

الکترومغناطیس

دکتر شه روز نصیریان

**(1) Field and Wave
Electromagnetics**

David K. Cheng

(2) Introduction to Electrodynamics

David J. Griffiths

Reed College

(3)

FOUNDATIONS
OF
ELECTROMAGNETIC
THEORY

by

JOHN R. REITZ

*Department of Physics
Case Institute of Technology*

and

FREDERICK J. MILFORD

(4)

Fundamentals of Applied Electromagnetics

(8th Edition-2020)

Fawwaz T. Ulaby; Umberto Ravaioli

University of Illinois

فصل اول: معرفی درس و تعاریف

فصل دوم : آنالیز برداری

کمیت ها دو دسته اند:

- ۱- اسکالر (عددی) مانند بار، جریان، جرم، انرژی و
- ۲- برداری مانند میدان ثقل، میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی و ...

سه عنوان اصلی در این فصل:

- ۱- جبر برداری: جمع، تفریق و ضرب برداری
- ۲- دستگاههای مختصات متعامد (کارتزین، استوانه ای و کروی)
- ۳- حساب برداری- مشتق گیری و انتگرال گیری بردارها، انتگرال های خطی ، سطحی و حجمی، عملگر دل، عملیات با گرادیان، دیورژانس و کرل

جمع و تفریق بردارها:

هر بردار دارای خصوصیات زیر است:

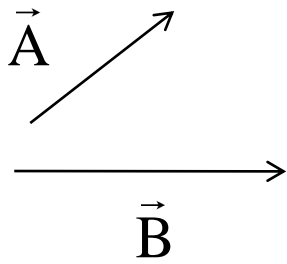
۱- اندازه، ۲- جهت، ۳- نقطه اثر و ۴- می بایست از قوانین جمع برداری تبعیت نماید.

$$\vec{A} = |\mathbf{A}| \hat{n}_A \quad \left| \vec{A} \right| = A$$

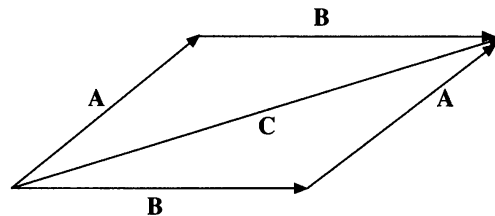
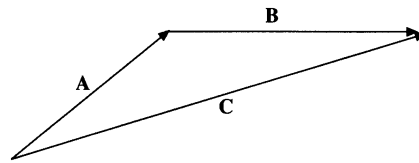
طول بردار
بردار نرمال

$$\hat{n}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

بردار نرمال با اندازه ی واحد است و در جهت بردار اصلی می باشد .



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$



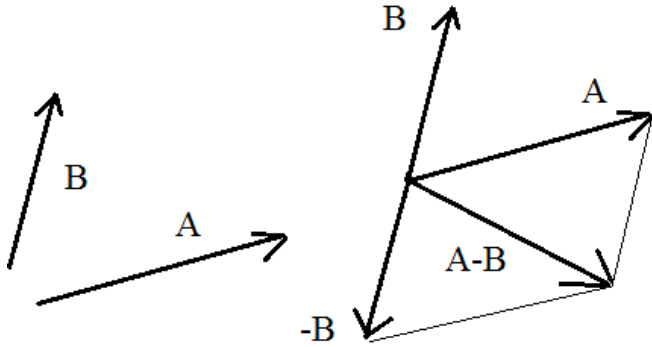
روش های جمع برداری:

۱- قاعده ی انتها به ابتدا

۲- قاعده متوازی الاضلاع

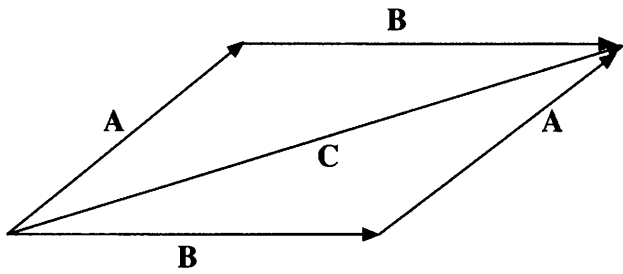
تفریق دو بردار

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



قوانین جمع برداری:
۱- قانون جابجایی

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



۲- قانون انجمنی

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C},$$

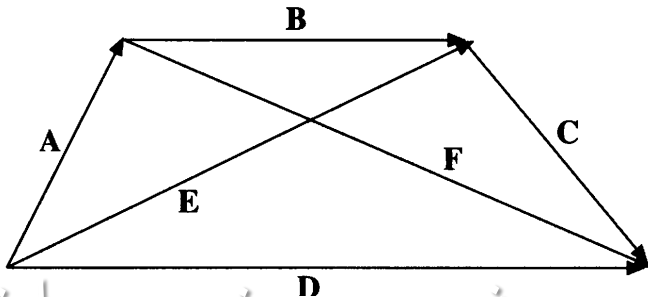
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{E}.$$

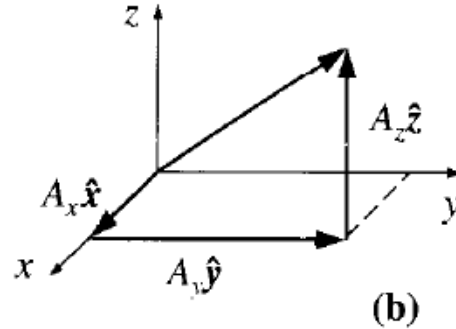
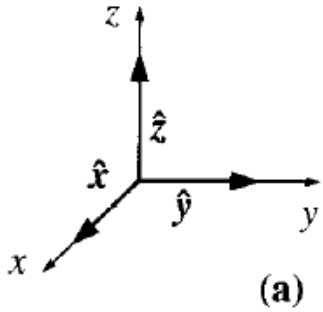
$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{C}.$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{F}.$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{F}.$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$





$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad \text{or}$$

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

$$|\mathbf{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}.$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) + (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z})$$

$$= (A_x + B_x) \hat{x} + (A_y + B_y) \hat{y} + (A_z + B_z) \hat{z}.$$

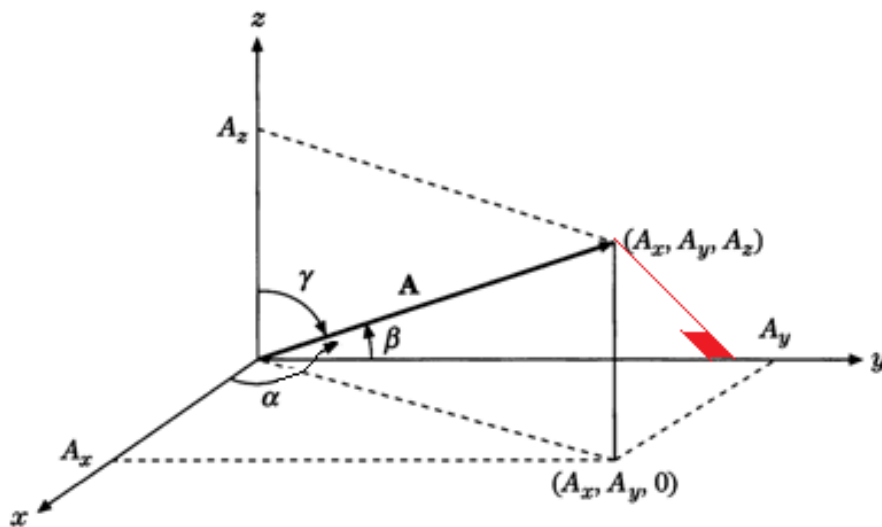
$$a\mathbf{A} = (aA_x) \hat{x} + (aA_y) \hat{y} + (aA_z) \hat{z}.$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \hat{x} + (A_y + B_y) \hat{y} + (A_z + B_z) \hat{z},$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x) \hat{x} + (A_y - B_y) \hat{y} + (A_z - B_z) \hat{z},$$

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \hat{x}(A_x \pm B_x) + \hat{y}(A_y \pm B_y) + \hat{z}(A_z \pm B_z).$$

حاصل مجموع کسینوسهای هادی:



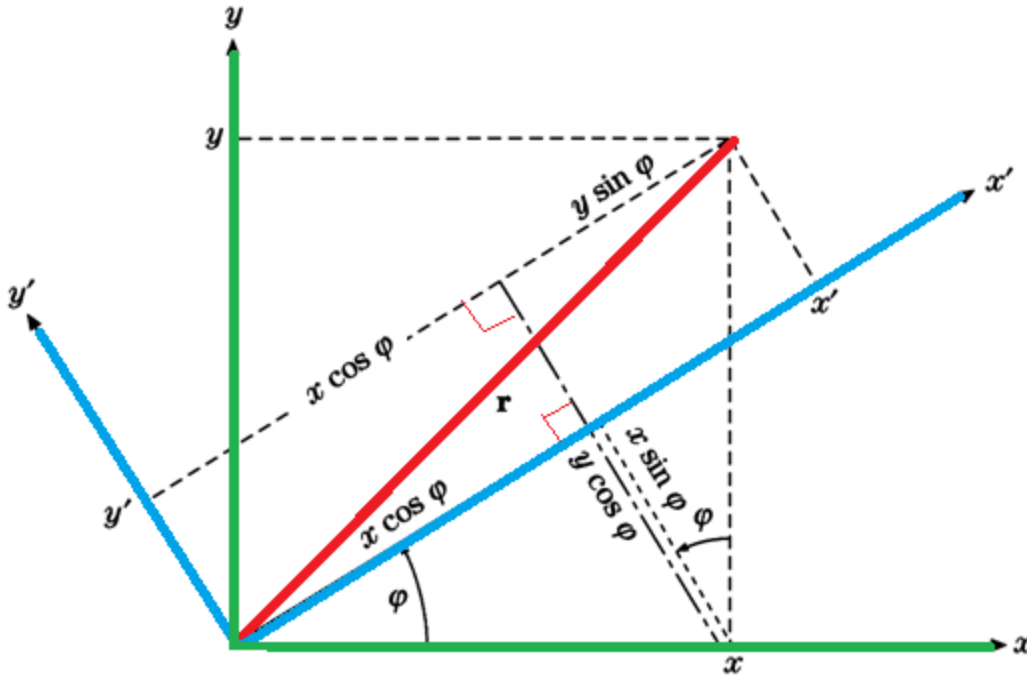
$$\mathbf{r} \leftrightarrow (x, y, z).$$

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(r \cos \alpha)^2 + (r \cos \beta)^2 + (r \cos \gamma)^2} =$$

$$r \sqrt{(\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\cos \gamma)^2} \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

چرخش دستگاه مختصات:



$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi.\end{aligned}$$

or

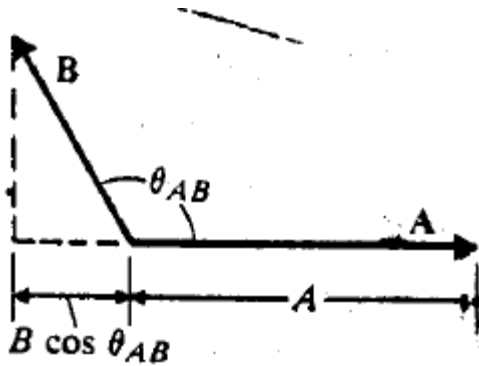
$$\begin{aligned}A'_x &= A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi, \\A'_y &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

شهر روز نصیریان

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\theta_{\text{between A and B}})$$

۱- ضرب عددی یا داخلی



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$$

$$A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$$

Commutative law: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Distributive law: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$.

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1, \quad \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0.$$

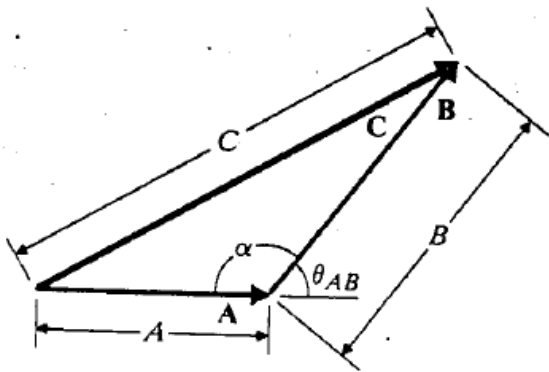
$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}) \cdot (B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2, \quad \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = A_x, \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{y}} = A_y, \text{ and } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{z}} = A_z$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv \sum_i B_i A_i = \sum_i A_i B_i = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv A_B B = A B_A = AB \cos \theta.$$

مثال: قانون کسینوسها را در یک مثلث ثابت نمایید.



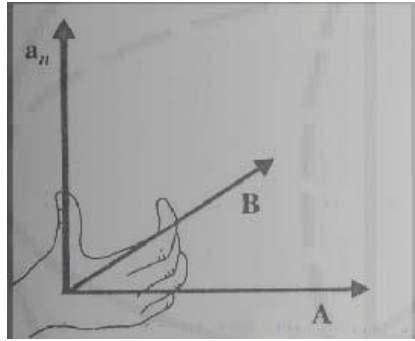
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \text{and} \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = C^2$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

$$= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2}(C^2 - A^2 - B^2) \\ C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta. \end{cases}$$

۲- ضرب برداری یا خارجی



$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \quad \text{with } C = AB \sin \theta.$$

حاصلضرب خارجی جایجا پذیر نیست.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0},$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} &= \hat{\mathbf{z}}, & \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{x}}, & \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{y}}, \\ \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}} &= -\hat{\mathbf{z}}, & \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} &= -\hat{\mathbf{x}}, & \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} &= -\hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

نمونه هایی از کاربرد این ضرب:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F}_M = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

خواص این ضرب:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C},$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C},$$

$$\mathbf{A} \times (y\mathbf{B}) = y\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (y\mathbf{A}) \times \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &\equiv \mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z) = (A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}) \times (B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}) \\
&= (A_x B_y - A_y B_x) \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} + (A_x B_z - A_z B_x) \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} \\
&\quad + (A_y B_z - A_z B_y) \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z, \quad C_z = A_x B_y - A_y B_x,$$

or

$$C_i = A_j B_k - A_k B_j, \quad i, j, k \text{ all different,}$$

or

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \equiv \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix},$$

مثال: اگر $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ باشد حاصل عبارات زیر را محاسبه نمایید. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = ?$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = ?$, $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = ?$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$= A_x(A_y B_z - A_z B_y) + A_y(A_z B_x - A_x B_z) + A_z(A_x B_y - A_y B_x)$$

$$= 0.$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0.$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$$

$$= A^2 B^2 - A^2 B^2 \cos^2 \theta$$

$$= A^2 B^2 \sin^2 \theta.$$

۳- ضرب سه بردار:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

۱-۳- ضرب سه گانه عددی:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x)$$

$$= \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$= -\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{B} = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{C}, \text{ and so on.}$$

مثال: متوازی السطوح، قاعده ای با مساحت معادل $|\mathbf{B} \times \mathbf{C}| = |BC \sin \theta_1|$

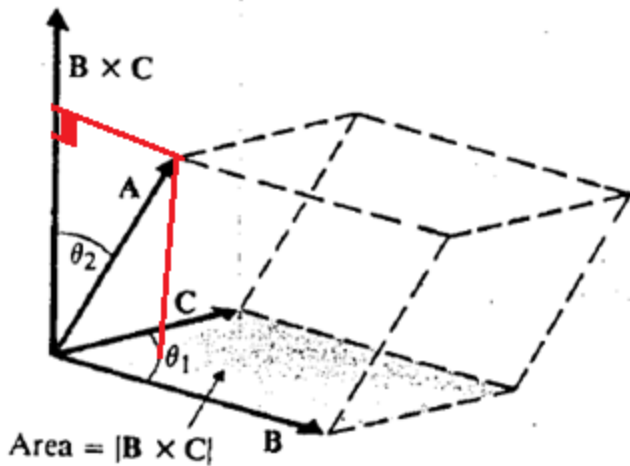
و ارتفاعی برابر با $|A \cos \theta_2|$ دارد.

$$|ABC \sin \theta_1 \cos \theta_2|$$

حجم متوازی السطوح می شود:

پس حاصلضرب $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ حجم متوازی السطوح را می دهد

دو رابطه ی مفید:



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}.$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

مثال: مطلوبست محاسبه ی ضرب های زیر برای بردارهای داده شده.

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}} = (1, 2, -1), \quad \mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}} = (0, 1, 1), \quad \mathbf{C} = \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} = (0, 1, 1),$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = ? , \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = ?$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}} = -(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}) - (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}) \\ &= -\mathbf{B} - \mathbf{C}. \end{aligned}$$

۳-۲- ضرب سه گانه برداری:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

این ضرب به قاعده ی بک-کب (Back-cab) معروف است.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$$

روابطی مفید و قابل اثبات:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})\mathbf{D}.$$

با محاسبه ی مقادیر چپ و راست روابط بالا آنها را ثابت نمایید.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{A}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

مثال: A ، B و C سه برداری هستند که مبدا آنها در مبدا مختصات قرار دارند. نشان دهید که بردار زیر بر صفحه

$$D = (A \times B) + (B \times C) + (C \times A) \quad \text{ای که از نقاط } A, B \text{ و } C \text{ می گذرد، عمود است.}$$

$A-B$ و $B-C$ دو بردار متفاوت واقع در صفحه هستند. می بایست ثابت نماییم که این دو بردار بر D عمودند. پس

ضرب زیر را تشکیل می دهیم:

$$K = D \cdot (A - B) = [(A \times B) + (B \times C) + (C \times A)] \cdot (A - B) =$$

$$\underbrace{(A \times B) \cdot A}_{=0} + \underbrace{(B \times C) \cdot A}_{=0} + \underbrace{(C \times A) \cdot A}_{=0} - \underbrace{(A \times B) \cdot B}_{=0} - \underbrace{(B \times C) \cdot B}_{=0} - \underbrace{(C \times A) \cdot B}_{=0} \Rightarrow$$

$$K = (B \times C) \cdot A - (C \times A) \cdot B \xrightarrow{a \cdot (b \times c) = c \cdot (a \times b) = b \cdot (c \times a)} K = 0$$

$$K' = D \cdot (B - C) = [(A \times B) + (B \times C) + (C \times A)] \cdot (B - C) =$$

$$\underbrace{(A \times B) \cdot B}_{=0} + \underbrace{(B \times C) \cdot B}_{=0} + \underbrace{(C \times A) \cdot B}_{=0} - \underbrace{(A \times B) \cdot C}_{=0} - \underbrace{(B \times C) \cdot C}_{=0} - \underbrace{(C \times A) \cdot C}_{=0} \Rightarrow$$

$$K' = (C \times A) \cdot B - (A \times B) \cdot C \xrightarrow{a \cdot (b \times c) = c \cdot (a \times b) = b \cdot (c \times a)} K' = 0$$

دستگاه های مختصات:

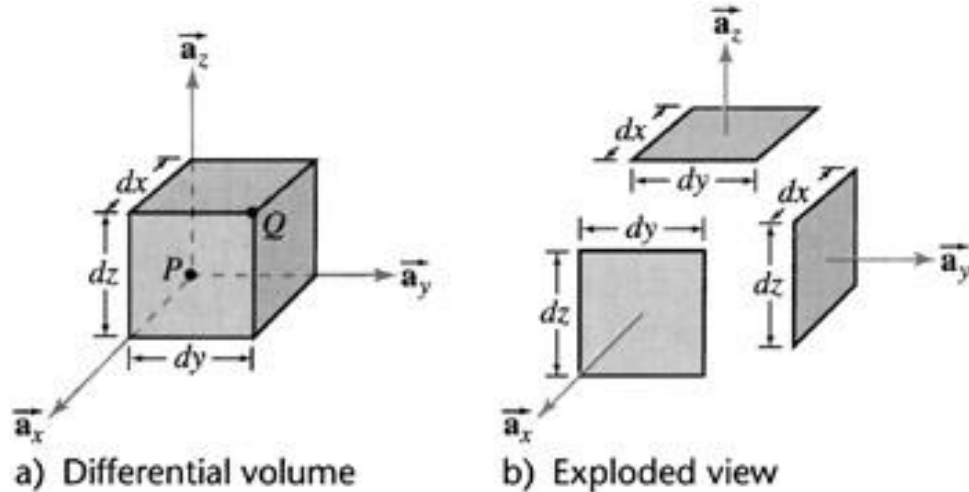
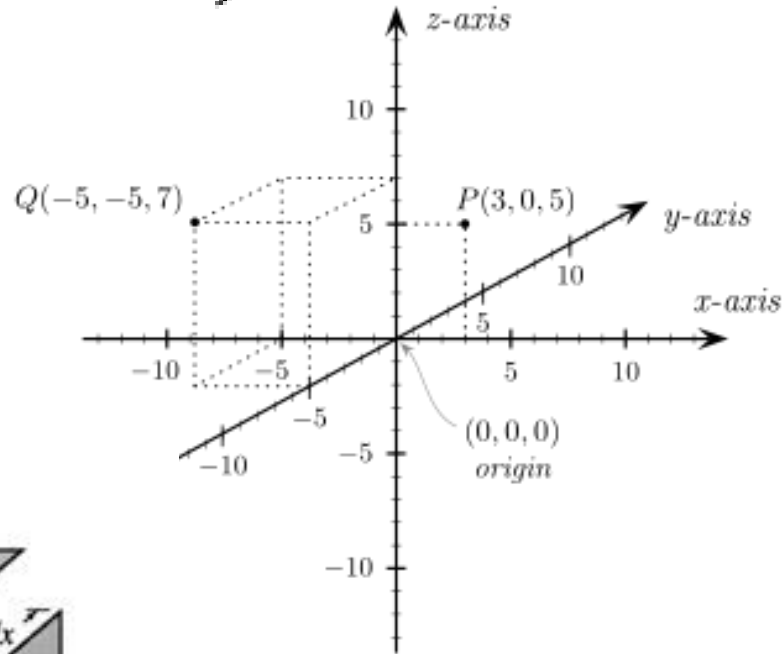
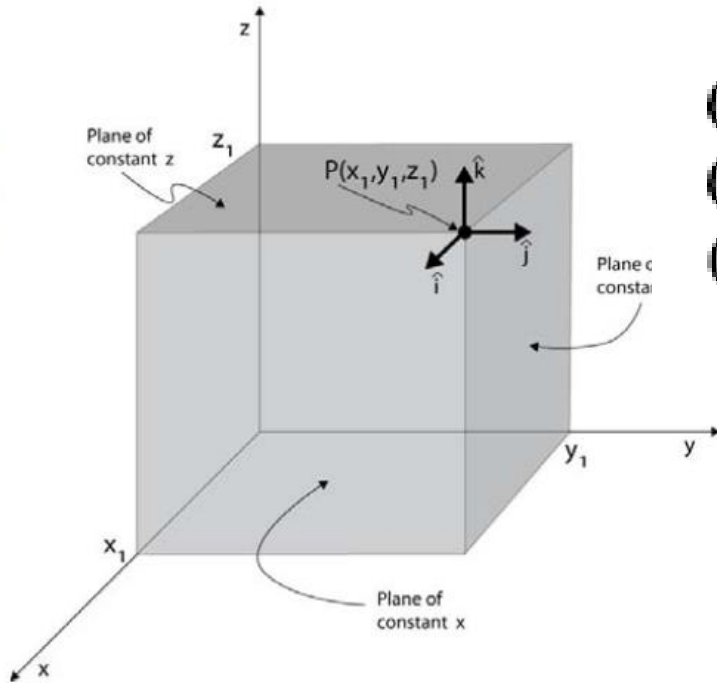
۱- دستگاه مختصات کارتزین

