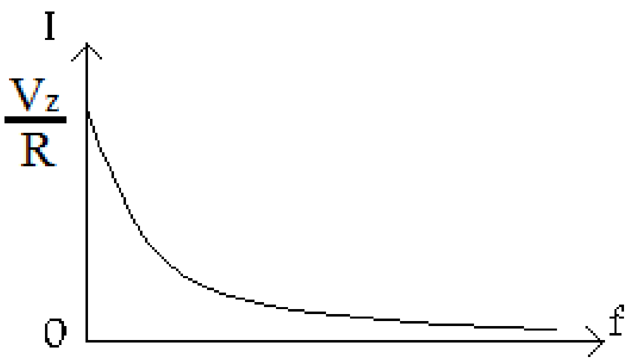
مقاومت ظاهری مدار یعنی Z_L برابر است با :

$$Z_L = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

که در آن R مقاومت اهمی مدار و XL مقاومت ظاهری سلف (راکتانس سلفی) می باشد. حال برای شدت جریان مدار داریم:

$$I = \frac{V_Z}{Z_L} \xrightarrow[X_L = L\omega = 2\pi f L]{Z_L = \sqrt{R^2 + X_L^2}} I = \frac{V_Z}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \Rightarrow \boxed{I = \frac{V_Z}{\sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2}}}$$

پس شدت جریان بستگی به فرکانس مدار دارد.



$$I = \frac{V_Z}{\sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2}} \Rightarrow \begin{cases} \text{if}: f = 0 \Rightarrow I = \dfrac{V_Z}{R} \\ \text{if}: f \to \infty \Rightarrow I = 0 \end{cases}$$

ضریب توان زاویه

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{Z_L}, \quad \sin(\varphi) = \frac{X_L}{Z_L}, \quad \tan(\varphi) = \frac{X_L}{R}$$

زاویه‌فاز (φ) بین ولتاژ منبع تغذیه (Vs) و جریان مدار (I) همان زاویه‌ی بین Z و R در مثلث امپدانس است.

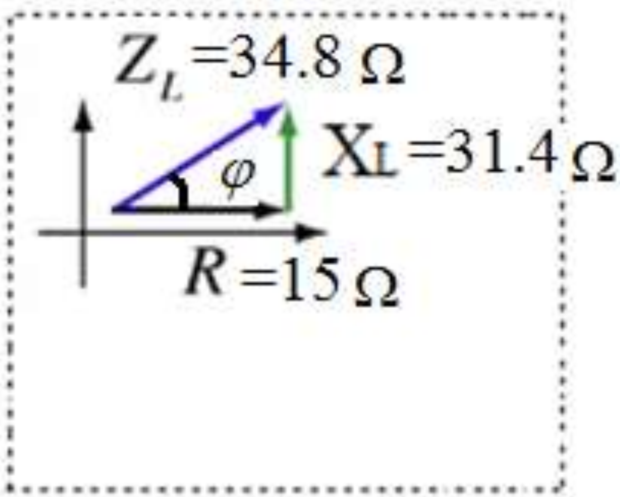
مثال: یک مدار سری RL، دارای یک مقاومت Ω ۱۵و یک سلف mH ۱۰۰ که به یک منبع‌تغذیه 50Hz ، ۲۲۰ ولت متصل‌شده اند داریم. امپدانس کلی مدار، جریان مدار، زاویه فاز را محاسبه نموده و نمودار فازوری آن را رسم کنید.

راکتانس سلفی:
$$X_L = 2\pi f L = 2\pi \times 50 \times 100 \times 10^{-3} = 31.4\ \Omega$$

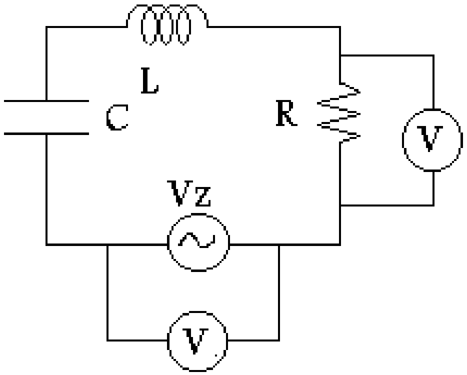
امپدانس مدار:
$$Z_C = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{(15)^2 + (31.4)^2} = 34.8\ \Omega$$

جریان مدار:
$$I = \frac{V_s}{Z_L} = \frac{220}{34.8} = 6.32\ A$$

زاویه فاز:
$$Cos(\varphi) = \frac{R}{Z_L} = \frac{15}{34.8} = 0.43 \Rightarrow \varphi = Cos^{-1}(0.43) = 64.5^o$$