این دستگاه متعامد راستگرد است.

$$(-\infty < x < \infty)$$

$$(-\infty < y < \infty)$$

$$(-\infty < z < \infty)$$



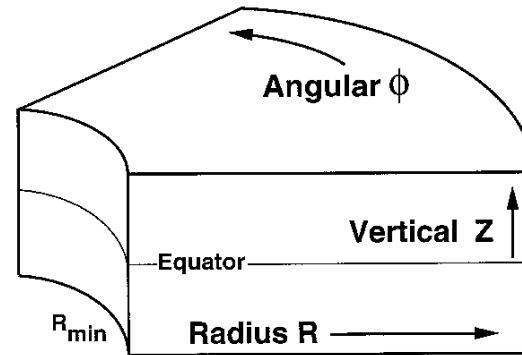
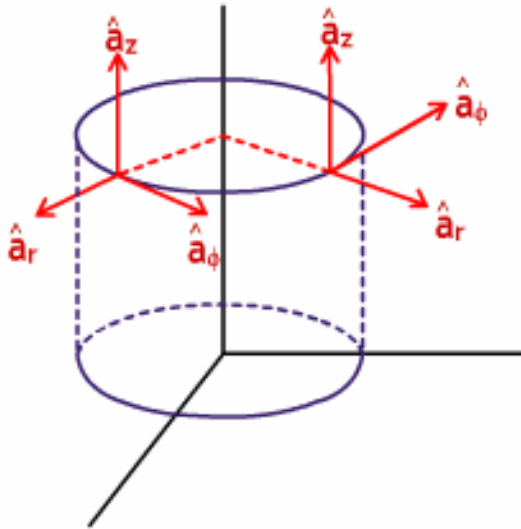
a) Differential volume

b) Exploded view

$$dL = dx, dy \text{ or } dz$$

$$dS = dx dy, dx dz \text{ or } dy dz$$

$$dV = dx dy dz$$



Cylindrical Coordinates (ρ, ϕ, z)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad x = \rho \cos \phi$$

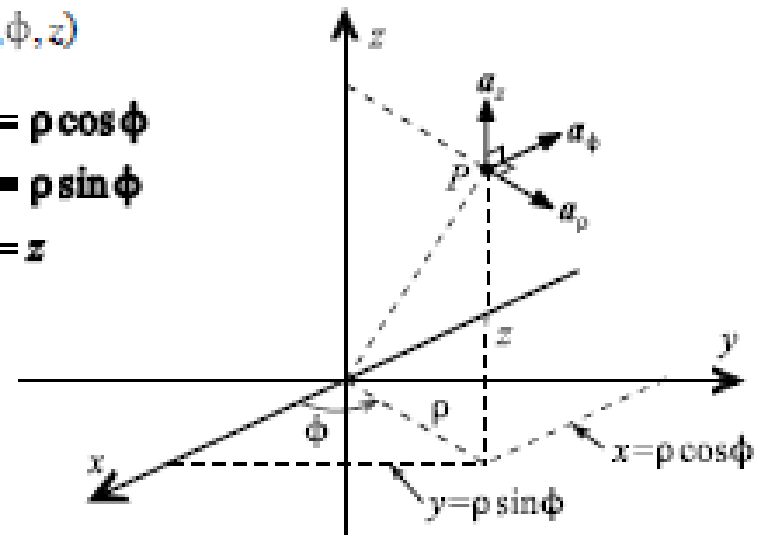
$$\phi = \tan^{-1}(y/x) \quad y = \rho \sin \phi$$

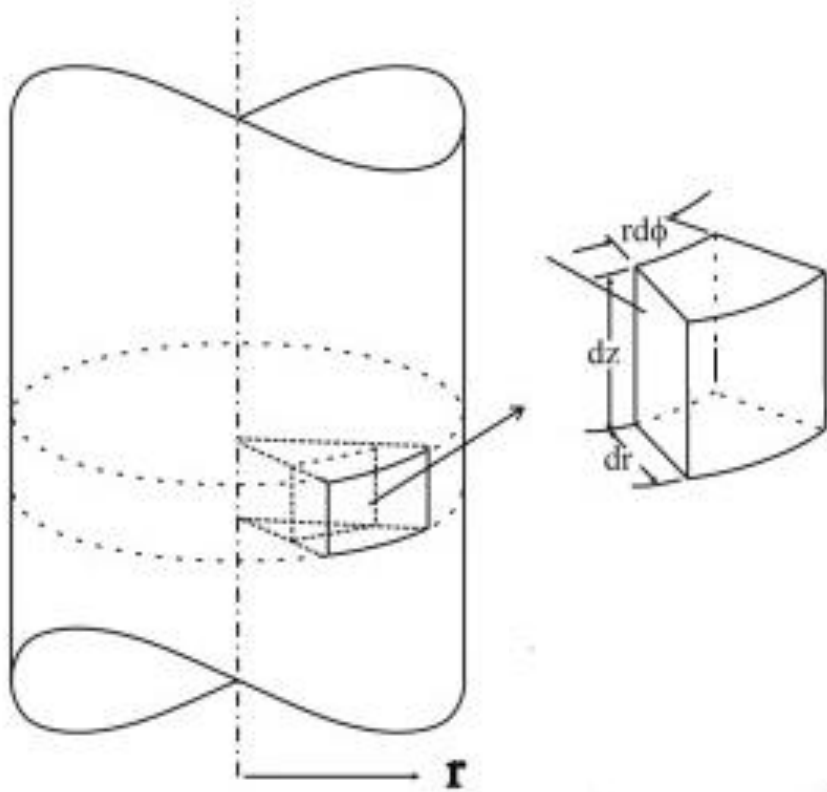
$$z = z \quad z = z$$

$$(0 \leq \rho < \infty)$$

$$(0 \leq \phi < 2\pi)$$

$$(-\infty < z < \infty)$$



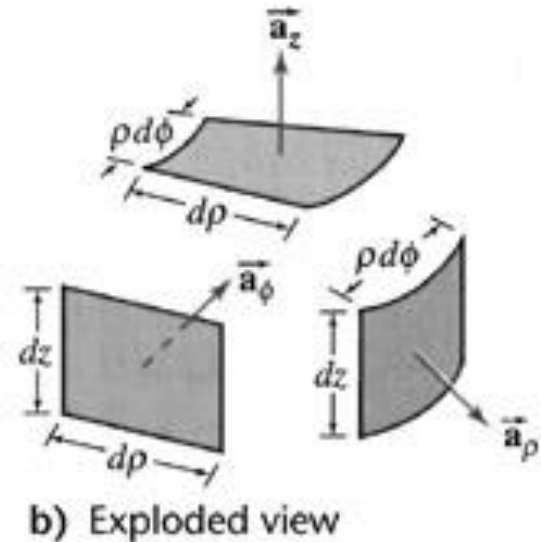
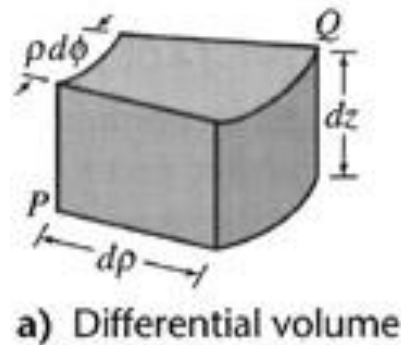


$$dL = dr, \rho d\phi \text{ or } dz$$

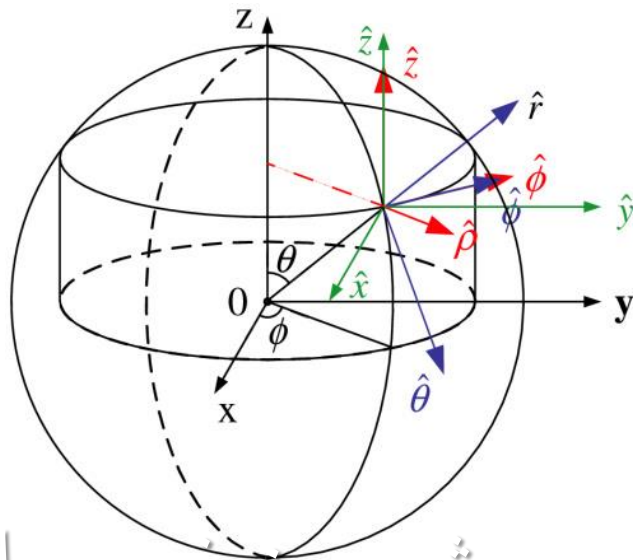
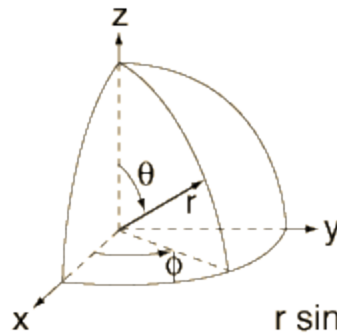
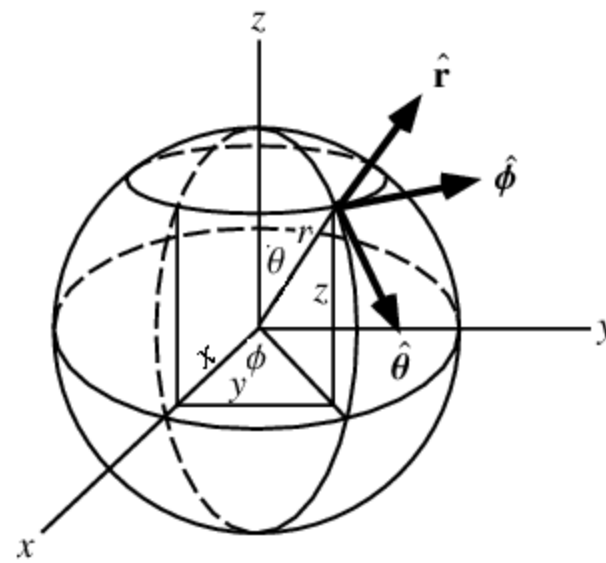
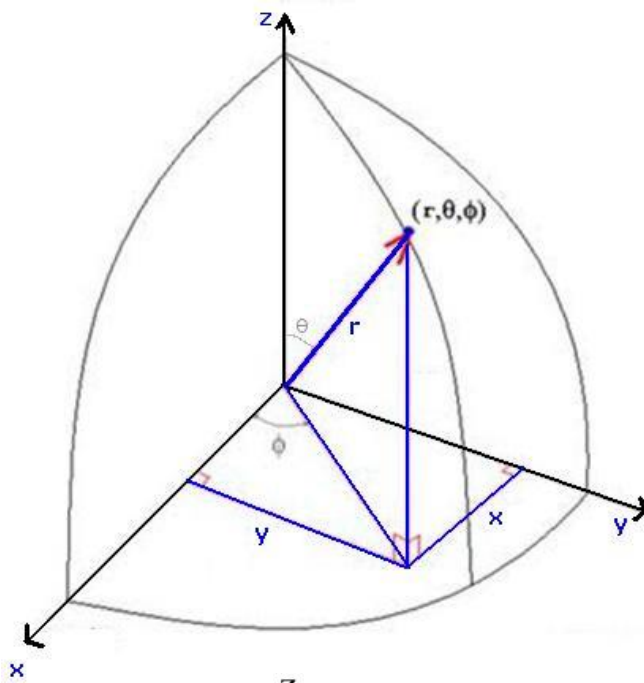
$$dS = dr dz, \rho d\phi dr \text{ or } \rho d\phi dz$$

$$dV = \rho dr d\phi dz$$

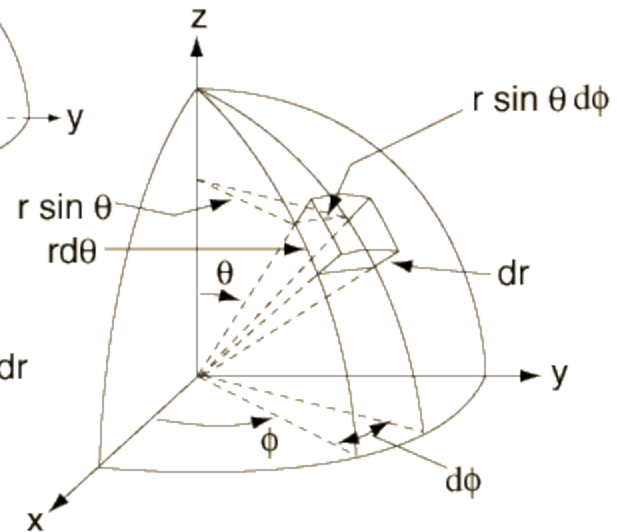
$$dL = \sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2}$$

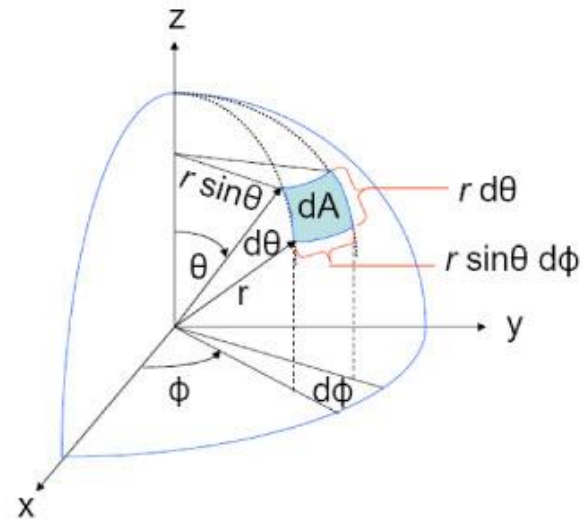
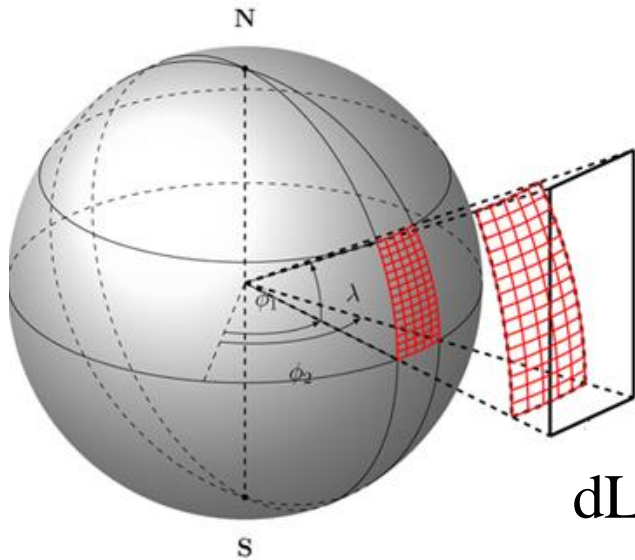


(r, θ, ϕ)



Volume element
 $dV = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$





$$dL = dr, r \sin \theta d\phi \text{ or } r d\theta$$

$$dS = r d\theta dr, r \sin \theta d\phi dr \text{ or } r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

Spherical Coordinates (r, θ, ϕ)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right)$$

$$\phi = \tan^{-1}(y/x)$$

$$(0 \leq r < \infty)$$

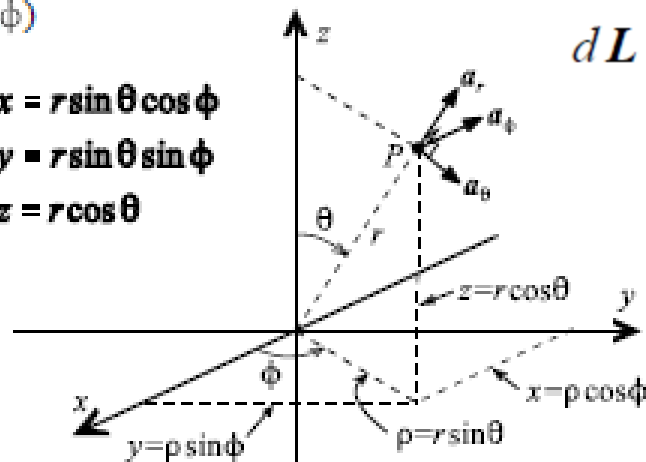
$$(0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$(0 \leq \phi < 2\pi)$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$



$$dL = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}$$

Coordinate system	Coordinates	Range	Unit vectors	Length elements	Coordinate surfaces
Rectangular	x	$-\infty$ to $+\infty$	\hat{x} or \hat{i}	dx	Plane $x=\text{constant}$
	y	$-\infty$ to $+\infty$	\hat{y} or \hat{j}	dy	Plane $y=\text{constant}$
	z	$-\infty$ to $+\infty$	\hat{z} or \hat{k}	dz	Plane $z=\text{constant}$
Cylindrical	r	0 to ∞	\hat{r}	dr	Cylinder $r=\text{constant}$
	ϕ	0 to 2π	$\hat{\phi}$	$r d\phi$	Plane $\phi=\text{constant}$
	z	$-\infty$ to $+\infty$	\hat{z}	dz	Plane $z=\text{constant}$
Spherical	r	0 to ∞	\hat{r}	dr	Sphere $r=\text{constant}$
	θ	0 to π	$\hat{\theta}$	$r d\theta$	Cone $\theta=\text{constant}$
	ϕ	0 to 2π	$\hat{\phi}$	$r \sin \theta d\phi$	Plane $\phi=\text{constant}$

تبدیل مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی به یکدیگر

گاهی اوقات بایستی مختصات نقطه‌ای که در دستگاه مختصات نمایش داده شده است در دستگاه دیگری بیان شود و یا نمایش تحلیلی بردار را در مختصات دیگری ارائه شود که عمده‌ترین علت جمع و یا ترکیب دو برداری است که در دستگاه مختصاتی ارائه شده‌اند که بردارهای واحد تابع مکان هستند یعنی: $\hat{a}_r, \hat{a}_\phi, \hat{a}_R, \hat{a}_\theta$

بنابراین نیازمند تبدیل پارامترها و مؤلفه‌های مختلف در يك دستگاه به دستگاه دیگر است.

-تبدیل مختصات استوانه‌ای به مستطیلی و برعکس

تبدیل متغیر یا پارامترهای مختصات استوانه‌ای به مستطیلی:

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$z = z$$

برعکس:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل مختصات مستطیلی به استوانه‌ای:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

و برعکس: ماتریس تبدیل مختصات استوانه‌ای به مستطیلی:

مثال: مطلوبست نمایش بردار \bar{A} در مختصات مستطیلی:

$$\bar{A} = \hat{a}_r 3 \cos \varphi - \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_z 5$$

$$A_r = 3 \cos \varphi \quad , \quad A_\varphi = -2r \quad , \quad A_z = 5$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \cos \varphi \\ -2r \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cos^2 \varphi + 2r \sin \varphi \\ 3 \sin \varphi \cos \varphi - 2r \cos \varphi \\ 5 \end{bmatrix}$$

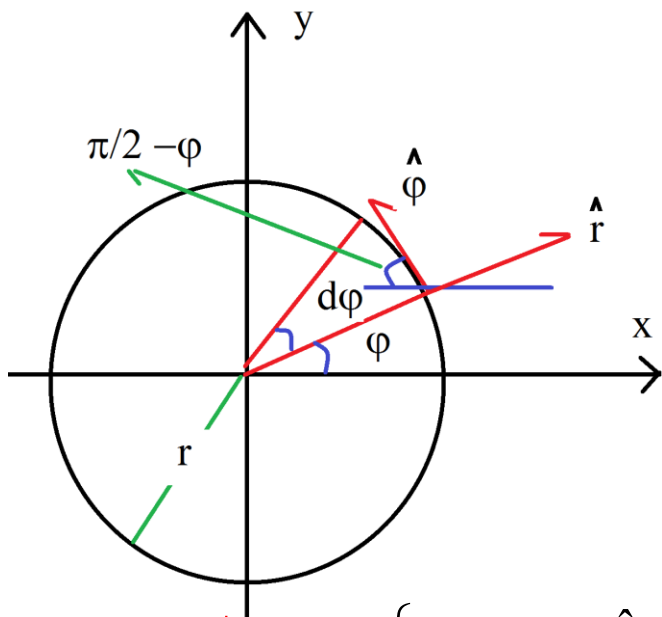
سپس پارامترهای موجود در مؤلفه‌های بدست آمده را به مختصات مستطیلی تبدیل می‌کنیم:

$$A_x = 3 \frac{x^2}{x^2 + y^2} + 2y \quad , \quad A_y = 3 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 2x = \frac{3xy}{x^2 + y^2} - 2x$$

$$\bar{A} = \hat{a}_x \left(\frac{3x^2}{x^2 + y^2} + 2y \right) + \hat{a}_y \left(\frac{3xy}{x^2 + y^2} - 2x \right) + \hat{a}_z 5$$

بنابراین:

تبدیلات مختصات استوانه ای به کارتزین و بالعکس (اثبات):



$$\hat{r} = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \quad ; \quad \hat{k} = \hat{k}$$

$$\hat{\phi} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) (-\hat{i}) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) (\hat{j})$$

$$\Rightarrow \hat{\phi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$$

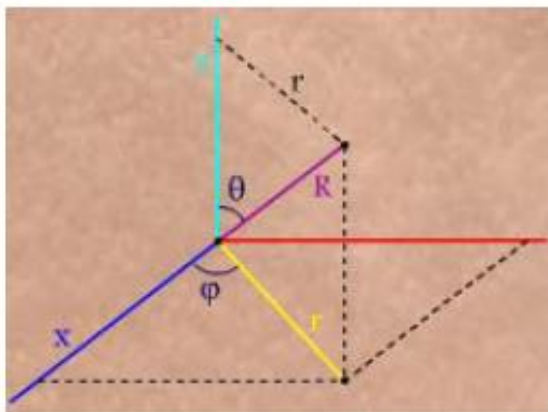
$$\begin{cases} \times \sin \varphi \\ \times \cos \varphi \end{cases} \begin{cases} \hat{r} = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{\phi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \varphi \hat{r} = \sin \varphi \cos \varphi \hat{i} + \sin^2 \varphi \hat{j} \\ \cos \varphi \hat{\phi} = -\sin \varphi \cos \varphi \hat{i} + \cos^2 \varphi \hat{j} \end{cases} +$$

$$\Rightarrow \sin \varphi \hat{r} + \cos \varphi \hat{\phi} = (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \hat{j} \Rightarrow \boxed{\hat{j} = \sin \varphi \hat{r} + \cos \varphi \hat{\phi}}$$

$$\begin{cases} \times \cos \varphi \\ \times -\sin \varphi \end{cases} \begin{cases} \hat{r} = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{\phi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi \hat{r} = \cos^2 \varphi \hat{i} + \sin \varphi \cos \varphi \hat{j} \\ -\sin \varphi \hat{\phi} = \sin^2 \varphi \hat{i} - \sin \varphi \cos \varphi \hat{j} \end{cases} +$$

$$\cos \varphi \hat{r} - \sin \varphi \hat{\phi} = (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \hat{i} \Rightarrow \boxed{\hat{i} = \cos \varphi \hat{r} - \sin \varphi \hat{\phi}}$$