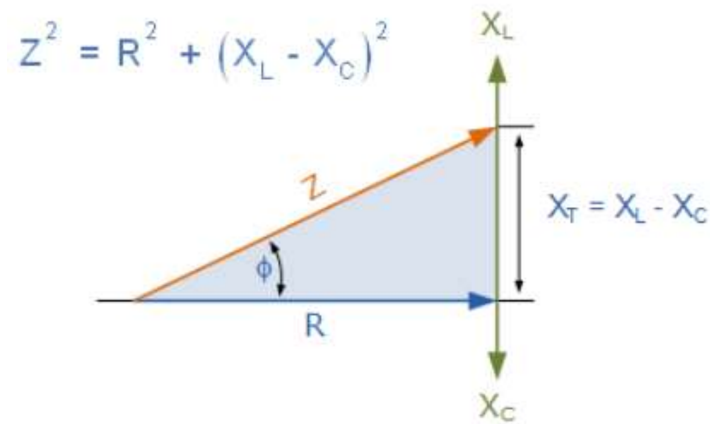


۲- مدار R-L-C :



هدف تحلیل جریان الکتریکی حاصل از یک نیروی محرکهء الکتریکی معلوم در مداری سری شامل اجزای ۱- ظرفیت خازن (C) ۲ – مقاومت اهمی (R) و ۳- ضریب خود القاء سلف (L) است. اگر فرکانس مدار را تغییر دهیم، جریان مدار تغییر می کند. لذا جریان به فرکانس مدار ، یعنی توان نوسان ساز بستگی دارد. برای مقاومت ظاهری مدار R-L-C، یعنی Z داریم :

$$\boxed{Z=\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}}$$



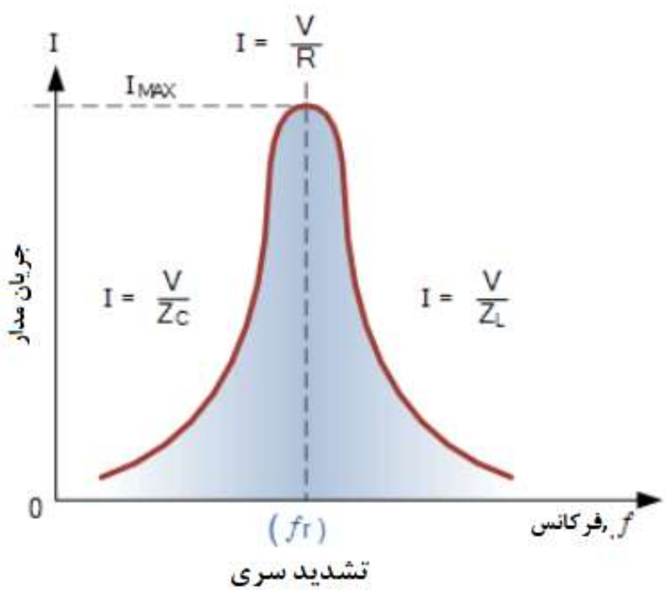
زاویه‌فاز (φ) بین ولتاژ منبع تغذیه (Vs) و جریان مدار (I) همان زاویه‌ی بین Z و R در مثلث امپدانس است. این زاویه از نظر مقدار می‌تواند مثبت یا منفی باشد؛ بسته به این‌که منبع ولتاژ در مدار پیشرو یا عقب‌مانده از جریان باشد و می‌تواند با مثلثات محاسبه گردد:

$$\boxed{\operatorname{Cos}(\varphi)=\frac{R}{Z}\ ,\ \operatorname{Sin}(\varphi)=\frac{X_L-X_C}{Z}\ ,\ \tan(\varphi)=\frac{X_L-X_C}{R}}$$

حال برای شدت جریان مدار داریم:

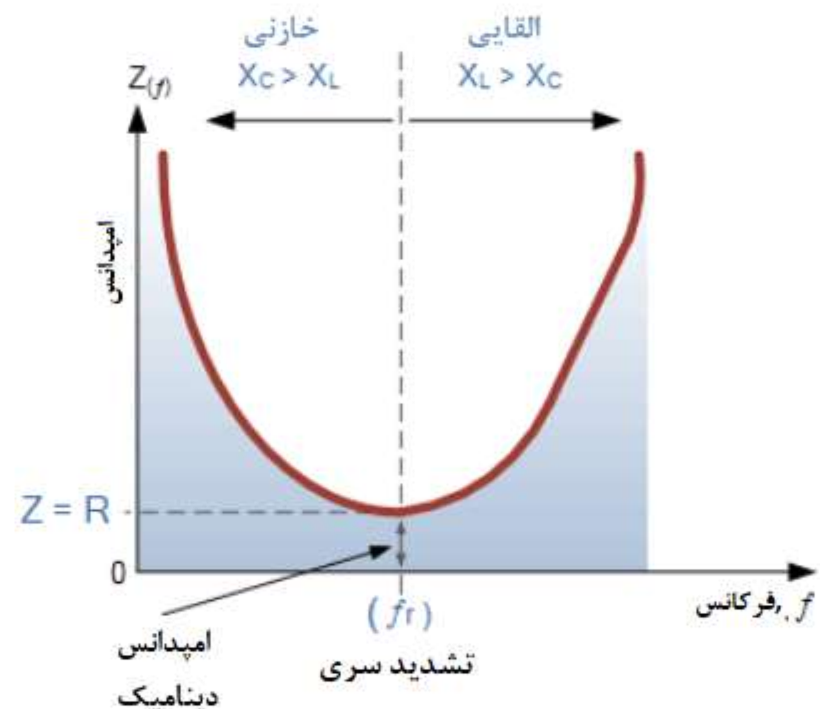
$$I=\frac{V_Z}{Z}\xrightarrow[X_L=L\omega\,,\ X_C=\frac{1}{C\omega}]{Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}} I=\frac{V_Z}{\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}}\Rightarrow \boxed{I=\frac{V_Z}{\sqrt{R^2+\left(2\pi f\,L-\frac{1}{2\pi f\,C}\right)^2}}}$$

تغییر جریان در مدار تشدید سری:

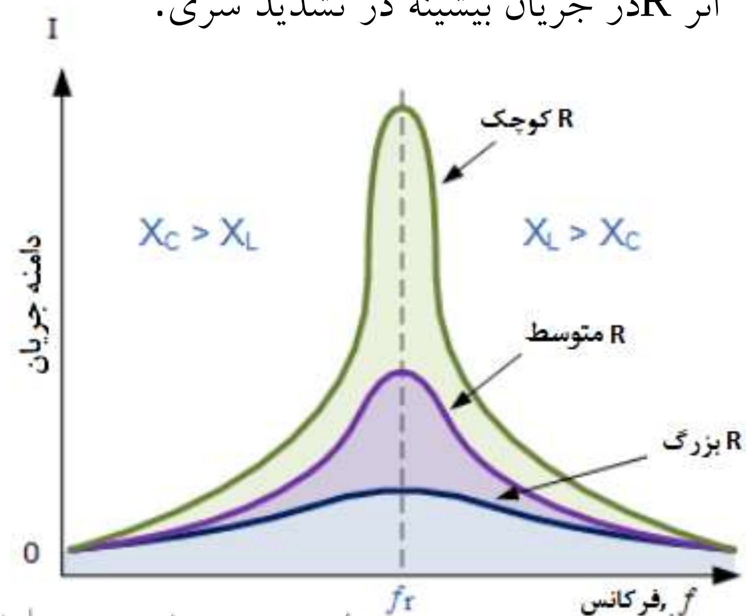


$$I=\frac{V_Z}{\sqrt{R^2+\left(2\pi f\,L-\frac{1}{2\pi f\,C}\right)^2}}\Rightarrow\begin{cases}\text{if}:\ f=0 \quad \Rightarrow I=0\\ \text{if}:\ f\to\infty \ \Rightarrow I=0\\ \text{if}:\ X_L-X_C=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{I_{Max}=\frac{V_Z}{R}}\\ 2\pi f\,L-\frac{1}{2\pi f\,C}=0\end{cases}\\ \Rightarrow\boxed{f_{Resonance}=\frac{1}{2\pi\sqrt{L\,C}}}\end{cases}$$

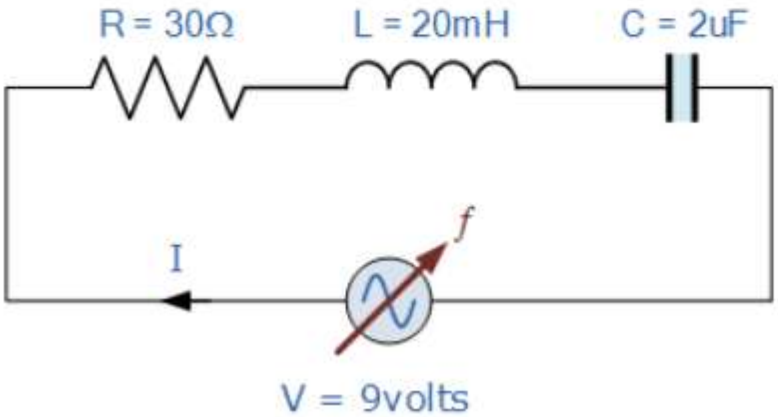
امپدانس در مدار تشدید سری:



اثر Rدر جریان بیشینه در تشدید سری:



مثال: یک شبکه‌ی تشدید سری، متشکل از یک مقاومت ۳۰Ω، یک خازن ۲ μF و یک سلف ۲۰ mH به یک ولتاژ منبع تغذیه سینوسی متصل است؛ که دارای خروجی ثابت ۹ ولت برای همه فرکانس‌هاست. فرکانس تشدید، جریان هنگام تشدید، ولتاژ دوسر سلف و خازن هنگام تشدید، و ضریب کیفیت را محاسبه کنید.