-تبدیل متغیرهای مختصات کروی به مستطیلی و برعکس تبدیل متغیرهای مختصات کروی به مستطیلی



$$x = R \sin \theta \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = R \cos \theta$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

برعکس:

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$$

ماتریس تبدیل دستگاه مختصات کارتیزین
به دستگاه مختصات کروی

\Rightarrow

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

ماتریس تبدیل دستگاه مختصات کروی
به دستگاه مختصات کارتیزین

$$\hat{i} = \sin \theta \cos \varphi \hat{r} + \cos \theta \cos \varphi \hat{\theta} - \sin \varphi \hat{\varphi}$$

$$\hat{j} = \sin \theta \sin \varphi \hat{r} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\varphi} \quad \Rightarrow$$

$$\hat{k} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix}$$

مثال:

بردار مکان يك نقطه كلي در مختصات كروي را بدست آورید:

$$\bar{A} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta \\ x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi - z \sin \theta \\ -x \sin \varphi + y \cos \varphi + 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_R &= x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta \\ &= R \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + R \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R \cos^2 \theta \\ &= R \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + R \cos^2 \theta \\ &= R \sin^2 \theta + R \cos^2 \theta \\ &= R(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = R \end{aligned}$$

$$A_\theta = 0 \quad , \quad A_\varphi = 0$$

$$\bar{A} = R\hat{a}_R$$

و به همین ترتیب

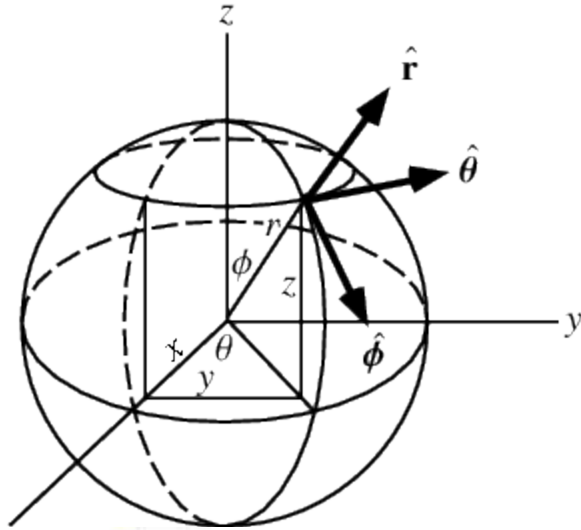
بنابراین:

و یا

$$\bar{A} = \bar{R}$$

شهر روز نصیریان

تبدیلات مختصات کروی به کارتزین و بالعکس (اثبات):



$$\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$$

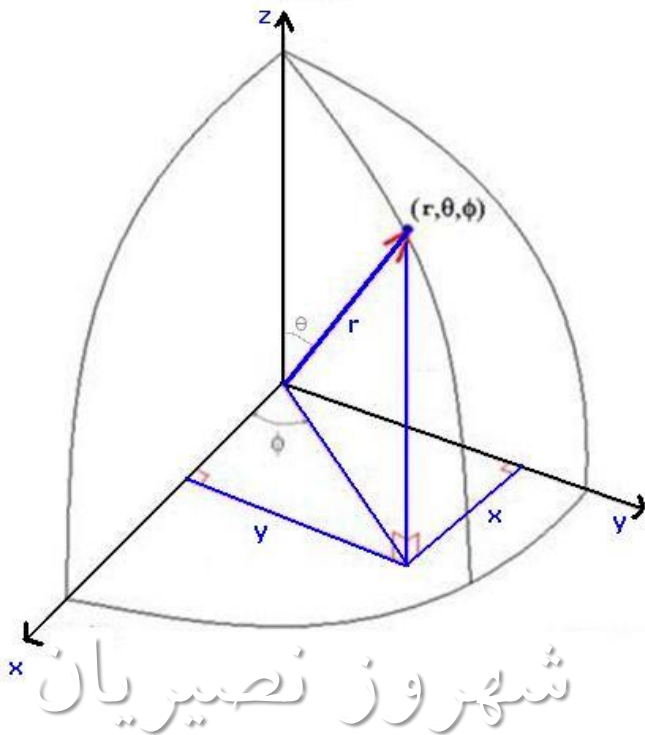
$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$$

$$\begin{cases} \times \sin \theta \\ \times \cos \theta \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \\ \hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{r} = \sin^2 \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin^2 \theta \sin \varphi \hat{j} + \sin \theta \cos \theta \hat{k} \\ \hat{\theta} = \cos^2 \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos^2 \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \cos \theta \hat{k} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \times \sin \varphi \\ \times \cos \varphi \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \end{array} \right. \Rightarrow$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{r} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \sin \varphi = \cos \varphi \sin \varphi \hat{i} + \sin^2 \varphi \hat{j} \\ \hat{\phi} \cos \varphi = -\sin \varphi \cos \varphi \hat{i} + \cos^2 \varphi \hat{j} \end{array} \right. \Rightarrow$$

+

$$\hat{r} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \hat{\phi} \cos \varphi = (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \hat{j} \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{j} = \sin \theta \sin \varphi \hat{r} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\phi}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \times \cos \varphi \\ \times -\sin \varphi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{\phi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{r} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \varphi = \cos^2 \varphi \hat{i} + \sin \varphi \cos \varphi \hat{j} \\ -\sin \varphi \hat{\phi} = \sin^2 \varphi \hat{i} - \sin \varphi \cos \varphi \hat{j} \end{array} \right. \Rightarrow$$

+

$$\hat{r} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \sin \varphi \hat{\phi} = (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \hat{i} \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{i} = \sin \theta \cos \varphi \hat{r} + \cos \theta \cos \varphi \hat{\theta} - \sin \varphi \hat{\phi}}$$

$$\begin{cases} \times \cos \theta \\ \times -\sin \theta \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \\ \hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta \hat{r} = \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos^2 \theta \hat{k} \\ -\sin \theta \hat{\theta} = -\sin \theta \cos \theta \cos \varphi \hat{i} - \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \hat{j} + \sin^2 \theta \hat{k} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta = (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \hat{k} \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{k} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}}$$

-تبدیل مختصات کروی به استوانه‌ای و برعکس:

این تبدیل بندرت استفاده می‌شود:

تبدیل پارمترها

$$\begin{cases} r = R \sin \theta \\ \varphi = \varphi \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ \varphi = \varphi \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

مثال: بردار A را در دستگاه مختصات استوانه ای بیان نمایید. $A = (y + z)\hat{i} + (x + z)\hat{j} + (x + y)\hat{k}$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} ; \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \rho \sin \varphi + z \\ \rho \cos \varphi + z \\ \rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \rho \sin \varphi \cos \varphi + z \cos \varphi + \rho \sin \varphi \cos \varphi + z \sin \varphi \\ -\rho \sin^2 \varphi - z \sin \varphi + \rho \cos^2 \varphi + z \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_\rho = \rho \sin 2\varphi + z(\cos \varphi + \sin \varphi) \\ A_\varphi = \rho \cos 2\varphi - z(\sin \varphi - \cos \varphi) \\ A_z = \rho(\sin \varphi + \cos \varphi) \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

مثال: میدان برداری زیر را در دستگاه مختصات کارتزین بیان نمایید.

ابتدا مولفه ها را در دستگاه مختصات کارتزین می نویسیم:

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) (\sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) +$$

$$\left(\frac{\sin \theta}{r} \right) (\cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{j}} - \sin \theta \hat{\mathbf{k}})$$

حال هر مولفه را به مختصات کارتزین می بریم.

$$\mathbf{E} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta \cos \varphi}{r} \hat{\mathbf{i}} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta \sin \varphi}{r} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \varphi}{r} \hat{\mathbf{k}} =$$

$$\frac{2(r \cos \theta)(r \sin \theta \cos \varphi)}{r^3} \hat{\mathbf{i}} + \frac{2(r \cos \theta)(r \sin \theta \sin \varphi)}{r^3} \hat{\mathbf{j}} + \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \varphi}{r^3} \hat{\mathbf{k}} =$$

$$\frac{2zx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{i}} + \frac{2zy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{j}} + \frac{z^2 - (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{k}}$$

مثال: میدان برداری زیر را در دستگاههای مختصات استوانه ای و کروی بیان نمایید. $\mathbf{A} = x \hat{\mathbf{y}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = x \hat{\mathbf{y}} \\ x = \rho \cos \varphi \quad \Rightarrow \mathbf{A} = \rho \cos \varphi (\sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\phi}) = \rho \cos \varphi \sin \varphi \hat{\rho} + \rho \cos^2 \varphi \hat{\phi} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin \varphi \hat{\rho} + \cos \varphi \hat{\phi} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = x \hat{\mathbf{y}} \\ x = r \sin \theta \cos \theta \quad \Rightarrow \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{A} = r \sin \theta \cos \varphi (\sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{A} = r \sin \theta \cos \varphi (r \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \hat{\mathbf{r}} + r \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta \cos^2 \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}})$$

گرادیان یک میدان عددی (تابع اسکالر)

توابعی به شکل زیر را توابع اسکالر یا یک میدان عددی می نامیم. ممکن است این توابع به پارامترهای مختلف بستگی داشته باشند ولی جهت دار نیستند. مانند دما که ممکن است به پارامترهای ارتفاع یا زمان بستگی داشته باشد.

$$F = x^2 \sqrt{y} z^{\frac{1}{3}} \quad \text{or} \quad F = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{z}$$

به عبارت دیگر اگر یک تابع نقطه ای نرده ای داشته باشیم، یعنی تابعی که مقدار آن وابسته به مقدار مختصات در آن نقطه باشد، مقدار تابع در یک نقطه ی مشخص در فضا مستقل از چرخش دستگاه مختصات است. بنابراین داریم:

$$dF(x, y) \equiv F(x + dx, y + dy) - F(x, y)$$

$$= [F(x + dx, y + dy) - F(x, y + dy)] + [F(x, y + dy) - F(x, y)]$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy, \quad \Rightarrow \quad \text{total variation of a function } F(x, y),$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy.}$$

مانند عملیات بالا برای تابع اسکالر با سه متغیر می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
d\varphi(x, y, z) &\equiv [\varphi(x + dx, y + dy, z + dz) - \varphi(x, y + dy, z + dz)] \\
&\quad + [\varphi(x, y + dy, z + dz) - \varphi(x, y, z + dz)] \\
&\quad + [\varphi(x, y, z + dz) - \varphi(x, y, z)] \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.
\end{aligned}$$

بنابراین برداری که اندازه و جهت حداکثر نرخ فضایی افزایش یک کمیت عددی را نمایش می دهد را گرادیان آن کمیت عددی گوئیم. در اینجا تبدیلی ساختیم که با مولفه های مشتقات پاره ای تابع ساخته شده و مستقل از چرخش دستگاه مختصات در فضا می باشد.

می توان نمادنگاری مناسبی بکار برد و نوشت:

$$\text{del operator: } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \Rightarrow$$

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \varphi \Rightarrow \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} \right)$$

$$\text{or} \quad \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{z} \right)$$

مثال : گرادیان تابع زیر را حساب نمایید:

$$V(r) = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

$$\nabla V(r) = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial V(r)}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial V(r)}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial V(r)}{\partial z}. \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x} = \frac{dV(r)}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{x}{r}.$$

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x} = \frac{dV(r)}{dr} \cdot \frac{x}{r}.$$

$$\begin{aligned} \nabla V(r) &= (\hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}z) \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dV}{dr} = \hat{\mathbf{r}} \frac{dV}{dr}. \end{aligned}$$

یکی از کاربردهای مستقیم گرادیان تابع اسکالر عبارت است از ضرب نقطه ای آن در نمو طول

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}dx + \hat{\mathbf{y}}dy + \hat{\mathbf{z}}dz.$$

$$\nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi,$$

مثال : گرادیان توابع زیر را حساب نمایید:

$$(a) f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4.$$

$$(b) f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4.$$

$$(c) f(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z).$$

\Rightarrow

$$(a) \nabla f = 2x \hat{x} + 3y^2 \hat{y} + 4z^3 \hat{z}$$

$$(b) \nabla f = 2xy^3z^4 \hat{x} + 3x^2y^2z^4 \hat{y} + 4x^2y^3z^3 \hat{z}$$

$$(c) \nabla f = e^x \sin y \ln z \hat{x} + e^x \cos y \ln z \hat{y} + e^x \sin y (1/z) \hat{z}$$

مثال (۲-۱۶) : با محاسبه ی گرادیان پتانسیل زیر در نقطه ی $(1, 1, 0)$ ، مقدار میدان الکتریکی را در آن نقطه حساب نمایید.

$$V = E_0 e^{-x} \sin \frac{\pi y}{4}$$

$$E = -\nabla V \Rightarrow E = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}\right) E_0 e^{-x} \sin \frac{\pi y}{4} \Rightarrow E = \left(\hat{i} \sin \frac{\pi y}{4} - \hat{j} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi y}{4}\right) E_0 e^{-x} \Rightarrow$$

$$E(1, 1, 0) = \left(\hat{i} - \hat{j} \frac{\pi}{4}\right) \frac{E_0}{\sqrt{2} e}$$

دیورژانس یک میدان برداری: (div F)

در مطالعه ی میدان های برداری آنها را توسط خطوطی جهت دار و بردار شکل ترسیم می نماییم که خطوط شار یا خطوط جریان می باشند. هر چه خطوط بیشتر (با چگالی بیشتر) از یک نقطه یا یک سطح عبور نمایند، میدان برداری در آنجا قوی تر است. شار میدان برداری عبارت است از مجموعه خطوط میدان (یا جریان) میدان برداری گذرنده از سطح.

بنابراین تعبیر دیورژانس میدان برداری A در یک نقطه عبارت است از :
شار خالص خروجی A در واحد حجم، وقتی که این حجم حول نقطه به سمت صفر میل نماید:

$$\text{div A} = \nabla \cdot A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint A \cdot dS}{\Delta V}$$

به عبارت دیگر دیورژانس یک میدان برداری عبارت است از حاصلضرب داخلی عملگر دل در میدان برداری.
فلذا این عملیات موجب می شود تا مقدار شار یک میدان برداری که عددی اسکالر است بدست آید که مقدارش از نقطه ای به نقطه ی دیگر متفاوت است.

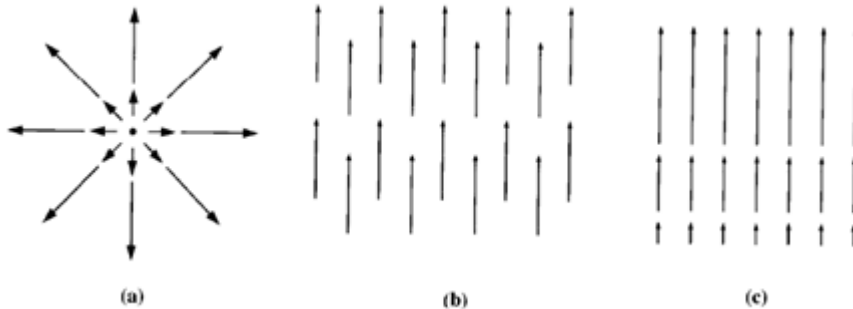
$$\nabla \cdot A = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

مثال : دیورژانس تابع $\mathbf{r}f(r)$ را حساب نمایید:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{r}f(r)) &= \frac{\partial}{\partial x}[x f(r)] + \frac{\partial}{\partial y}[y f(r)] + \frac{\partial}{\partial z}[z f(r)] \\ &= 3f(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{y^2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{z^2}{r} \frac{df}{dr} \\ &= 3f(r) + r \frac{df}{dr}.\end{aligned}$$

بنابراین شار خالص خروجی بردار \mathbf{A} از سطحی که حجمی را احاطه کرده است نمایشگر وجود یک منبع می باشد که منبع جریان نامیده می شود. و دیورژانس \mathbf{A} سنجشی از قدرت منبع جریان است. در شکل زیر نمونه هایی از منبع جریان نشان داده شده است.



$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{A})$$

مثال: رابطه ی فوق را ثابت نمایید.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) &= \nabla \cdot (\phi A_1 \mathbf{i} + \phi A_2 \mathbf{j} + \phi A_3 \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\phi A_3) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_3 + \phi \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) \\ &\quad + \phi \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) \\ &= (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{A}) \end{aligned}$$

The combination $\nabla \cdot (f\mathbf{V})$, in which f is a scalar function and \mathbf{V} is a vector function, may be written

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f\mathbf{V}) &= \frac{\partial}{\partial x} (fV_x) + \frac{\partial}{\partial y} (fV_y) + \frac{\partial}{\partial z} (fV_z) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} V_x + f \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} V_y + f \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} V_z + f \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ &= (\nabla f) \cdot \mathbf{V} + f \nabla \cdot \mathbf{V}, \end{aligned}$$

کرل یک تابع برداری یا تاو یک تابع برداری ($\text{curl } \mathbf{A}$):

نوع دیگری از منبع بنام منبع گردابی وجود دارد که باعث گردش یک میدان برداری به دور آن می شود.

حاصل کرل یک میدان برداری برداری است که اندازه ی آن حداکثر گردش خالص میدان برداری در واحد سطح است، وقتی سطح بسمت صفر میل می کند و جهت آن جهت عمود بر سطح است زمانی که سطح طوری جهت داده شده باشد که گردش خالص را حداکثر نماید.

چون عمود بر یک سطح می تواند در دو جهت باشد از قاعده ی دست راست کمک می گیریم که بیان می دارد اگر انگشتان دست راست جهت چرخش میدان یا $d\mathbf{L}$ را نشان دهند، انگشت شست جهت بردار نرمال عمود بر سطح را نشان می دهد.

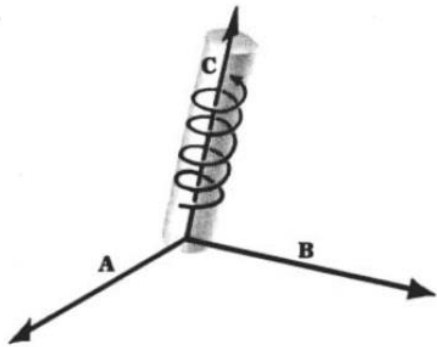
$$\text{curl } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left[\hat{\mathbf{n}} \left(\frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta V} \right) \right]_{\text{Max}} \quad \nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \times (V_x \hat{\mathbf{i}} + V_y \hat{\mathbf{j}} + V_z \hat{\mathbf{k}}) \quad \text{or}$$

$$\text{curl } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_1 \hat{\mathbf{i}} + A_2 \hat{\mathbf{j}} + A_3 \hat{\mathbf{k}})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathbf{i}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{j}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{k}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} \quad 43$$



مثال : کرل تابع $\nabla \times (\mathbf{r}f(r))$ را حساب نمایید:

$$\nabla \times (f\mathbf{V}) = f\nabla \times \mathbf{V} + (\nabla f) \times \mathbf{V} \quad \text{داریم:}$$

$$\nabla \times (\mathbf{r}f(r)) = f(r)\nabla \times \mathbf{r} + [\nabla f(r)] \times \mathbf{r}. \quad \text{پس می توان نوشت:}$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$$\nabla f(r) = \hat{\mathbf{r}}(df/dr) \quad \text{قبلاً محاسبه شده:}$$

$$\nabla \times \mathbf{r}f(r) = \frac{df}{dr}\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} = 0 \quad \text{پس} \quad \mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}r \text{ and } \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} = 0 \quad \text{فلذا چون:}$$

مثال : اتحاد زیر را حساب نمایید:

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}).$$

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad \text{داریم:}$$

که در آن عملگر دل تنها از \mathbf{B} مشتق می گیرد نه از \mathbf{A} . همچنین می توان نوشت:

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

با جمع دو رابطه ، رابطه ی اصلی اثبات می گردد.

1. $\nabla(U+V) = \nabla U + \nabla V$ or $\text{grad}(U+V) = \text{grad } u + \text{grad } V$
2. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$ or $\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div } \mathbf{A} + \text{div } \mathbf{B}$
3. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$ or $\text{curl}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{curl } \mathbf{A} + \text{curl } \mathbf{B}$
4. $\nabla \cdot (U\mathbf{A}) = (\nabla U) \cdot \mathbf{A} + U(\nabla \cdot \mathbf{A})$
5. $\nabla \times (U\mathbf{A}) = (\nabla U) \times \mathbf{A} + U(\nabla \times \mathbf{A})$
6. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
7. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$
8. $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$
9. $\nabla \cdot (\nabla U) \equiv \nabla^2 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ is called the *Laplacian* of U
 and $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ is called the *Laplacian operator*.
10. $\nabla \times (\nabla U) = \mathbf{0}$. The curl of the gradient of U is zero.
11. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. The divergence of the curl of \mathbf{A} is zero.
12. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

کاربرد های متوالی ∇ :

تا اینجا گرادیان، دیورژانس و کرل را تعریف کردیم که حاصل آنها بترتیب کمیت‌هایی برداری، نرده ای و برداری هستند. حال می خواهیم عبارات زیر را محاسبه نماییم: (ϕ تابعی اسکالر و \mathbf{A} و \mathbf{V} توابعی برداری اند).

(a) $\nabla \cdot \nabla \phi$, (b) $\nabla \times \nabla \phi$, (c) $\nabla \nabla \cdot \mathbf{V}$, (d) $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$, (e) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V})$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \nabla \cdot \nabla \phi &= \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

When ϕ is the electrostatic potential, we have

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 0$$

at points where the charge density vanishes, which is Laplace's equation of electrostatics.

Often the combination $\nabla \cdot \nabla$ is written ∇^2 , or Δ in the European literature.

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \nabla \times \nabla \phi &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \Rightarrow \nabla \times \nabla \phi = \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) \\ &\quad + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) = 0, \end{aligned}$$

برای محاسبه ی (c) می توان از اتحاد زیر کمک گرفت:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$$

(d)

$$\begin{aligned} \text{div curl } \mathbf{A} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \nabla \cdot \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

مشروط بر آنکه \mathbf{A} دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم باشد، ترتیب مشتق گیری اهمیت ندارد. پس دیورژانس کرل صفر است.