فرکانس تشدید:

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.02\times 2\times 10^{-6}}} = 796\ \text{Hz}$$

جریان مدار هنگام تشدید:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{9}{30} = 0.3\,\text{A} = 300\ \text{mA}$$

راکتانس القایی هنگام تشدید:

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi\times 796\times 0.02 = 100\ \Omega$$

ولتاژهای دو سر سلف و خازن:

$$V_L = V_C \Rightarrow V_C = V_L = I\times X_L = 300\ \text{mA}\times 100\ \Omega = 30\ \text{volts}$$

ضریب کیفیت:

$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{100}{30} = 0.333$$

مثال: یک مدار سری متشکل از، یک مقاومت 4Ω، یک سلف ۵۰۰ mH و یک خازن متغیر، به یک منبع تغذیه 50Hz ، ۱۰۰ ولت متصل شده‌است. ظرفیت مورد نیاز برای تولید یک وضعیت تشدید سری، و ولتاژهای تولید شده در دو سر سلف و خازن در نقطه تشدید را محاسبه کنید.

محاسبه راکتانس القایی هنگام تشدید و C برای تشدید:

$$X_L = 2\pi f\, L = 2\pi \times 50 \times 0.5 = 157.1\ \Omega$$

$$\text{In Resonance:}\quad X_L = X_C \Rightarrow f_R = \frac{1}{2\pi C X_C} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi f\, X_C} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 157.1} = 20.3\ \mu F$$

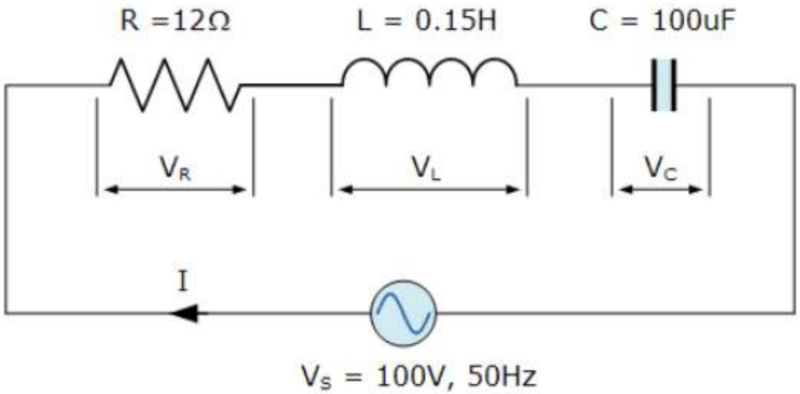
محاسبه ولتاژهای دو سر سلف و خازن:

$$I_S = \frac{V}{R} = \frac{100}{4} = 25\,A$$

$$\text{In Resonance:}\ V_L = V_C$$

$$V_C = V_L = I \times X_L = 25\,A \times 157.1\ \Omega = 3927.5\ \text{volts} = 3.9\,kV$$

مثال: یک مدار سری RLC، دارای یک مقاومت Ω ۱۲و یک اندوکتانس H ۰/۱۵ و یک خازن ۱۰۰μF که به یک منبع‌تغذیه 50Hz ، ۱۰۰ ولت متصل‌شده اند داریم. امپدانس کلی مدار، جریان مدار، ضریب توان را محاسبه نموده و نمودار فازوری آن را رسم کنید.



راکتانس سلفی هنگام تشدید:

$$X_L = 2\pi f\, L = 2\pi \times 50 \times 0.15 = 47.13$$

راکتانس خازنی هنگام تشدید:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f\, C} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 100 \times 10^{-6}} = 31.83\ \Omega$$

امپدانس مدار:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} = \sqrt{12^2 + \left(47.13 - 31.83\right)^2} = 19.4\ \Omega$$

جریان مدار:

$$I = \frac{V_s}{Z} = \frac{100}{19.4} = 5.14\ \text{A}$$

ضریب توان و زاویه فاز:

$$\text{Cos}\left(\varphi\right) = \frac{R}{Z} = \frac{12}{19.4} = 0.619 \Rightarrow \varphi = \text{Cos}^{-1}\left(0.619\right) = 51.8^{o}$$

محاسبه ولتاژها:

$$\begin{cases} V_R = RI = 12 \times 5.14 = 61.68 \approx 62\ \text{volts} \\ V_L = X_L I = 47.13 \times 5.14 = 242.25 \approx 242\ \text{volts} \\ V_C = X_C I = 31.83 \times 5.14 = 163.5\ \text{volts} \end{cases}$$