محاسبه ی (e) نیز آسان با استفاده از اتحاد بک-کب می باشد.

مثال: اگر $\phi = x^2yz^3$ و $\mathbf{A} = xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k}$ باشند مطلوبست محاسبه ی:

(a) $\nabla\phi$, (b) $\nabla \cdot \mathbf{A}$, (c) $\nabla \times \mathbf{A}$, (d) $\text{div}(\phi\mathbf{A})$, (e) $\text{curl}(\phi\mathbf{A})$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \nabla\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz^3)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz^3)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz^3)\mathbf{k} \\ &= 2xyz^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \cdot (xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^2y) = z - 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \times (xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(xz) - \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y) \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xz) \right) \mathbf{k} \\ &= 2x^2\mathbf{i} + (x - 4xy)\mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \operatorname{div}(\phi \mathbf{A}) &= \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \nabla \cdot (x^3 y z^4 \mathbf{i} - x^2 y^3 z^3 \mathbf{j} + 2x^4 y^2 z^3 \mathbf{k}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 y z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2 y^3 z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^4 y^2 z^3) = 3x^2 y z^4 - 3x^2 y^2 z^3 + 6x^4 y^2 z^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (e) \operatorname{curl}(\phi \mathbf{A}) &= \nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla \times (x^3 y z^4 \mathbf{i} - x^2 y^3 z^3 \mathbf{j} + 2x^4 y^2 z^3 \mathbf{k}) \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^3 y z^4 & -x^2 y^3 z^3 & 2x^4 y^2 z^3 \end{vmatrix} \\
 &= (4x^4 y z^3 + 3x^2 y^3 z^2) \mathbf{i} + (4x^3 y z^3 - 8x^3 y^2 z^3) \mathbf{j} - (2x y^3 z^3 + x^3 z^4) \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

مثال:

If $\phi = 2x^2 y - xz^3$, find (a) $\nabla \phi$ and (b) $\nabla^2 \phi$.

$$(a) \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} = (4xy - z^3) \mathbf{i} + 2x^2 \mathbf{j} - 3xz^2 \mathbf{k}$$

$$(b) \nabla^2 \phi = \text{Laplacian of } \phi = \nabla \cdot \nabla \phi \quad \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial}{\partial x}(4xy - z^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-3xz^2) = 4y - 6xz$$

Another method.

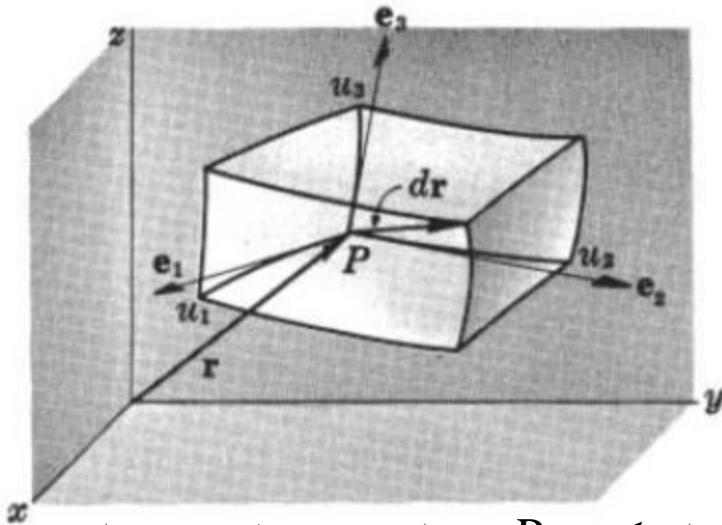
$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2x^2 y - xz^3) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(2x^2 y - xz^3) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(2x^2 y - xz^3) \\
 &= 4y - 6xz
 \end{aligned}$$

مختصات منحنی الخط قائم. ژاکوبین ها

فرض کنید که تابعی به شکل زیر داری، که در آن x, y, z و z توابعی از u ها باشند:

$$\mathbf{r} = x(u_1, u_2, u_3)\hat{i} + y(u_1, u_2, u_3)\hat{j} + z(u_1, u_2, u_3)\hat{k}$$

بنابراین نقطه ای مانند P را در شکل نه تنها توسط مختصات قائم (x, y, z) بلکه توسط مختصات منحنی الخط (u_1, u_2, u_3) می توان تعریف کرد.



اگر دو تا از u ها ثابت باشند و سومی تغییر یابد، \mathbf{r} خمی رسم می کند که به آن مختصه ی u ی تغییر یافته می گویند. می توان نوشت:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3$$

بردار $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}$ بر خم مختصه ی u_1 در P مماس است. اگر e_1 بردار یکه در P و در این جهت باشد می توان

نوشت $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = h_1 \mathbf{e}_1$ که در آن $h_1 = |\partial \mathbf{r} / \partial u_1|$. بطور مشابه می توان نوشت:

$$h_2 = |\partial \mathbf{r} / \partial u_2| \quad \text{and} \quad h_3 = |\partial \mathbf{r} / \partial u_3| \quad \text{که در آنها، به ترتیب} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = h_2 \mathbf{e}_2 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = h_3 \mathbf{e}_3$$

پس می توان نوشت:

$$d\mathbf{r} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3$$

کمیت‌های h_1, h_2, h_3 را ضرایب مقیاس می نامند.

اگر در هر نقطه ی دلخواه P بردارهای $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ دو بدو بر هم عمود باشند، مختصات منحنی الخط فوق را قائم می نامند. در چنین حالتی عنصر طول کمان ds با رابطه ی زیر داده می شود.

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2$$

و با مجذور طول قطر متوازی السطوح شکل متناظر است.

همچنین در حالت مختصات قائم، حجم متوازی السطوح با عبارت زیر بیان می شود:

$$dV = |(h_1 du_1 \mathbf{e}_1) \cdot (h_2 du_2 \mathbf{e}_2) \times (h_3 du_3 \mathbf{e}_3)| = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

و می توان آنرا بصورت زیر نوشت:

$$dV = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right| du_1 du_2 du_3 = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| du_1 du_2 du_3$$

که در آن عبارت زیر را ژاکوبین تبدیل مورد بحث گویند و در صفحه بعد توضیح داده شده است.

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}$$

چرا می توان $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right|$ را به شکل روبرو نوشت؟

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \\ &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot [(B_2C_3 - B_3C_2)\mathbf{i} + (B_3C_1 - B_1C_3)\mathbf{j} + (B_1C_2 - B_2C_1)\mathbf{k}] \\ &= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

و یا:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}, \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

گرادیان، دیورژانس، کرل و لاپلاسیان در مختصات منحنی الخط:

اگر Φ تابعی اسکالر و $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ تابعی برداری باشد داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla\Phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_3 \right) \Phi \Rightarrow \\ \left\langle \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \left| \frac{1}{h_1 \mathbf{e}_1} \right| = \frac{1}{h_1} \right\} \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} \right\rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\nabla\Phi = \text{grad } \Phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3$$

اگر (x, y, z) را در دستگاه مختصات کارتزین جایگزین (u_1, u_2, u_3) نماییم و در این حال $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ نیز با $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ جایگذاری شود و نیز $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ است، آنگاه فرمولهای اخیر به معادلات گرادیان، دیورژانس، کرل و لاپلاسیان در مختصات کارتزین تبدیل می شوند.

$$\nabla\Phi = \left(\frac{1}{(h_1=1)} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \hat{e}_1 + \frac{1}{(h_2=1)} \frac{\partial\Phi}{\partial y} \hat{e}_2 + \frac{1}{(h_3=1)} \frac{\partial\Phi}{\partial z} \hat{e}_3 \right) \xrightarrow{\hat{e}_1=\hat{x}, \hat{e}_2=\hat{y}, \hat{e}_3=\hat{z}}$$

$$\nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \hat{z} \right)$$

به همین ترتیب می توان نوشت:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_3 \right) \cdot (A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3) \Rightarrow$$

$$\left\langle \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \left| \frac{1}{h_1 \mathbf{e}_1} \right| = \frac{1}{h_1} \right\} \Rightarrow \frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial A_1}{\partial u_1} \Rightarrow \frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{1}{h_1} \frac{\partial (h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} \right\rangle, \dots$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

$$\xrightarrow[h_1=h_2=h_3 \ \& \ u_1=x, u_2=y, u_3=z]{\hat{e}_1=\hat{x}, \hat{e}_2=\hat{y}, \hat{e}_3=\hat{z}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (A_x) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z) \right]$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \text{curl } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{1 \times 1 \times 1} \begin{vmatrix} 1 \times \hat{i} & 1 \times \hat{j} & 1 \times \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 \times A_x & 1 \times A_y & 1 \times A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 \Phi = \text{Laplacian of } \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]$$

1. Cylindrical Coordinates (ρ, ϕ, z) . See Fig

Transformation equations:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

where $\rho \geq 0, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$

Scale factors: $h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1$

Element of arc length: $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$

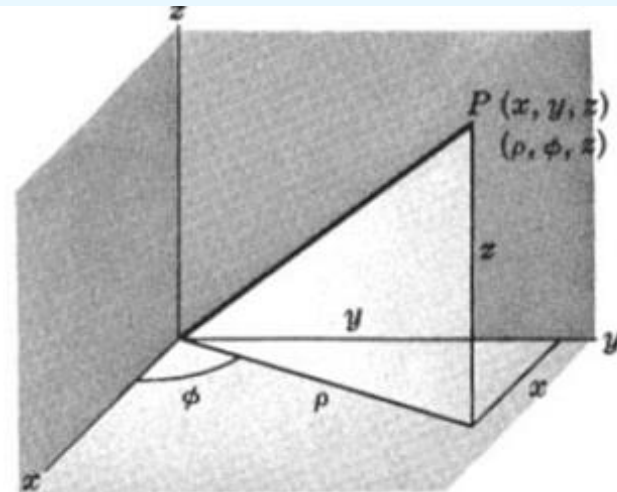
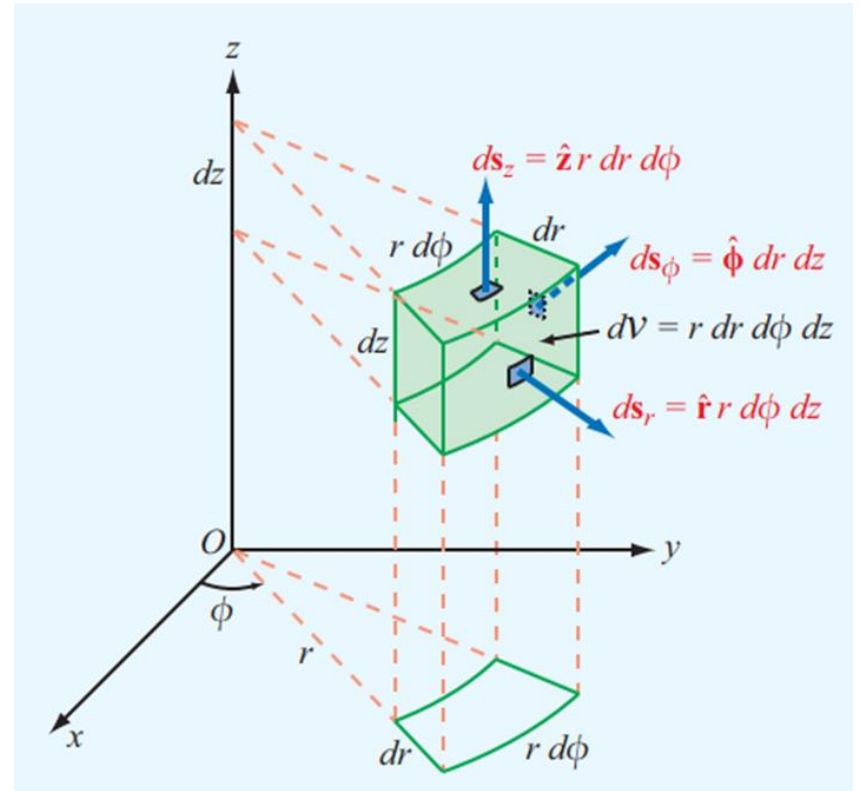
Jacobian: $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, z)} = \rho$

Element of volume: $dV = \rho d\rho d\phi dz$

Laplacian:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} =$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$



محاسبه ی عنصر طول کمان ، المان حجمی و محاسبه ی گرادیان، دیورژانس، کرل و لاپلاسیان در آن

$$\text{Let } u_1 = \rho, u_2 = \phi, u_3 = z, h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1$$

$$(a) \quad \text{grad } \Phi = \nabla \Phi = \frac{1}{1} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{1} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_3$$

where $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ are the unit vectors in the directions of increasing ρ, ϕ, z respectively.

$$(b) \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{(1)(\rho)(1)} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} ((\rho)(1)A_1) + \frac{\partial}{\partial \phi} ((1)(1)A_2) + \frac{\partial}{\partial z} ((1)(\rho)A_3) \right]$$

$$= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_1) + \frac{\partial A_2}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

where $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$.

$$(c) \quad \nabla^2 \Phi = \frac{1}{(1)(\rho)(1)} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{(\rho)(1)}{(1)} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{(1)(1)}{(\rho)} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{(1)(\rho)}{(1)} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \text{curl } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{pmatrix}$$

2. Spherical Coordinates (r, θ, ϕ) . See Fig

Transformation equations:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

where $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$.

Scale factors: $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$

Element of arc length:

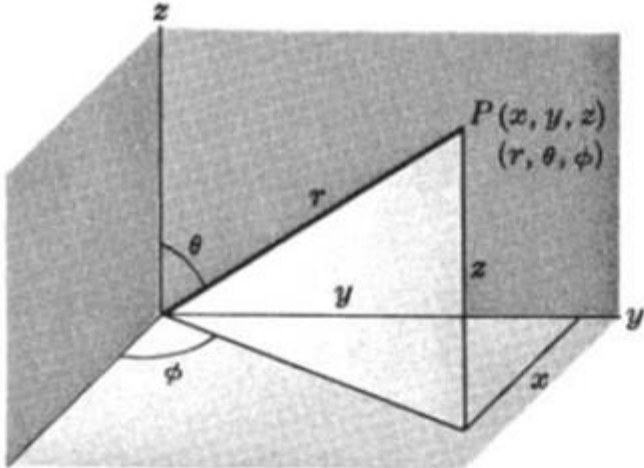
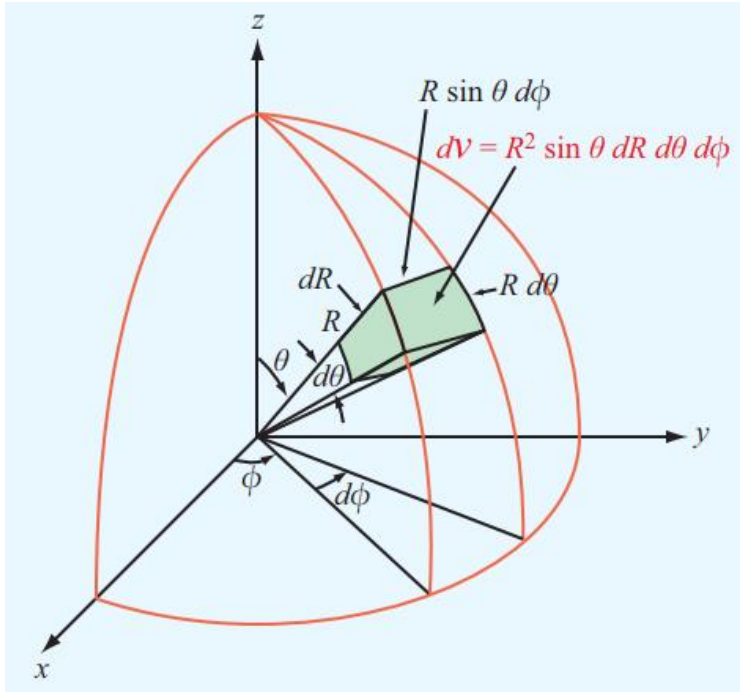
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Jacobian: $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta$

Element of volume: $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Laplacian:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}.$$



شهر روز نصیریان

محاسبه ی عنصر طول کمان ، المان حجمی و محاسبه ی گرادیان، دیورژانس، کرل و لاپلاسیان در آن

Find ds^2 in (b) spherical coordinates and determine the scale factor

(b) $x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$

In spherical coordinates, $u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \phi, h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$

Then $dV = (1)(r)(r \sin \theta) dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

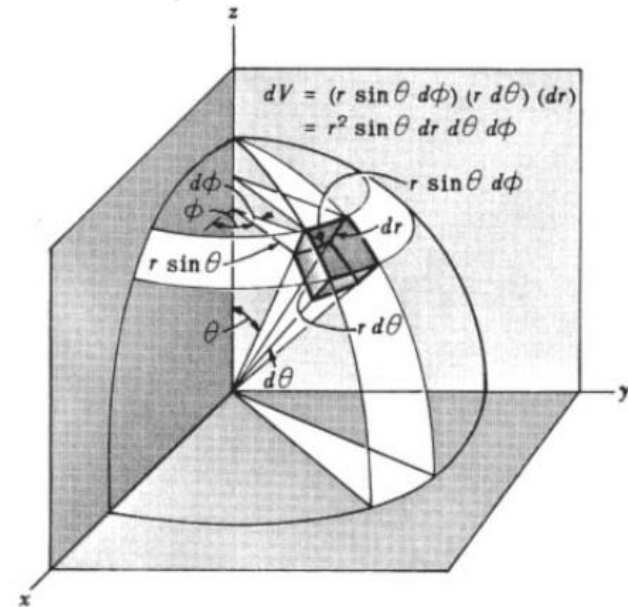
This can also be observed directly from Fig below.

$$\nabla \psi = \hat{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + r \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right],$$

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right],$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ V_r & r V_\theta & r \sin \theta V_\phi \end{vmatrix}.$$



Example 3-7: Charge in a Sphere

A sphere of radius 2 cm contains a volume charge density ρ_v given by

$$\rho_v = 4 \cos^2 \theta \quad (\text{C/m}^3).$$

Find the total charge Q contained in the sphere.

Solution:

$$\begin{aligned} Q &= \int_v \rho_v dV \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{R=0}^{2 \times 10^{-2}} (4 \cos^2 \theta) R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{R^3}{3} \right) \Big|_0^{2 \times 10^{-2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{32}{3} \times 10^{-6} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^{\pi} d\phi \\ &= \frac{64}{9} \times 10^{-6} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{128\pi}{9} \times 10^{-6} = 44.68 \quad (\mu\text{C}). \end{aligned}$$

مثال : گرادیان تابع زیر را در دستگاه مختصات کروی محاسبه نمایید.

$$F = 2r \cos \theta - 5\varphi + 2$$

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \hat{\phi} \Rightarrow$$

$$\nabla F = \frac{\partial}{\partial r} (2r \cos \theta - 5\varphi + 2) \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (2r \cos \theta - 5\varphi + 2) \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (2r \cos \theta - 5\varphi + 2) \hat{\phi} \Rightarrow$$

$$\nabla F = (2 \cos \theta) \hat{r} - 2 \sin \theta \hat{\theta} - \frac{5}{r \sin \theta} \hat{\phi}$$

مثال : گرادیان تابع زیر را در دستگاه مختصات استوانه ای محاسبه نمایید.

$$F = 2 \sin \varphi - \rho z + 4$$

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \hat{\phi} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k} \Rightarrow$$

$$\nabla F = \frac{\partial}{\partial \rho} (2 \sin \varphi - \rho z + 4) \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (2 \sin \varphi - \rho z + 4) \hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z} (2 \sin \varphi - \rho z + 4) \hat{k} \Rightarrow$$

$$\nabla F = -z \hat{\rho} + \frac{2}{\rho} \cos \varphi \hat{\phi} - \rho \hat{z}$$

Example 3-12: Calculating the Gradient

Find the gradient of each of the following scalar functions and then evaluate it at the given point.

- (a) $V_1 = 24V_0 \cos(\pi y/3) \sin(2\pi z/3)$ at $(3, 2, 1)$ in Cartesian coordinates,
 (b) $V_2 = V_0 e^{-2r} \sin 3\phi$ at $(1, \pi/2, 3)$ in cylindrical coordinates,
 (c) $V_3 = V_0 (a/R) \cos 2\theta$ at $(2a, 0, \pi)$ in spherical coordinates.

Solution: (a) Using Eq. (3.72) for ∇ ,

$$\begin{aligned} \nabla V_1 &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial V_1}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial V_1}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial V_1}{\partial z} \\ &= -\hat{\mathbf{y}} 8\pi V_0 \sin \frac{\pi y}{3} \sin \frac{2\pi z}{3} + \hat{\mathbf{z}} 16\pi V_0 \cos \frac{\pi y}{3} \cos \frac{2\pi z}{3} \\ &= 8\pi V_0 \left[-\hat{\mathbf{y}} \sin \frac{\pi y}{3} \sin \frac{2\pi z}{3} + \hat{\mathbf{z}} 2 \cos \frac{\pi y}{3} \cos \frac{2\pi z}{3} \right]. \end{aligned}$$

At $(3, 2, 1)$,

$$\nabla V_1 = 8\pi V_0 \left[-\hat{\mathbf{y}} \sin^2 \frac{2\pi}{3} + \hat{\mathbf{z}} 2 \cos^2 \frac{2\pi}{3} \right] = \pi V_0 [-\hat{\mathbf{y}} 6 + \hat{\mathbf{z}} 4].$$

(b) The function V_2 is expressed in terms of cylindrical variables. Hence, we need to use Eq. (3.82) for ∇ :

$$\begin{aligned} \nabla V_2 &= \left(\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) V_0 e^{-2r} \sin 3\phi \\ &= -\hat{\mathbf{r}} 2V_0 e^{-2r} \sin 3\phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} (3V_0 e^{-2r} \cos 3\phi)/r \\ &= \left[-\hat{\mathbf{r}} 2 \sin 3\phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{3 \cos 3\phi}{r} \right] V_0 e^{-2r}. \end{aligned}$$

At $(1, \pi/2, 3)$, $r = 1$ and $\phi = \pi/2$. Hence,

$$\nabla V_2 = \left[-\hat{\mathbf{r}} 2 \sin \frac{3\pi}{2} + \hat{\boldsymbol{\phi}} 3 \cos \frac{3\pi}{2} \right] V_0 e^{-2} = \hat{\mathbf{r}} 2V_0 e^{-2} = \hat{\mathbf{r}} 0.27V_0.$$

(c) As V_3 is expressed in spherical coordinates, we apply Eq. (3.83) to V_3 :

$$\begin{aligned} \nabla V_3 &= \left(\hat{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial R} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) V_0 \left(\frac{a}{R} \right) \cos 2\theta \\ &= -\hat{\mathbf{R}} \frac{V_0 a}{R^2} \cos 2\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{2V_0 a}{R^2} \sin 2\theta \\ &= -[\hat{\mathbf{R}} \cos 2\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} 2 \sin 2\theta] \frac{V_0 a}{R^2}. \end{aligned}$$

At $(2a, 0, \pi)$, $R = 2a$ and $\theta = 0$, which yields

$$\nabla V_3 = -\hat{\mathbf{R}} \frac{V_0}{4a}.$$

مثال : دیورژانس میدان زیر را در مختصات استوانه ای حساب نمایید.

$$F = \rho \hat{\rho} + z \sin \varphi \hat{\phi} + 2z \hat{z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot F = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial F_z}{\partial z}} \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (z \sin \varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (2z) \Rightarrow \nabla \cdot F = \frac{1}{\rho} [(2\rho) + (z \cos \varphi)] + 2 \Rightarrow \nabla \cdot F = 4 + \frac{z \cos \varphi}{\rho}$$

مثال : دیورژانس میدان زیر را در مختصات کروی حساب نمایید.

$$F = 2\hat{r} + r \cos \theta \hat{\theta} + r \hat{\phi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot F = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + r \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \right]} \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 [2]) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta r \cos \theta) + r \frac{\partial}{\partial \phi} r \right] \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[4 \sin \theta r + r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right] \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot F = \left[\frac{4}{r} + \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta} \right] = \frac{4}{r} + \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}$$

Example 3-13: Calculating the Divergence

Determine the divergence of each of the following vector fields and then evaluate them at the indicated points:

(a) $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}3x^2 + \hat{\mathbf{y}}2z + \hat{\mathbf{z}}x^2z$ at $(2, -2, 0)$;

(b) $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{R}}(a^3 \cos \theta / R^2) - \hat{\boldsymbol{\theta}}(a^3 \sin \theta / R^2)$ at $(a/2, 0, \pi)$.

Solution: (a)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2z) \\ &= 6x + 0 + x^2 = x^2 + 6x.\end{aligned}$$

At $(2, -2, 0)$, $\nabla \cdot \mathbf{E} \Big|_{(2, -2, 0)} = 16$.

(b) From the expression given in Appendix C for the divergence of a vector in spherical coordinates, it follows that

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}(R^2 E_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(E_\theta \sin \theta) \\ &\quad + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}(a^3 \cos \theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{a^3 \sin^2 \theta}{R^2} \right) \\ &= 0 - \frac{2a^3 \cos \theta}{R^3} = -\frac{2a^3 \cos \theta}{R^3}.\end{aligned}$$

At $R = a/2$ and $\theta = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{E} \Big|_{(a/2, 0, \pi)} = -16$.

مثال : کرل میدان زیر را در مختصات استوانه ای حساب نمایید.

$$\mathbf{F} = \rho \hat{\rho} + z \sin \varphi \hat{\phi} + 2z \hat{z} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\rho}}{\rho} & \hat{\phi} & \frac{\hat{z}}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{\hat{\rho}}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \rho z \sin \varphi & 2z \end{pmatrix} - \hat{\phi} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \rho & 2z \end{pmatrix} + \frac{\hat{z}}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \rho & \rho z \sin \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{\hat{\rho}}{\rho} (0 - \rho \sin \varphi) - \hat{\phi} (0 - 0) + \frac{\hat{z}}{\rho} (z \sin \varphi - 0) = -\sin \varphi \hat{\rho} + \frac{z \sin \varphi \hat{z}}{\rho}$$

مثال : کرل میدان زیر را در مختصات کروی حساب نمایید.

$$\mathbf{F} = 2\hat{r} + r \cos \theta \hat{\theta} + r \hat{\phi} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{pmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\phi \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \hat{r} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ r^2 \cos \theta & r \end{pmatrix} - r \hat{\theta} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 2 & r \end{pmatrix} + r \sin \theta \hat{\phi} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 2 & r^2 \cos \theta \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \hat{r}(0-0) - r \hat{\theta}(1-0) + r \sin \theta \hat{\phi}(2r \cos \theta - 0) \right\} = \frac{-r \hat{\theta} + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \hat{\phi}}{r^2 \sin \theta} \Rightarrow$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{-\hat{\theta}}{r \sin \theta} + 2 \cos \theta \hat{\phi}$$

Table 3-1 Summary of vector relations.

	Cartesian Coordinates	Cylindrical Coordinates	Spherical Coordinates
Coordinate variables	x, y, z	r, ϕ, z	R, θ, ϕ
Vector representation $\mathbf{A} =$	$\hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z$	$\hat{\mathbf{r}}A_r + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi + \hat{\mathbf{z}}A_z$	$\hat{\mathbf{R}}A_R + \hat{\boldsymbol{\theta}}A_\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi$
Magnitude of A $ \mathbf{A} =$	$\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$	$\sqrt{A_r^2 + A_\phi^2 + A_z^2}$	$\sqrt{A_R^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2}$
Position vector $\overrightarrow{OP_1} =$	$\hat{\mathbf{x}}x_1 + \hat{\mathbf{y}}y_1 + \hat{\mathbf{z}}z_1,$ for $P(x_1, y_1, z_1)$	$\hat{\mathbf{r}}r_1 + \hat{\mathbf{z}}z_1,$ for $P(r_1, \phi_1, z_1)$	$\hat{\mathbf{R}}R_1,$ for $P(R_1, \theta_1, \phi_1)$
Base vector properties	$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1$ $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0$ $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$ $\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$ $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$	$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1$ $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$ $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{z}}$ $\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}}$ $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$	$\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = 1$ $\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = 0$ $\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$ $\hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{R}}$ $\hat{\boldsymbol{\phi}} \times \hat{\mathbf{R}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$
Dot product $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} =$	$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$	$A_r B_r + A_\phi B_\phi + A_z B_z$	$A_R B_R + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi$
Cross product $\mathbf{A} \times \mathbf{B} =$	$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_r & A_\phi & A_z \\ B_r & B_\phi & B_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{R}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ A_R & A_\theta & A_\phi \\ B_R & B_\theta & B_\phi \end{vmatrix}$
Differential length $d\mathbf{l} =$	$\hat{\mathbf{x}} dx + \hat{\mathbf{y}} dy + \hat{\mathbf{z}} dz$	$\hat{\mathbf{r}} dr + \hat{\boldsymbol{\phi}} r d\phi + \hat{\mathbf{z}} dz$	$\hat{\mathbf{R}} dR + \hat{\boldsymbol{\theta}} R d\theta + \hat{\boldsymbol{\phi}} R \sin \theta d\phi$
Differential surface areas	$ds_x = \hat{\mathbf{x}} dy dz$ $ds_y = \hat{\mathbf{y}} dx dz$ $ds_z = \hat{\mathbf{z}} dx dy$	$ds_r = \hat{\mathbf{r}} r d\phi dz$ $ds_\phi = \hat{\boldsymbol{\phi}} dr dz$ $ds_z = \hat{\mathbf{z}} r dr d\phi$	$ds_R = \hat{\mathbf{R}} R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ $ds_\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}} R \sin \theta dR d\phi$ $ds_\phi = \hat{\boldsymbol{\phi}} R dR d\theta$
Differential volume $dv =$	$dx dy dz$	$r dr d\phi dz$	$R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi$

انتگرال های شامل توابع برداری:

$$(1) : \int_V F dv$$

$$(2) : \int_C V dl$$

$$(3) : \int_C F dl$$

$$(4) : \int_S A \cdot ds$$

در فیزیک و الکترومغناطیس با انتگرال هایی با اشکال بالا برخورد می نماییم که می بایست حل گردد.

انتگرال (۱) که شامل تابعی بر حسب مختصات سه بعدی است را می توان بصورت ۳ انتگرال مجزا محاسبه نمود.

کافی است تابع F را در دستگاه مختصات مناسب به ۳ مولفه تجزیه نمود. اگر dv نمایانگر یک حجم

دیفرانسیلی (المان حجمی) باشد آنگاه انتگرال (۱) نمایانگر یک انتگرال سه گانه می باشد.

انتگرال (۲) حاوی V تابعی عددی در فضا است و dl نمایشگر المان طولی و C نیز مسیر انتگرال گیری را

$$\int_P^Q V dl$$

نشان می دهد. اگر انتگرال از نقطه P تا نقطه Q صورت پذیرد می نویسیم:

چنانچه این انتگرال روی مسیر بسته C انجام شود می نویسیم: $\oint_C V dl$

حال اگر dl را در دستگاه مختصات مناسب (مانند کارتزین) بنویسیم، داریم:

$$\int_C V dl = \int_C V(x, y, z) [dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}] = \hat{i} \left(\int_C V(x, y, z) dx \right) + \hat{j} \left(\int_C V(x, y, z) dy \right) + \hat{k} \left(\int_C V(x, y, z) dz \right)$$

حال ۳ انتگرال براحتی محاسبه می شوند.

مثال: مطلوبست محاسبه ی انتگرال زیر در مسیرهای (a) خط راستی که از (0,1) به (1,2) می رود، (b) خطوط

راستی که از (0,1) به (1,1) و آنگاه از (1,1) به (1,2) میروند و (c) در امتداد سهمی $x=t$, $y=t^2+1$

$$\int_{(0,1)}^{(1,2)} [(x^2 - y) dx + (y^2 + x) dy]$$

(a) An equation for the line joining (0, 1) and (1, 2) in the xy plane is $y = x + 1$. Then $dy = dx$ and the line integral equals

$$\int_{x=0}^1 [\{x^2 - (x + 1)\} dx + \{(x + 1)^2 + x\} dx] = \int_0^1 (2x^2 + 2x) dx = 5/3$$

(b) Along the straight line from (0, 1) to (1, 1), $y = 1$, $dy = 0$ and the line integral equals

$$\int_{x=0}^1 [(x^2 - 1) dx + (1 + x)(0)] = \int_0^1 (x^2 - 1) dx = -2/3$$

Along the straight line from (1, 1) to (1, 2), $x = 1$, $dx = 0$ and the line integral equals

$$\int_{y=1}^2 [(1 - y)(0) + (y^2 + 1) dy] = \int_1^2 (y^2 + 1) dy = 10/3$$

Then the required value $= -2/3 + 10/3 = 8/3$.

(c) Since $t = 0$ at (0, 1) and $t = 1$ at (1, 2), the line integral equals

$$\int_{t=0}^1 [\{t^2 - (t^2 + 1)\} dt + \{(t^2 + 1)^2 + t\} 2t dt] = \int_0^1 (2t^5 + 4t^3 + 2t^2 + 2t - 1) dt = 2$$

انتگرال های (۳) و (۴) از نظر ریاضی یک شکل اند و هردوی آنها به مقادیر عددی منتهی می شوند.

انتگرال (۳) از نظر فیزیکی بسیار حائز اهمیت است چونکه اگر F یک نیرو باشد، انتگرال فوق کار انجام شده توسط نیرو برای جابجایی جسم از نقطه ی ابتدای P به نقطه ی انتهای Q می باشد و نیز اگر F با E (شدت میدان الکتریکی جایگزین شود، آنگاه این انتگرال کار انجام شده توسط میدان الکتریکی برای حرکت یک بار واحد از P تا Q می باشد.

مثال: مطلوبست محاسبه ی انتگرال روبرو در مسیرهای زیرین $\mathbf{A} = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$

$$x=t, \quad y=t^2, \quad z=t^3 \quad (a)$$

(b) خطوط راستی که از $(0,0,1)$ به $(0,0,1)$ و آنگاه به $(0,1,1)$ و سپس به $(0,1,1)$ و نهایتاً به $(1,1,1)$ میروند.

(c) خط مستقیم واصل بین $(0,0,0)$ و $(1,1,1)$.

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \{(3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}\} \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \int_C [(3x^2 - 6yz) dx + (2y + 3xz) dy + (1 - 4xyz^2) dz] \end{aligned}$$

(a) If $x = t, y = t^2, z = t^3$, points $(0, 0, 0)$ and $(1, 1, 1)$ correspond to $t = 0$ and $t = 1$ respectively. Then

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=0}^1 [\{3t^2 - 6(t^2)(t^3)\} dt + \{2t^2 + 3(t)(t^3)\} d(t^2) + \{1 - 4(t)(t^2)(t^3)^2\} d(t^3)] \\ &= \int_{t=0}^1 [(3t^2 - 6t^5) dt + (4t^3 + 6t^5) dt + (3t^2 - 12t^{11}) dt] = 2\end{aligned}$$

Another method.

Along C , $\mathbf{A} = (3t^2 - 6t^5)\mathbf{i} + (2t^2 + 3t^4)\mathbf{j} + (1 - 4t^9)\mathbf{k}$ and $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) dt$. Then

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [(3t^2 - 6t^5) dt + (4t^3 + 6t^5) dt + (3t^2 - 12t^{11}) dt] = 2$$

(b) Along the straight line from $(0, 0, 0)$ to $(0, 0, 1)$, $x = 0$, $y = 0$, $dx = 0$, $dy = 0$ while z varies from 0 to 1. Then the integral over this part of the path is

$$\int_{z=0}^1 [\{3(0)^2 - 6(0)(z)\}0 + \{2(0) + 3(0)(z)\}0 + \{1 - 4(0)(0)(z^2)\} dz] = \int_{z=0}^1 dz = 1$$

Along the straight line from $(0, 0, 1)$ to $(0, 1, 1)$, $x = 0$, $z = 1$, $dx = 0$, $dz = 0$ while y varies from 0 to 1. Then the integral over this part of the path is

$$\int_{y=0}^1 [\{3(0)^2 - 6(y)(1)\}0 + \{2y + 3(0)(1)\} dy + \{1 - 4(0)(y)(1)^2\}0] = \int_{y=0}^1 2y dy = 1$$

Along the straight line from $(0, 1, 1)$ to $(1, 1, 1)$, $y = 1$, $z = 1$, $dy = 0$, $dz = 0$ while x varies from 0 to 1. Then the integral over this part of the path is

$$\int_{x=0}^1 [\{3x^2 - 6(1)(1)\} dx + \{2(1) + 3x(1)\}0 + \{1 - 4x(1)(1)^2\}0] = \int_{x=0}^1 (3x^2 - 6) dx = -5$$

Adding, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 1 + 1 - 5 = -3.$

(c) The straight line joining $(0, 0, 0)$ and $(1, 1, 1)$ is given in parametric form by $x = t$, $y = t$, $z = t$. Then

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^1 [(3t^2 - 6t^2) dt + (2t + 3t^2) dt + (1 - 4t^4) dt] = 6/5$$

انتگرال (۴) یک انتگرال سطحی است. در فیزیک این انتگرال دوگانه شار میدان برداری A که از سطح S می گذرد را اندازه می گیرد. در این انتگرال المان سطحی به شکل $\hat{n} ds$ است که داری اندازه ی ds و در جهت \hat{n} می باشد .

جهت \hat{n} به صورت زیر انتخاب می شود:

(۱) اگر سطح محصور کننده ی یک حجم باشد، جهت مثبت \hat{n} همواره در جهت خارج حجم است.

(۲) اگر سطح باز باشد جهت \hat{n} به جهت حرکت روی حاشیه ی سطح باز بستگی دارد، یعنی اگر انگشتان دست راست جهت چرخش در حاشیه ی سطح باز را تعقیب نمایند، جهت انگشت شست جهت \hat{n} را نشان می دهد.

در فیزیک اگر A میدان برداری الکتریکی باشد، انتگرال (۴) مقدار شار عبوری از سطح بسته را نشان می دهد.

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{A} \cdot \hat{n} ds = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds = \varphi_{\vec{E}}$$

مثال: اگر تابع برداری $\vec{F} = (y - 2x)\hat{i} + (3x + 2y)\hat{j}$ را داشته باشیم، مطلوبست محاسبه ی $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ اگر C دایره ای به مرکز مختصات و به شعاع ۲ در صفحه ی xy است.

در مختصات استوانه ای داریم: $d\vec{\ell} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$

در مسیر داده شده تغییرات Z صفر است. ρ ثابت و برابر ۲ است و تنها ϕ متغیر است پس داریم: $d\vec{\ell} = 2 d\phi \hat{\phi}$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C [(y - 2x)\hat{i} + (3x + 2y)\hat{j}] \cdot (2 d\phi \hat{\phi}) =$$

$$\oint_C (2 d\phi) (y - 2x)\hat{i} \cdot \hat{\phi} + 2 d\phi (3x + 2y)\hat{j} \cdot \hat{\phi} \xrightarrow{\substack{x=2\cos\phi \text{ and } y=2\sin\phi \\ \hat{j} \cdot \hat{\phi}=\cos\phi \text{ and } \hat{i} \cdot \hat{\phi}=-\sin\phi}}$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C (2 d\phi) (2 \sin \phi - 4 \cos \phi)(-\sin \phi) + 2 d\phi (6 \cos \phi + 4 \sin \phi)(\cos \phi) \Rightarrow$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C (-4 \sin^2 \phi + 16 \sin \phi \cos \phi + 12 \cos^2 \phi) d\phi \Rightarrow$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi + 16 \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi + 12 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \dots \Rightarrow$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -4\pi + 0 + 12\pi = 8\pi$$

مثال: میدان برداری $\vec{F} = (x + y)\hat{i} + (-x + y)\hat{j} - 2z\hat{k}$ را در نظر بگیرید. مطلوبست محاسبه ی $\int \vec{F} \cdot d\vec{S}$ روی نیمکره ی $r = R$ ، $0 < \theta < \pi/2$ و $0 < \varphi < 2\pi$.

عنصر سطح عبارت است از: $d\vec{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{n} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}$

همچنین داریم:

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \rightarrow \begin{cases} \hat{r} \cdot \hat{i} = \sin \theta \cos \varphi \\ \hat{r} \cdot \hat{j} = \sin \theta \sin \varphi \\ \hat{r} \cdot \hat{k} = \cos \theta \end{cases}$$

و نیز: $x = R \sin \theta \cos \varphi$; $y = R \sin \theta \sin \varphi$ and $z = R \cos \theta$

حال داریم:

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = \left[(x + y)\hat{i} + (-x + y)\hat{j} - 2z\hat{k} \right] \cdot \left[R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = \left[\begin{array}{l} (R \sin \theta \cos \varphi + R \sin \theta \sin \varphi) \hat{i} + \\ (-R \sin \theta \cos \varphi + R \sin \theta \sin \varphi) \hat{j} - \\ 2R \cos \theta \hat{k} \end{array} \right] \cdot \left[R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = \left[(x + y)\hat{i} + (-x + y)\hat{j} - 2z\hat{k} \right] \cdot \left[R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = \left[\begin{array}{l} (R \sin \theta \cos \varphi + R \sin \theta \sin \varphi) \hat{i} + \\ (-R \sin \theta \cos \varphi + R \sin \theta \sin \varphi) \hat{j} - \\ 2R \cos \theta \hat{k} \end{array} \right] \cdot \left[R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = \left[\begin{array}{l} (R^3 \sin^2 \theta \cos \varphi + R^3 \sin^2 \theta \sin \varphi) (\hat{i} \cdot \hat{r}) + \\ (-R^3 \sin^2 \theta \cos \varphi + R^3 \sin^2 \theta \sin \varphi) (\hat{j} \cdot \hat{r}) - \\ 2R^3 \sin \theta \cos \theta (\hat{k} \cdot \hat{r}) \end{array} \right] d\theta d\varphi \Rightarrow$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = \left[\begin{array}{l} (R^3 \sin^2 \theta \cos \varphi + R^3 \sin^2 \theta \sin \varphi) (\sin \theta \cos \varphi) + \\ (-R^3 \sin^2 \theta \cos \varphi + R^3 \sin^2 \theta \sin \varphi) (\sin \theta \sin \varphi) - \\ 2R^3 \sin \theta \cos \theta (\cos \theta) \end{array} \right] d\theta d\varphi \Rightarrow$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = \left[\begin{array}{l} \left(R^3 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi + R^3 \sin^3 \theta \sin \varphi \cos \varphi \right) + \\ \left(-R^3 \sin^3 \theta \cos \varphi + R^3 \sin^3 \theta \sin^2 \varphi \right) - \\ 2R^3 \sin \theta \cos^2 \theta \end{array} \right] d\theta d\varphi \Rightarrow$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = \left[R^3 \sin^3 \theta \overbrace{\left(\begin{array}{l} \cos^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi - \\ \sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \varphi \end{array} \right)}^{=1} + \left(-2R^3 \sin \theta \cos^2 \theta \right) \right] d\theta d\varphi \Rightarrow$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = \left[R^3 \left(\sin^3 \theta - 2\sin \theta \cos^2 \theta \right) \right] d\theta d\varphi \Rightarrow$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left[R^3 \left(\sin^3 \theta - 2\sin \theta \cos^2 \theta \right) \right] d\theta d\varphi \Rightarrow$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{S} = R^3 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \right] d\varphi = R^3 2\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = 0$$

قضیه ی دیورژانس یا گاوس یا واگرایی:

دیورژانس را بصورت شار خالص خروجی میدان برداری \vec{A} در واحد حجم، وقتی که این حجم حول نقطه ای به سمت صفر میل نماید تعریف کردیم. بنابراین می توان انتظار داشت که انتگرال حجمی دیورژانس یک میدان برداری با شار کل خروجی از سطح در برگیرنده ی حجم برابر باشد. یعنی

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

که به این اتحاد قضیه ی دیورژانس یا گاوس یا واگرایی گفته می شود.

مثال: اگر بردار \mathbf{A} (فرض کنید یک میدان الکتریکی باشد) بصورت زیر داده شده باشد، که در ناحیه ای محصور به مکعب به طول واحد قرار دارد، مطلوبست محاسبه ی شار عبوری از سطح مکعب. ضمناً قضیه ی دیورژانس را نیز تحقیق نمایید.

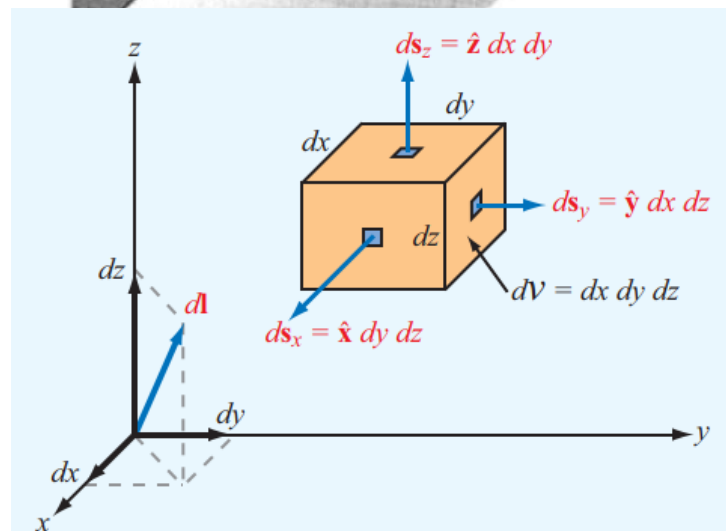
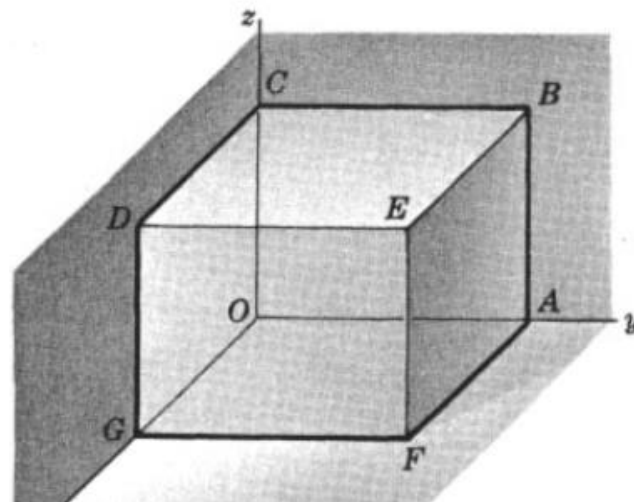
$$\mathbf{A} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$$

Face DEFG: $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, $x = 1$. Then

$$\begin{aligned} \iint_{DEFG} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_0^1 \int_0^1 \{(2 - z)\mathbf{i} + \mathbf{j} - z^2\mathbf{k}\} \cdot \mathbf{i} \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (2 - z) \, dy \, dz = 3/2 \end{aligned}$$

Face ABCO: $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$, $x = 0$. Then

$$\begin{aligned} \iint_{ABCO} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_0^1 \int_0^1 (-z\mathbf{i}) \cdot (-\mathbf{i}) \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 z \, dy \, dz = 1/2 \end{aligned}$$



Face ABEF: $\mathbf{n} = \mathbf{j}$, $y = 1$. Then

$$\iint_{ABEF} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 \{(2x - z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}\} \cdot \mathbf{j} dx dz = \int_0^1 \int_0^1 x^2 dx dz = 1/3$$

Face OGDC: $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$, $y = 0$. Then

$$\iint_{OGDC} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 \{(2x - z)\mathbf{i} - xz^2\mathbf{k}\} \cdot (-\mathbf{j}) dx dz = 0$$

Face BCDE: $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $z = 1$. Then

$$\iint_{BCDE} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 \{(2x - 1)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - x\mathbf{k}\} \cdot \mathbf{k} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 -x dx dy = -1/2$$

Face AFGO: $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, $z = 0$. Then

$$\iint_{AFGO} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 \{2xi - x^2y\mathbf{j}\} \cdot (-\mathbf{k}) dx dy = 0$$

Adding, $\iint \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 0 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{11}{8}$. Since

Adding, $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 0 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{11}{8}$. Since

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2 + x^2 - 2xz) dx dy dz = \frac{11}{6}$$

the divergence theorem is verified in this case.

قضیه ی استوکس:

قضیه ی استوکس بیان می دارد که انتگرال سطحی کرل یک میدان برداری روی یک سطح باز برابر انتگرال خطی

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

بسته ی بردار روی مسیری است که سطح را در بر می گیرد.

مانند قضیه ی دیورژانس، اعتبار فرایندهایی که منجر به قضیه ی استوکس میگردد، لازم می دارد که میدان برداری A و همچنین مشتقات اول آن و روی S و در امتداد C پیوسته باشند.

مثال: ثابت نمایید $\nabla\phi$ برداری عمود بر رویه ی $\phi(x, y, z) = C$ است که در آن C یک ثابت است.

فرض کنیم $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ بردار مکان نقطه ای دلخواه مانند $P(x, y, z)$ و متعلق به این رویه باشد.

آنگاه $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ در صفحه ی مماس بر رویه (در نقطه ی P) قرار دارد. ولی

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz = 0 \quad \text{or} \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) = 0$$

یعنی $\nabla\phi \cdot d\vec{r} = 0$ در نتیجه $\nabla\phi$ بر $d\vec{r}$ و بنابر این بر رویه عمود است.

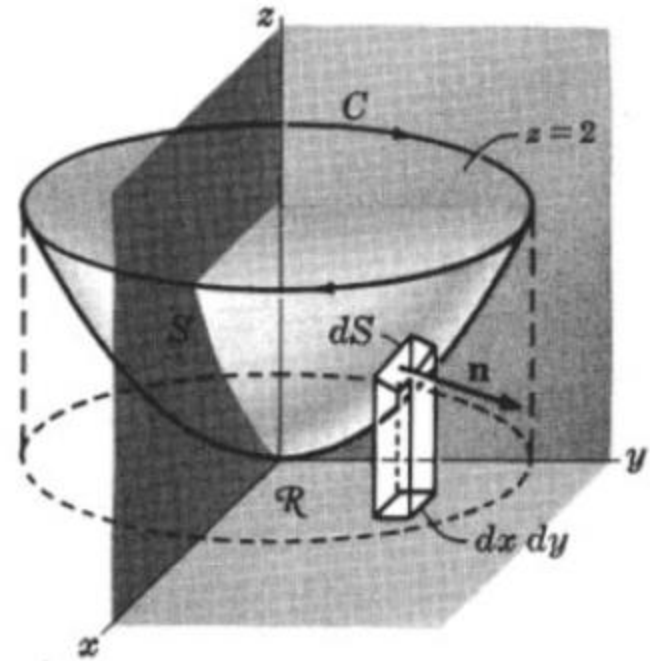
مثال: درستی قضیه ی استوکس را برای $\mathbf{A} = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$ که در آن S عبارت از بخشی از پارابولوئید $2z = x^2 + y^2$ و محدود به $z = 2$ و C (مرز آن است) ثابت کنید.

C (مرز S) دایره ای به معادلات $z = 2$ و $x^2 + y^2 = 4$ و معادلات پارامتری $z = 2$ و $y = 2 \sin t$ و $x = 2 \cos t$ است که در آنها $0 \leq t < 2\pi$ پس داریم:

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C [3y dx - xz dy + yz^2 dz] \\ &= \int_{2\pi}^0 [3(2 \sin t)(-2 \sin t) dt - (2 \cos t)(2)(2 \cos t) dt] \\ &= \int_0^{2\pi} (12 \sin^2 t + 8 \cos^2 t) dt = 20\pi \end{aligned}$$

Also,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = (z^2 + x)\mathbf{i} - (z + 3)\mathbf{k}$$



Also,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = (z^2 + x)\mathbf{i} - (z + 3)\mathbf{k}$$

and

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(x^2 + y^2 - 2z)}{|\nabla(x^2 + y^2 - 2z)|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

Then

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_{\mathcal{R}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{R}} (xz^2 + x^2 + z + 3) \, dx \, dy \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \left\{ x \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^2 + x^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} + 3 \right\} \, dx \, dy \end{aligned}$$

In polar coordinates this becomes

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^2 \{ (\rho \cos \phi)(\rho^4/2) + \rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2/2 + 3 \} \rho \, d\rho \, d\phi = 20\pi$$

Example 3-14: Verification of Stokes's Theorem

For vector field $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \cos \phi / r$, verify Stokes's theorem for a segment of a cylindrical surface defined by $r = 2$, $\pi/3 \leq \phi \leq \pi/2$, and $0 \leq z \leq 3$ (Fig. 3-25).

Solution: Stokes's theorem states that

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}.$$

Left-hand side: With \mathbf{B} having only a component $B_z = \cos \phi / r$, use of the expression for $\nabla \times \mathbf{B}$ in cylindrical coordinates in Appendix C gives

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \\ &\quad + \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) - \frac{\partial B_r}{\partial \phi} \right) \\ &= \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\cos \phi}{r} \right) - \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \phi}{r} \right) \\ &= -\hat{\mathbf{r}} \frac{\sin \phi}{r^2} + \hat{\phi} \frac{\cos \phi}{r^2}. \end{aligned}$$

The integral of $\nabla \times \mathbf{B}$ over the specified surface S is

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} &= \int_{z=0}^3 \int_{\phi=\pi/3}^{\pi/2} \left(-\hat{\mathbf{r}} \frac{\sin \phi}{r^2} + \hat{\phi} \frac{\cos \phi}{r^2} \right) \cdot \hat{\mathbf{r}} r d\phi dz \\ &= \int_0^3 \int_{\pi/3}^{\pi/2} -\frac{\sin \phi}{r} d\phi dz = -\frac{3}{2r} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

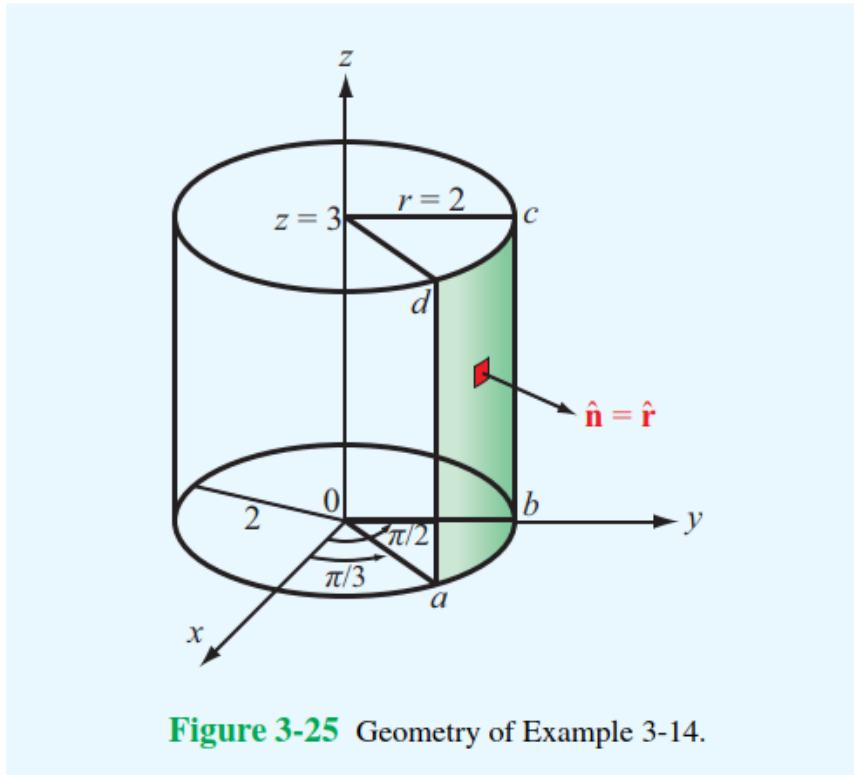


Figure 3-25 Geometry of Example 3-14.

Right-hand side: The surface S is bounded by contour $C = abcd$ shown in **Fig. 3-25**. The direction of C is chosen so that it is compatible with the surface normal $\hat{\mathbf{r}}$ by the right-hand rule. Hence,

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_a^b \mathbf{B}_{ab} \cdot d\mathbf{l} + \int_b^c \mathbf{B}_{bc} \cdot d\mathbf{l} \\ &\quad + \int_c^d \mathbf{B}_{cd} \cdot d\mathbf{l} + \int_d^a \mathbf{B}_{da} \cdot d\mathbf{l}, \end{aligned}$$

where \mathbf{B}_{ab} , \mathbf{B}_{bc} , \mathbf{B}_{cd} , and \mathbf{B}_{da} are the field \mathbf{B} along segments ab , bc , cd , and da , respectively. Over segment ab , the dot product of $\mathbf{B}_{ab} = \hat{\mathbf{z}}(\cos \phi)/2$ and $d\mathbf{l} = \hat{\boldsymbol{\phi}} r d\phi$ is zero, and the same is true for segment cd . Over segment bc , $\phi = \pi/2$; hence, $\mathbf{B}_{bc} = \hat{\mathbf{z}}(\cos \pi/2)/2 = 0$. For the last segment, $\mathbf{B}_{da} = \hat{\mathbf{z}}(\cos \pi/3)/2 = \hat{\mathbf{z}}/4$ and $d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{z}} dz$. Hence,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_d^a \left(\hat{\mathbf{z}} \frac{1}{4} \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} dz = \int_3^0 \frac{1}{4} dz = -\frac{3}{4},$$

which is the same as the result obtained by evaluating the left-hand side of Stokes's equation.

اگر یک میدان برداری بدون دیورژانس باشد، آنگاه می توان آن را به صورت کرل میدان برداری دیگر بیان کرد.

فرض کنید این میدان برداری \mathbf{B} باشد. بیان اخیر بیان می دارد که اگر $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ باشد، میدان برداری \mathbf{A} را می توان بصورت $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ تعریف کرد.

یک میدان بدون دیورژانس یک میدان سلونوئیدی نیز نامیده می شود. میدانهای سلونوئیدی منبع یا چاه جریان ندارند. شار خالص خروجی یک میدان سلونوئیدی از هر سطح بسته صفر است و خطوط شار روی خود بسته می شوند.

قضیه ی هلمهولتز:

یک میدان بدون دیورژانس، سلونوئیدی است و یک میدان بدون کرل غیر چرخشی است. میدان های برداری را می توان بر اساس سلونوئیدی و/یا غیر گردشی بودن آنها دسته بندی کرد.

۱- سلونوئیدی و غیر گردشی ، مانند میدان الکتریکی ساکن در ناحیه ی تهی از بار.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{F} = 0$$

۲- سلونوئیدی ولی گردشی ، مانند میدان مغناطیسی دائم در یک هادی حامل جریان.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{F} \neq 0$$

۳- غیر گردشی اما غیر سلونوئیدی، مانند میدان الکتریکی ساکن در ناحیه ی بار دار.

$$\nabla \times \mathbf{F} \neq 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0$$

۴- گردشی و غیر سلونوئیدی، مانند میدان الکتریکی در ناحیه ی باردار به همراه میدان مغناطیسی متغیر با زمان.

$$\nabla \times \mathbf{F} \neq 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0$$

۱- اگر $\vec{E} = Z \sin \varphi \hat{r}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده باشد که از سطح جانبی نیم استوانه‌ای شعاع دار قطع واحد می‌گذرد، مطلوب است درستی قضیه دیورژانس.

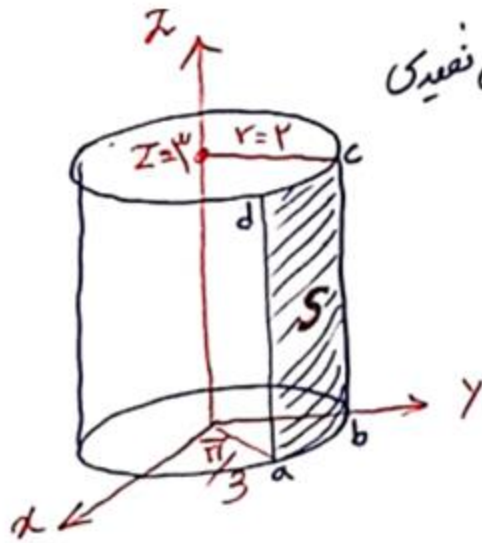
۲- اگر $\vec{E} = \frac{1}{r} \hat{r} + \tan \theta \hat{\theta} + \varphi \sin \theta \hat{\phi}$ در دستگاه مختصات کروی داده شده باشد که از سطح کره‌ای واحد بگذرد، مطلوب است محاسبه درستی قضیه دیورژانس وقتی \vec{E} از سطح کره‌ای

۳- کره‌ای به شعاع a و چگالی $\rho = 4 \cos^2 \theta$ (در آنجا θ زاویه است). مطلوب است محاسبه ρ در کره.

۴- بردار $\vec{A} = (x+y) \hat{i} + (y-x) \hat{j} + z \hat{k}$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای و کروی بنویسید.

۵- بردار $\vec{E} = \left(\frac{a^3 \cos \theta}{R^2}\right) \hat{r} - \left(\frac{a^3 \sin \theta}{R^2}\right) \hat{\theta}$ را در نقطه‌ای ($\theta = \pi$ و $R = \frac{a}{4}$) بدست آورید.

۶- بردار $\vec{B} = \frac{\sin \varphi}{r} \hat{z}$ مطابق شکل از یک استوانه می‌گذرد. درستی قضیه



استولس را در نظر \vec{B} از لایه نشان داده روی استوانه
تحقیق کنید (ایجاد S) و نذرده از رأس a, b, c, d .

۷- تابع اسکالر $v = \frac{2z}{x^2 + y^2}$ در سطح مازین داده شده است.

(الف) مطلوبیت می‌لپی \vec{v} ، (ب) تبدیلی \vec{v} را به دستگاه مختصات استوانه‌ای تبدیل کنید.

۸- درستی قضیه دیورژانس را برای بردار $\vec{D} = 3R^2 \hat{r}$ (در دستگاه مختصات کروی) که از لولته‌ای کروی

شعاع R و 1 و 2 می‌گذرد (در هر دو سوی این لولته) حساب کنید.

۹- دیورژانس و گریل بردار $\vec{A} = x\gamma \hat{i} + \gamma z \hat{j} + 2x \hat{k}$ را در دستگاه مختصات مازین و استوانه‌ای لیب‌کنند

3.5 Given vectors $\mathbf{A} = \hat{x} + \hat{y}2 - \hat{z}3$, $\mathbf{B} = \hat{x}2 - \hat{y}4$, and $\mathbf{C} = \hat{y}2 - \hat{z}4$, find the following:

(a) A and \hat{a}

(b) The component of \mathbf{B} along \mathbf{C}

(c) θ_{AC}

(d) $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$

(e) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

(f) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

(g) $\hat{x} \times \mathbf{B}$

(h) $(\mathbf{A} \times \hat{y}) \cdot \hat{z}$

P.2-1 Given three vectors \mathbf{A} , \mathbf{B} , and \mathbf{C} as follows,

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y2 - \mathbf{a}_z3,$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}_y4 + \mathbf{a}_z,$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{a}_x5 - \mathbf{a}_z2,$$

find

a) a_A

c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

e) the component of \mathbf{A} in the direction of \mathbf{C}

g) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ and $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

b) $|\mathbf{A} - \mathbf{B}|$

d) θ_{AB}

f) $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$

h) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ and $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

P.2-2 Given

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y2 + \mathbf{a}_z3,$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z2,$$

find the expression for a unit vector \mathbf{C} that is perpendicular to both \mathbf{A} and \mathbf{B} .

P.2–21 Given a vector function $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x y + \mathbf{a}_y x$, evaluate the scalar line integral $\int \mathbf{E} \cdot d\ell$ from $P_1(2, 1, -1)$ to $P_2(8, 2, -1)$

a) along the parabola $x = 2y^2$,

b) along the straight line joining the two points.

Is this \mathbf{E} a conservative field?

P.2–22 For the \mathbf{E} of Problem P.2–21, evaluate $\int \mathbf{E} \cdot d\ell$ from $P_3(3, 4, -1)$ to $P_4(4, -3, -1)$ by converting both \mathbf{E} and the positions of P_3 and P_4 into cylindrical coordinates.

P.2–23 Given a scalar function

$$V = \left(\sin \frac{\pi}{2} x \right) \left(\sin \frac{\pi}{3} y \right) e^{-z},$$

determine

a) the magnitude and the direction of the maximum rate of increase of V at the point $P(1, 2, 3)$,

b) the rate of increase of V at P in the direction of the origin.

P.2–29 For vector function $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r r^2 + \mathbf{a}_z 2z$, verify the divergence theorem for the circular cylindrical region enclosed by $r = 5$, $z = 0$, and $z = 4$.

P.2–30 For the vector function $\mathbf{F} = \mathbf{a}_r k_1/r + \mathbf{a}_z k_2 z$ given in Example 2–15 (page 41) evaluate $\int \nabla \cdot \mathbf{F} dv$ over the volume specified in that example. Explain why the divergence theorem fails here.

P.2–31 Use the definition in Eq. (2–98) to derive the expression of $\nabla \cdot \mathbf{A}$ for a vector field $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\phi A_\phi + \mathbf{a}_z A_z$ in cylindrical coordinates.

P.2–32 A vector field $\mathbf{D} = \mathbf{a}_R (\cos^2 \phi)/R^3$ exists in the region between two spherical shells defined by $R = 1$ and $R = 2$. Evaluate

a) $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$,

b) $\int \nabla \cdot \mathbf{D} dv$.

P.2-34 Assume the vector function $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x 3x^2y^3 - \mathbf{a}_y x^3y^2$.

- Find $\oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ around the triangular contour shown in Fig. 2-36.
- Evaluate $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}$ over the triangular area.
- Can \mathbf{A} be expressed as the gradient of a scalar? Explain.

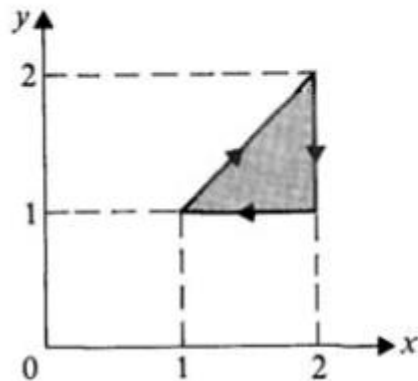


FIGURE 2-36
Graph for Problem P.2-34.

P.2-36 Given the vector function $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\phi \sin(\phi/2)$, verify Stokes's theorem over the hemispherical surface and its circular contour that are shown in Fig. 2-37.

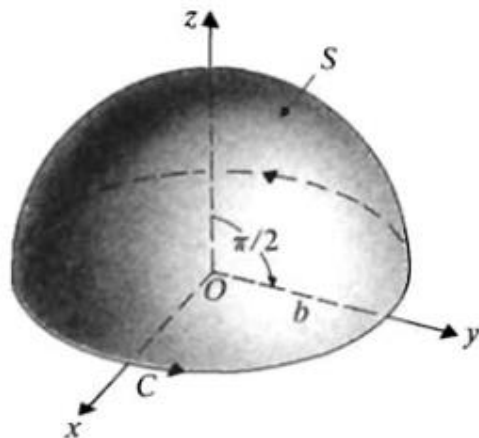


FIGURE 2-37
Graph for Problem P.2-36.

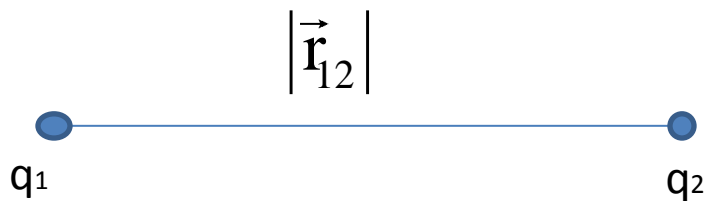
فصل سوم:

میدان های الکتریکی ساکن

قانون کولن: به تجربه مشاهده کردید وقتی در میله ای شیشه ای را که به پارچه ای ابریشمی مالیده شده اند از تکیه گاهی آویزان نماییم دو میله یکدیگر را دفع می نمایند و حال اگر دو میله پلاستیکی را با پوست خز مالش دهیم آن دو نیز یکدیگر را دفع می نمایند در حالت سوم یک میله شیشه و یک میله پلاستیکی یکدیگر را جذب مینمایند. نتیجه این آزمایش ساده آن است که در اثر مالش در میله ها خاصیت به وجود می آید که خود می تواند عامل ایجاد نیرویی جدید باشد که به این عوامل (بار) میگوییم و حال داریم:

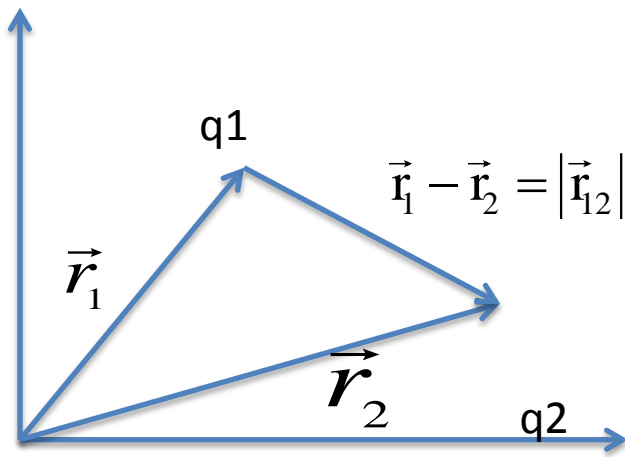
اگر A ، B را جذب نماید A و B بارهای غیر هم نام دارند و اگر A ، B را دفع نماید A و B را بارهای هم نام دارند. بار کوانتیزه: هر بار در عالم هستی ضریب صحیح از بار مرجع e (بار الکترون) است

قانون کولن (تجربی):



داریم:

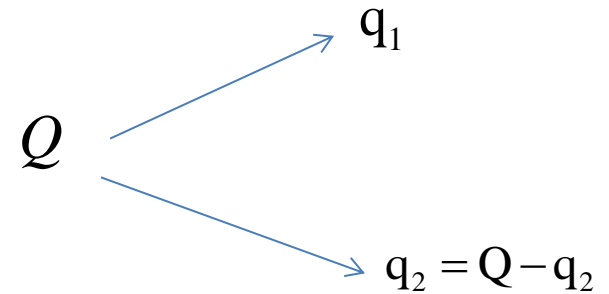
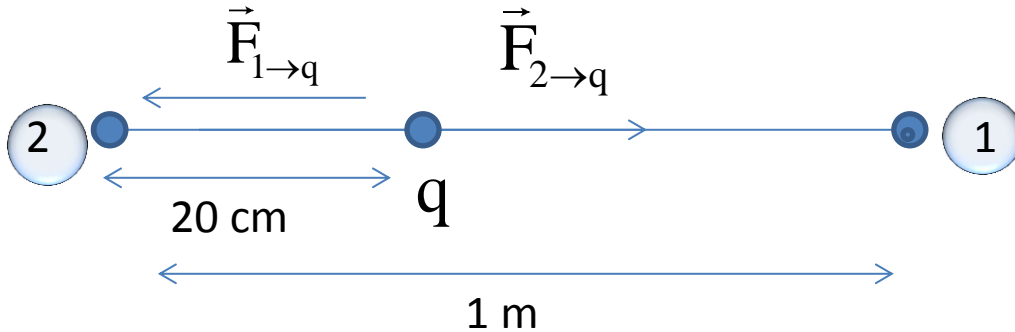
$$F \propto \begin{cases} q_1 q_2 \\ \frac{1}{|\vec{r}_{12}|} \end{cases}$$



$$\vec{F}_{q_1q_2} \propto \frac{q_1q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \Rightarrow \vec{F}_{q_1q_2} = k \frac{q_1q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}$$

$$\begin{cases} \text{M.K.S:} & k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\text{nm}^2}{\text{c}^2} \\ \text{C.G.S:} & k = 1 \end{cases}$$

مثال (دو نقطه از یکدیگر ۱ متر فاصله دارند ، بار واحد q در فاصله 20 cm از نقطه ۲ قرار گرفته است بار Q را چگونه بین نقطه ۱ و ۲ تقسیم کنیم به نحوی که نیروی وارد بر q از طرف دوبار تقسیم شده باشد ؟



$$\vec{F}_{1 \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q}{(.8\text{m})^2}$$

$$\vec{F}_{2 \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2q}{(.2\text{m})^2}$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow q} = \vec{F}_{2 \rightarrow q}$$

$$\frac{q_1q}{(.8)^2} = \frac{q_2q}{(.2)^2} \Rightarrow \frac{q_1}{(.8)^2} = \frac{(Q - q_1)}{(.2)^2} \Rightarrow$$

$$q_1 = 4(Q - q_1) \Rightarrow q_1 = \frac{4}{5}Q, \quad q_2 = \frac{1}{5}Q$$

میدان الکتریکی

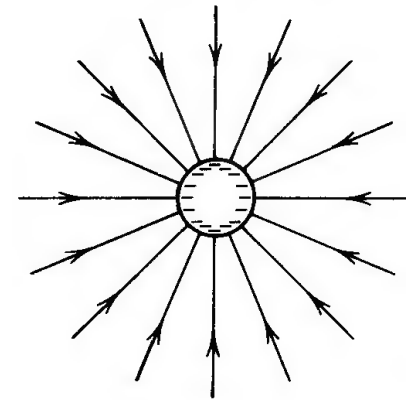
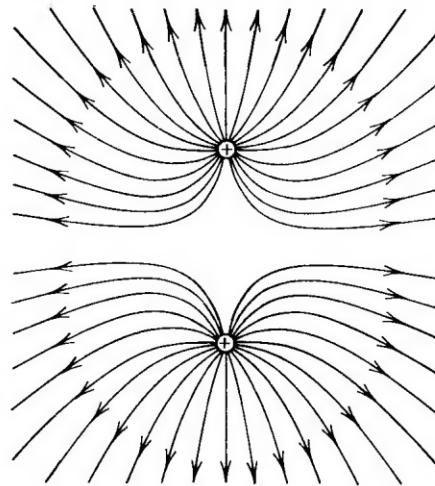
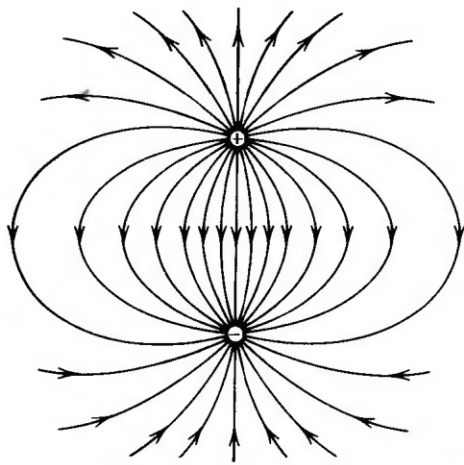
داشتیم: $\vec{F}_{q_1, q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}$ و حال تعریف می شود:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}q_i}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum q_i}{|\vec{r}_{q_i}|^2}$$

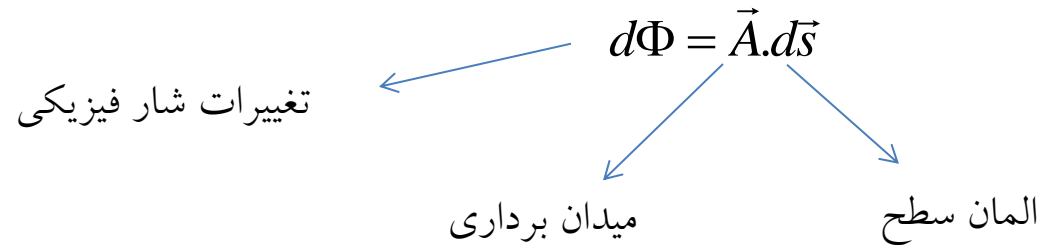
q_i = بار موجود در هر نقطه از فضا.

r_i = فاصله بار مورد نظر تا نقطه ای که میدان محاسبه می شود.

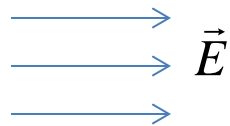
در طبیعت دو نوع توزیع بار موجود است: ۱- توزیع بار نقطه ای ۲- توزیع بار پیوسته



تعبیر شار فیزیکی:

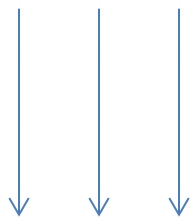


شار فیزیکی: اگر یک میدان برداری \vec{A} از سطح \vec{S} عبور نماید شار فیزیکی اندازه $\vec{A} \cdot \vec{S}$ در روی سطح ایجاد می نماید.



→ $\vec{\Phi}_E = \int d\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$

روی سطح S



قانون گوس : بیان می دارد که شار کل عبوری شدت میدان الکتریکی از یک سطح بسته در فضا، برابر کل بار داخل سطح تقسیم بر ϵ_0 است. داشتیم: $\int d\Phi_{\vec{E}} = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \vec{E} \cdot \hat{n} ds$ حال داریم: $\vec{E} \cdot d\vec{s} = |\vec{E}| |\hat{n}| ds \cdot \cos \theta$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int |\vec{E}| \cos \theta ds$$

حال از طرفین انتگرال میگیریم (روی سطح بسته) و داریم:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{|\vec{r}|^2} \cos \theta ds$$

از طرفی می دانیم \vec{E} برای بار نقطه ای می شود:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{|\hat{r}|^2} \cos \theta ds \Rightarrow \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \underbrace{\int \frac{\cos \theta ds}{|\vec{r}|^2}}_{=4\pi} \Rightarrow$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon} 4\pi \Rightarrow \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon}$$

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon} \quad \text{or} \quad \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon} \int dq$$

مثال (کره ای تو پر با شعاع R و چگالی ρ داریم. مطلوب است محاسبه میدان این توزیع بار در نقاط خارج و داخل کره.

$$(1): r > R \rightarrow \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_1 = \frac{q}{\epsilon} = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{\epsilon}$$

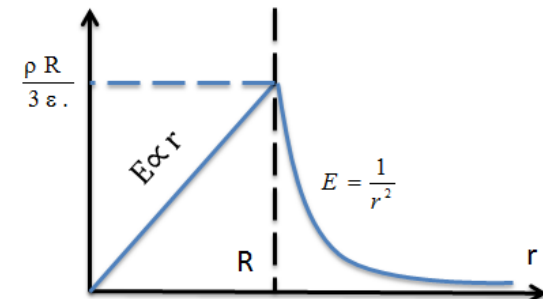
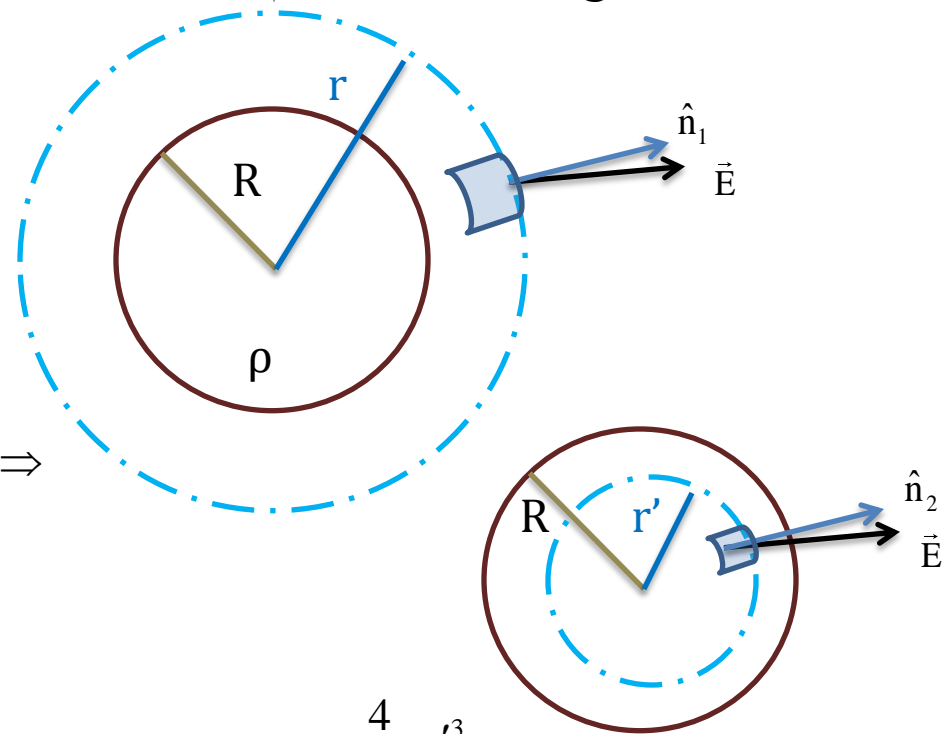
$$\Rightarrow \int |\vec{E}| (\hat{n}_1) \cdot (\hat{n}_1) ds_1 \cos 0 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow E \int_{S_1=4\pi r^2} ds_1 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{\epsilon} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{\epsilon} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon r^2} ; r > R$$

$$(2): r \leq R \rightarrow \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_2 = \frac{q'}{\epsilon} = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r'^3}{\epsilon} \Rightarrow \int |\vec{E}| (\hat{n}_2) \cdot (\hat{n}_2) ds_2 \cos 0 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r'^3}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow E \int_{S_2=4\pi r'^2} ds_2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r'^3}{\epsilon} \Rightarrow E(4\pi r'^2) = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r'^3}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{\rho r'}{3\epsilon} ; r' \leq R$$



پتانسیل الکتریکی:

بنابر تعریف پتانسیل الکتریکی عبارتست از تقسیم کار لازم برای جابجایی q بر مقدار بار q نوشته می شود.

نکته: جابجایی بار به آهستگی صورت می پذیرد به نحوی که بار هیچ شتابی را احساس نمی کند.

به طور معمول پتانسیل نقطه ای ابتدا (A) را صفر فرض می کنید یا فرض می کنیم که نقطه A پتانسیل ∞ در ∞ قرار دارد.

از مکانیک می دانیم که:

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q}$$

$$W_{AB} = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int q\vec{E} \cdot d\vec{x} = q \int \vec{E} \cdot d\vec{x} \Rightarrow V_{AB} = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q} = \int \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

بدست آوردن رابطه برای پتانسیل الکتریکی:

تابع اسکالر زیر را در نظر میگیریم:

$$f(\vec{X}, \vec{X}') = f\left[\vec{X}(x, y, z), \vec{X}'(x', y', z')\right] = \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|}$$

حال از تابع فوق گرادیان می گیریم:

$$\nabla f(\vec{X}, \vec{X}') = \nabla \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} = \nabla \left[|\vec{X} - \vec{X}'|^{-1} \right] = \nabla \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \nabla f(\vec{X}, \vec{X}') = \left[\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right] \left\{ \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

$$\Rightarrow \nabla f(\vec{X}, \vec{X}') = \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \hat{i} \right]}_{=(1)} +$$

$$\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \hat{j} \right]}_{=(2)} +$$

$$\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \hat{k} \right]}_{=(3)} \quad (*)$$

$$\left[\begin{aligned} (1): \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} &= -\frac{1}{2} \times 2 \times 1 (x-x')^1 \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{-(x-x')}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(x-x')}{\left[|x-x'| \right]^3} \end{aligned} \right]$$

به همین ترتیب گرادیان جملات دیگر (۲ و ۳) را نیز اگر حساب نماییم ، داریم:

$$(2): \frac{-(y-y')}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad \text{and} \quad (3): \frac{-(z-z')}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

با قرار دادن این جوابها در عبارت (*) داریم:

$$\Rightarrow f(\vec{X}, \vec{X}') = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-(x-x')\hat{i}}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \\ \frac{-(y-y')\hat{j}}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{-(z-z')\hat{k}}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\vec{X}, \vec{X}') = \left\{ \frac{-(x-x')\hat{i}}{[\vec{X}-\vec{X}']^3} + \frac{-(y-y')\hat{j}}{[\vec{X}-\vec{X}']^3} + \frac{-(z-z')\hat{k}}{[\vec{X}-\vec{X}']^3} \right\} = \frac{-(\vec{X}-\vec{X}')}{[\vec{X}-\vec{X}']^3} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{X}-\vec{X}'|} = \frac{-(\vec{X}-\vec{X}')}{[\vec{X}-\vec{X}']^3}} \quad (I)$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{X}-\vec{X}'|} = \frac{-(\vec{X}-\vec{X}')}{[\vec{X}-\vec{X}']^3} \xrightarrow{|\vec{X}-\vec{X}'|=\vec{R}} \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{R}|} = \frac{-(\vec{R} = R\hat{R})}{|R|^3} = \frac{-\hat{R}}{|R|^2} \\ \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{R}|} = \frac{(\vec{R} = R\hat{R})}{|R|^3} = \frac{\hat{R}}{|R|^2} \end{array} \right.}$$

از قبل می دانیم که میدان الکتریکی یک توزیع بار با رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$E(\vec{X}) = \int dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{X}')(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3}$$

حال می نویسیم:

$$E(\vec{X}) = \int dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{X}')(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq(\vec{X}') \left\{ \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{[\vec{X} - \vec{X}']^3} \right\}$$

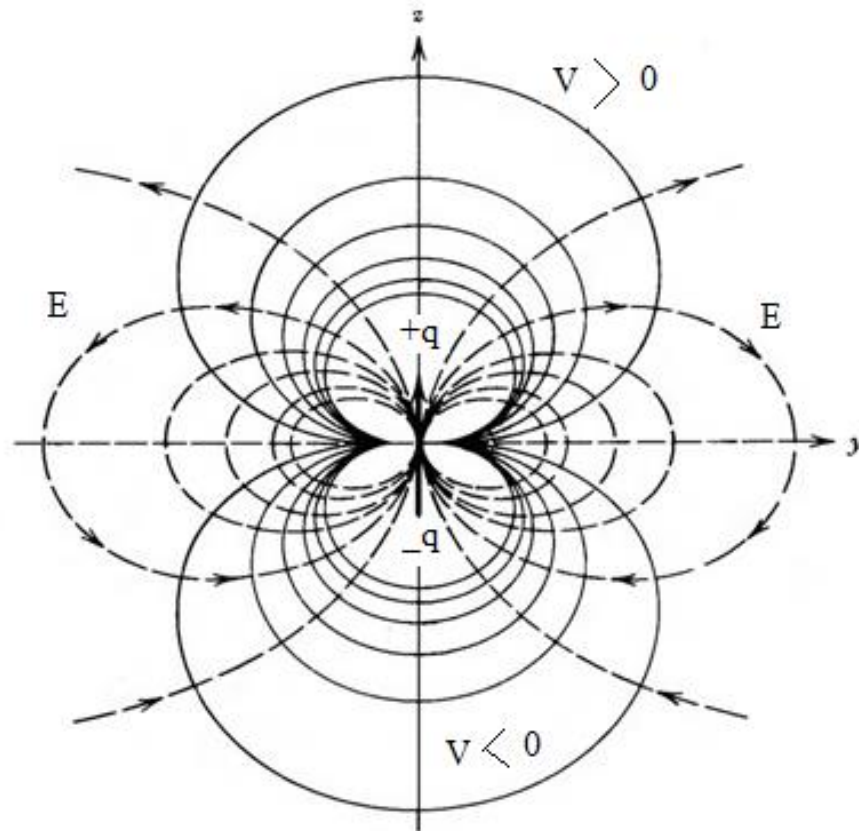
اگر رابطه ی (I) را بکار گیریم، داریم:

$$E(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq(\vec{X}') \left\{ -\nabla \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right\} = -\nabla \underbrace{\left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right\}}_{=V(\vec{X})} \Rightarrow \begin{cases} E(\vec{X}) = -\nabla V(\vec{X}) \\ V(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \\ -\int E(\vec{X}) dx = V(\vec{X}) \end{cases}$$

*اگر در فضا توزیع بار نقطه ای و خطی و سطحی و حجمی موجود باشد برای محاسبه ی پتانسیل الکتریکی ناشی از آن ها

در نقطه ی X داریم:

$$\vec{V}(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell} \frac{\lambda d\ell(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma ds(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dv(\vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|}$$



مثال (کره ای تو پر با شعاع R و چگالی ρ داریم. مطلوب است محاسبه پتانسیل الکتریکی این توزیع بار در نقاط خارج و داخل کره. قبلاً محاسبه کردیم که:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} & ; r > R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & ; r \leq R \end{cases}$$

الف) محاسبه V در خارج کره:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla V(\vec{x}) \Rightarrow V(\vec{x}) = -\int_{\infty}^r \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} dr$$

$$\Rightarrow V(\vec{x}) = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r \Rightarrow V(\vec{x}) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} ; r > R$$

الف) محاسبه V در داخل کره:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla V(\vec{x}) \Rightarrow V(\vec{x}) = -\int_{\infty}^R \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} dr - \int_R^r \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr$$

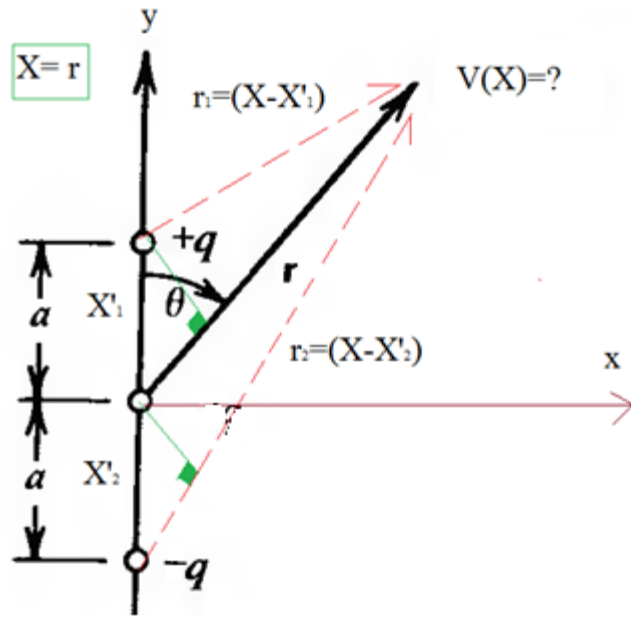
$$\Rightarrow V(\vec{x}) = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^R - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_R^r r dr = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2)$$

$$\Rightarrow V(\vec{x}) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) ; r > R$$

مثال: (توضیح رابطه * در ۲ صفحه بعد).

پتانسیل الکتریکی یک دو قطبی الکتریکی با فاصله ی بارهای $2a$ در نقطه ی مشخص از فضا با شرط آن که $a < r$

باشد عبارت است از:



$$V(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'_i|} \Rightarrow$$

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{X} - \vec{X}'_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{X} - \vec{X}'_2|} \Rightarrow$$

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right] (*)$$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{r} - a \cos\theta \\ \vec{r}_2 = \vec{r} + a \cos\theta \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{l} r_2 - r_1 = 2a \cos\theta \\ r_1 r_2 = r^2 - a^2 \cos^2\theta \cong r^2 \end{array} \right] \xrightarrow{(*)} V(\vec{X}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2a \cos\theta}{r^2} \right] \Rightarrow$$

$$V(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2qa) \cos\theta}{r^2} \xrightarrow{P=2qa} V(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cos\theta}{r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \hat{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

هادی ها در میدان الکتریکی ساکن:

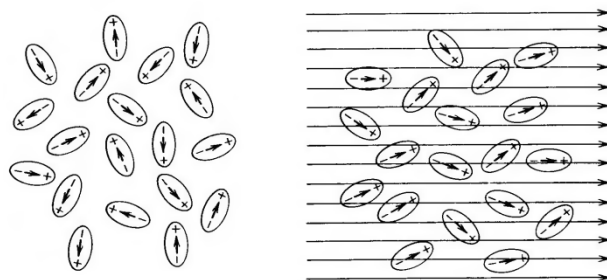
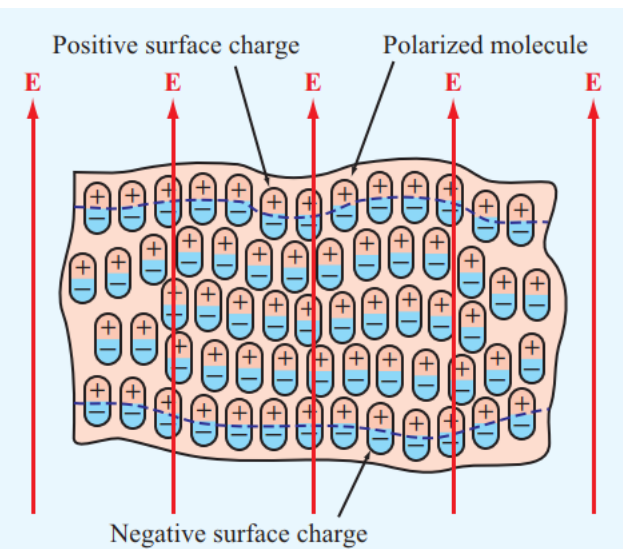
تا کنون تنها میدان الکتریکی توزیع های بار ساکن در فضای آزاد یا هوا بررسی شد. اکنون رفتار میدان را در محیط های مادی بررسی می کنیم. بطور کلی ماده به سه دسته ی هادی ها، نیمه هادی ها و عایق ها (دی الکتریک ها) تقسیم می شوند.

هادی ها اجسامی هستند که بار الکتریکی در آن ها جابه جا میشود و این جابه جایی بار موجب به وجود آمدن میدانی می گردد که قانون اصلی جایگزیده بودن بارها در الکتروستاتیک را مخدوش میکند، بنابراین بارها در رساناها خود را به گونه ای می آریند که میدان الکتریکی در داخل هادی ها صفر باشد و این نتیجه از رابطه ی $f=qE$ نیز منتج می شود. پس چنانچه بار خارجی به یک هادی اعمال شود آن ها میدانی در داخل هادی ایجاد می نمایند و این میدان موجب جابجایی بارها می شود و این امر آنقدر ادامه می یابد که بارها بر روی سطح هادی قرار می گیرند و چگالی بار در حجم هادی صفر می شود. توزیع بار در روی سطح هادی به شکل سطح بستگی دارد. اگر میدان الکتریکی در سطح هادی دارای مولفه ی مماسی باشد، آن یک نیروی مماسی ایجاد می نماید که نتیجه حرکت بارها در روی سطح هادی است که نتیجتاً تعادل بار موجود نخواهد بود. بنابراین تحت شرایط سکون، میدان الکتریکی روی سطح هادی و در همه جا عمود بر سطح هادی است. عبارت دیگر در شرایط سکون سطح هادی یک سطح هم پتانسیل است.

دی الکتریک ها در میدان الکتریکی ساکن:

برای تجزیه و تحلیل تاثیر ماکروسکوپی دوقطبی های القا شده،

بردار قطبی شدگی P را به صورت زیر تعریف می کنیم:



$$P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta V} P_k}{\Delta V} \quad (\text{C/m}^2)$$

n تعداد مولکولها در واحد حجم و ΔV در صورت کسر مشخص کننده ی جمع برداری گشتاورهای دوقطبی القا شده ی موجود در حجم بسیار کوچک ΔV است.

بردار P چگالی حجمی گشتاور دوقطبی الکتریکی می باشد. گشتاور دوقطبی یک جزء کوچک حجمی dV' یعنی

$$dP = P dV' \quad \text{و پتانسیل الکتریکی ناشی از آن برابر است با:} \quad dV = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} dv'$$

با انتگرال گیری روی حجم دی الکتریک V' پتانسیل ناشی از دی الکتریک قطبی شده بدست می آید.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R}{R^2} dv' \quad (*)$$

که در آن R فاصله یک نقطه ی میدان ثابت از عنصر کوچک حجمی dV' است و در مختصات کارتزین :

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

$$\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\mathbf{a}_R}{R^2}$$

قبلاً ثابت شد که که گرادیان $1/R$ نسبت به مختصات پریم دار برابر است با:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv' \quad (**)$$

از این رو معادله ی (*) می شود:

اتحاد برداری $\nabla' \cdot (f\mathbf{A}) = f \nabla' \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla' f$ را با $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ و $f = (1/R)$ را در نظر می گیریم و (***) می شود:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) dv' - \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{R} dv' \right]$$

انتگرال حجمی اول با استفاده از قضیه ی دیورژانس به انتگرال سطح تبدیل می شود و داریم:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}'_n}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{(-\nabla' \cdot \mathbf{P})}{R} dv' \quad ; \quad \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

که در آن \mathbf{a}'_n عمود بر عنصر کوچک سطحی ds' رو دی الکتریک و بسمت خارج است.

این رابطه آشکار می سازد که پتانسیل ناشی از یک دی الکتریک قطبی شده می تواند از اثر توزیع های دو بار سطحی

و حجمی با چگالی های زیر محاسبه شود:

$$\rho_{\sigma} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n \quad , \quad \rho_{\rho} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

این دو رابطه را چگالی های بار قطبی شدگی یا چگالی های بار مقید می نامند. پس داریم:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\rho_{\sigma}}{R} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_{\rho}}{R} dV'$$

از انجایی که با یک جسم دی الکتریک خنثی بار سرو کار داریم پس بار کل جسم پس از قطبی شدگی می بایست

صفر باشد. با بکار گیری مجدد قضیه ی دیورژانس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n (\Delta s) \\ Q &= -\oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n ds \\ &= \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dv = \int_V \rho_{\rho} dv \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Q_{\text{total}} &= \oint_S \rho_{\sigma} dS + \int_V \rho_{\rho} dV = \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_n dS - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV \\ &\xrightarrow{\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}} Q_{\text{total}} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV = 0 \end{aligned}$$

چگالی شار الکتریکی و ضریب دی الکتریک:

چون دی الکتریک قطبی شده چگالی بار حجمی ایجاد می نماید انتظار داریم میدان الکتریکی در آن تغییر یابد و با مقدارش در فضای آزاد متفاوت باشد.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (in vacume)} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{(\rho + \rho_p)}{\epsilon_0} \text{ (in dielectric)} \xrightarrow{\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}} \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho$$

تعریف جدید عبارت است از چگالی شار الکتریکی یا جابجایی الکتریکی (D):

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

استفاده از این کمیت به ما امکان می دهد تا رابطه ای دیورژانسی بین میدان الکتریکی و توزیع بارهای آزاد در هر محیط دی الکتریک بدون لزوم درگیری صریح با بردار قطبی شدگی \mathbf{P} و یا چگالی با قطبی شدگی ρ_p بنویسیم. با ترکیب دو رابطه ی آخر داریم: $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ که در آن چگالی حجمی بار های آزاد است.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_V \rho dv \Rightarrow \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \quad (C)$$

که این رابطه شکل دیگر قانون گوس است. که بیان می دارد که شار کل خروجی جابجایی الکتریکی روی هر سطح بسته برابر کل بار آزاد محصور در سطح است.

$$P = \epsilon_0 \chi_e E \xrightarrow{D = \epsilon_0 E + P} D = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E \quad \left(\frac{C}{m^2}\right) \quad \text{تعریفی جدید:}$$

که χ_e کمیتی بدون بعد بنام پذیرندگی الکتریکی است. که در آن $\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ گذردهی نسبی یا

ضریب دی الکتریک محیط است.

4-2 Relative permittivity (dielectric constant) and dielectric strength of common materials.

Material	Relative Permittivity, ϵ_r	Dielectric Strength, E_{ds} (MV/m)
Air (at sea level)	1.0006	3
Petroleum oil	2.1	12
Polystyrene	2.6	20
Glass	4.5–10	25–40
Quartz	3.8–5	30
Bakelite	5	20
Mica	5.4–6	200

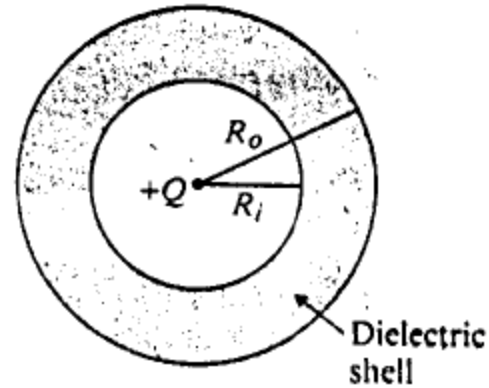
Note: $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ and $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m.

Example 3-11 A positive point charge Q is at the center of a spherical dielectric shell of an inner radius R_i and an outer radius R_o . The dielectric constant of the shell is ϵ_r . Determine \mathbf{E} , V , \mathbf{D} , and \mathbf{P} as functions of the radial distance R .

Solution: Because of the spherical symmetry, we apply Gauss's law to find \mathbf{E} and \mathbf{D} in three regions: (a) $R > R_o$; (b) $R_i \leq R \leq R_o$; and (c) $R < R_i$. Potential V is found from the negative line integral of \mathbf{E} , and polarization \mathbf{P} is determined by the relation $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \Rightarrow$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}.$$

The \mathbf{E} , \mathbf{D} , and \mathbf{P} vectors have only radial components. Refer to Fig. 3-20(a), where the Gaussian surfaces are not shown in order to avoid cluttering up the figure.



(a)

a) $R > R_o$

$$E_{R1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \epsilon_0(1 + \chi_e)E = \epsilon_0\epsilon_r E = \epsilon E \\ \text{and } P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$D_{R1} = \epsilon_0 E_{R1} = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad \text{and}$$

$$P_{R1} = 0.$$

b) $R_i \leq R \leq R_o$

The application of Gauss's law in this region gives us directly

$$E_{R2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}$$

$$D_{R2} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$P_{R2} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Note that D_{R2} has the same expression as D_{R1} and that both E_R and P_R have a discontinuity at $R = R_o$. In this region,

$$\begin{aligned} V_2 &= -\int_{\infty}^{R_o} E_{R1} dR - \int_{R_o}^R E_{R2} dR \\ &= V_1|_{R=R_o} - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{R_o}^R \frac{1}{R^2} dR \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{R_o} + \frac{1}{\epsilon_r R} \right] \end{aligned}$$

c) $R < R_i$

Since the medium in this region is the same as that in the region $R > R_o$, the application of Gauss's law yields the same expressions for E_R , D_R , and P_R in both regions:

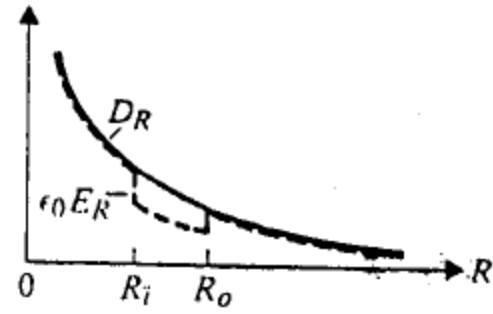
$$E_{R3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$D_{R3} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

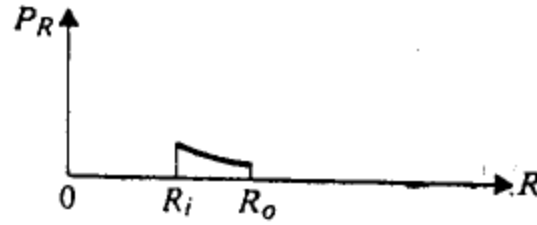
$$P_{R3} = 0.$$

To find V_3 , we must add to V_2 at $R = R_i$ the negative line integral of E_{R3} :

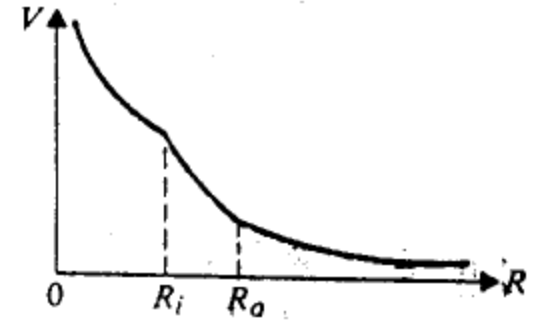
$$\begin{aligned} V_3 &= V_2|_{R=R_i} - \int_{R_i}^R E_{R3} dR \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{R_o} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R} \right]. \end{aligned}$$



(b)



(c)



(d)

From $\rho_\sigma = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n$, $\rho_\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$

$$\begin{aligned} \rho_\sigma \Big|_{R=R_i} &= \mathbf{P} \cdot (-\mathbf{a}_R) \Big|_{R=R_i} = -P_{R2} \Big|_{R=R_i} \\ &= -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{Q}{4\pi R_i^2} \end{aligned} \quad (3-115)$$

on the inner shell surface;

$$\begin{aligned} \rho_\sigma \Big|_{R=R_o} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_R \Big|_{R=R_o} = P_{R2} \Big|_{R=R_o} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{Q}{4\pi R_o^2} \end{aligned} \quad (3-116)$$

on the outer shell surface; and

$$\begin{aligned} \rho_p &= -\nabla \cdot \mathbf{P} \\ &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 P_{R2}) = 0. \end{aligned} \quad (3-117)$$

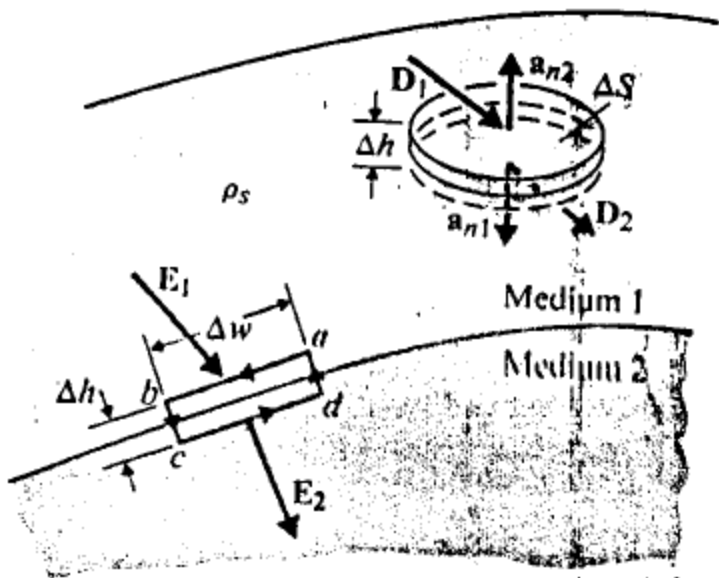
معادلات (۳-۱۱۵) و (۳-۱۱۶) و (۳-۱۱۷) نشان می دهند که بار حجمی قطبی شدگی خالصی در داخل پوسته ی دی الکتریک وجود ندارد. اما بار های سطحی قطبی شدگی منفی روی سطح داخلی و بار های سطحی قطبی شدگی مثبت روی سطح خارجی موجودند. این بارهای سطحی یک شدت میدان الکتریکی بوجود می آورند که بصورت شعاعی بسمت داخل است و بنابر این میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه ای $+Q$ در مرکز را در ناحیه ی ۲ کاهش می دهد.

شرایط مرزی میدان های الکتریکی ساکن:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (\text{V/m})$$

مولفه ی مماسی میدان در سرتاسر فصل مشترک پیوسته است. اگر یکی از محیط ها هادی باشد این معادله برابر صفر است.

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2} \quad \mathbf{a}_{n2} = -\mathbf{a}_{n1}$$



$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{a}_{n2} + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{a}_{n1}) \Delta S$$

$$= \mathbf{a}_{n2} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \Delta S$$

$$= \rho_s \Delta S,$$

⇒

$$\mathbf{a}_{n2} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (\text{C/m}^2),$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (\text{C/m}^2),$$

بیان می کند که مولفه ی عمودی میدان D در سرتاسر فصل

مشترکی که آن بار سطحی وجود دارد ناپیوسته است و مقدار این ناپیوستگی معادل چگالی بار سطحی است.

اگر محیط ۲ هادی باشد، $D_2=0$ پس داریم: $D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = \rho_s$,

$$D_{1n} = D_{2n}$$

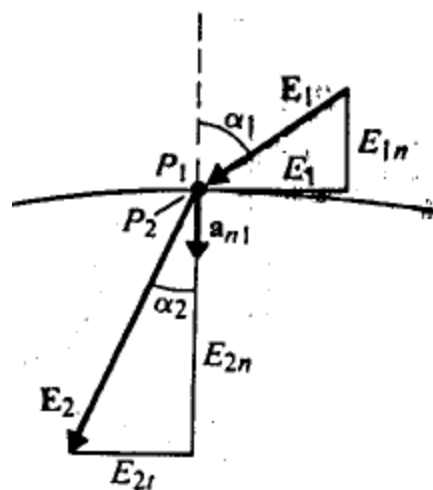
اگر دو دی الکتریک در حال تماس در فصل مشترک خود بار آزاد نداشته باشند داریم $\sigma = 0$ پس:

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

Tangential components, $E_{1t} = E_{2t}$;

Normal components, $\mathbf{a}_{n2} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$.

Example Two dielectric media with permittivities ϵ_1 and ϵ_2 are separated by a charge-free boundary as shown in Fig. 3-24. The electric field intensity in medium 1 at the point P_1 has a magnitude E_1 and makes an angle α_1 with the normal. Determine the magnitude and direction of the electric field intensity at point P_2 in medium 2.



$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$



$$E_2 \sin \alpha_2 = E_1 \sin \alpha_1$$

$$\epsilon_2 E_2 \cos \alpha_2 = \epsilon_1 E_1 \cos \alpha_1$$

Division of Eq. (3-117) by Eq. (3-118) gives

$$\boxed{\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

The magnitude of E_2 is

$$\begin{aligned} E_2 &= \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{(E_2 \sin \alpha_2)^2 + (E_2 \cos \alpha_2)^2} \\ &= \left[(E_1 \sin \alpha_1)^2 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 \cos \alpha_1 \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

or

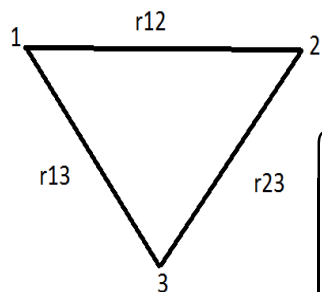
$$\boxed{E_2 = E_1 \left[\sin^2 \alpha_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cos \alpha_1 \right)^2 \right]^{1/2}}$$

انرژی پتانسیل الکتریکی:

اگر در تعادل توزیع بار لحظه ای یا پیوسته داشتیم برای انتقال بار q از مرجع پتانسیل (بی نهایت) در داخل توزیع بار می بایست کار انجام شود و مقدار این کار برابر بود با پتانسیل حاصل از مابقی بارها به جز بار q . حال اگر سه بار q_1, q_2, q_3 داشته باشیم و بخواهیم این بارها را در نقاط مشخص شده در شکل زیر به ترتیب بیاوریم، می خواهیم ببینیم که انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده در سیستم چقدر است؟

برای انتقال بارها می بایست کار انجام شود و مقدار این کار به صورت انرژی پتانسیل در سیستم ذخیره می شود.

حال انتقال بار q ها به مکانشان:



$$\left\{ \begin{array}{l} W_1 = q \times V^{ext} = 0 \\ W_2 = q_2 \times V^{ext} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r_{12}} \\ W_3 = q_3 \times V^{ext} = q_3 V_1^{ext} + q_3 V_2^{ext} \\ \rightarrow W_3 = \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon r_{13}} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon r_{23}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} W_t = W_1 + W_2 + W_3 \Rightarrow \\ W = \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon r_{13}} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon r_{23}} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r_{21}} \end{array} \right.$$

حال اگر n نقطه داشته باشیم و بخواهیم n بار را به آن مکانها منتقل نماییم، داریم:

$$W_t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}}$$

این نوشتار اشکال دارد چون در دو حالت $j=2, i=1$ و نیز $j=1, i=2$ دو جمله $q_1 q_2$ در W حاصل می کنند پس نیاز به تصحیح ضروری است.

$$\boxed{W_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}}} \Rightarrow W_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \underbrace{\left[\sum_{j=1}^m \frac{q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}} \right]}_{=V^{\text{ext}} \text{ for } q_i} q_i \Rightarrow \boxed{W_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V^{\text{ext}}} \quad \text{and}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_t = \frac{1}{2} \int_V V^{\text{ext}} \rho \, dv} \quad ; \quad \boxed{W_t = \frac{1}{2} \int_S V^{\text{ext}} \rho \, ds} \quad ; \quad \boxed{W_t = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_V |\vec{E}|^2 \, dv}$$

انرژی الکتریسته ساکن بر حسب کمیات میدان:

در معادله ی بالا انرژی الکتریسته ساکن برای یک توزیع بار بر حسب چگالی بار و تابع پتانسیل الکتریکی بدست

آمد. گاهی مناسب است انرژی بر حسب کمیات میدان مانند E و یا D بیان شود.

حال می نویسیم:

$$\frac{W_e = \frac{1}{2} \int_V V^{\text{ext}} \rho \, dv}{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho} \rightarrow W_e = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) V^{\text{ext}} \, dv \xrightarrow{\nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{D}) = \mathbf{V}\nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla \mathbf{V}}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \nabla \cdot (\mathbf{V}^{\text{ext}} \mathbf{D}) \, dv - \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{D} \cdot \nabla V^{\text{ext}} \, dv$$

$$\frac{\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{-\nabla V^{\text{ext}} = \mathbf{E}} \rightarrow W_e = \frac{1}{2} \oint_{S'} V^{\text{ext}} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}' \, ds' + \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv$$

چون V' می تواند هر حجم شامل کلیه ی بارها باشد، می توان آنرا کره ای بسیار بزرگ با شعاع R انتخاب نمود. با میل دادن R بسمت بینهایت، پتانسیل الکتریکی (V) و جابجایی الکتریکی (\mathbf{D}) بترتیب حداقل با سرعت $(1/R)$ و $(1/R^2)$ بسمت صفر میل می کنند. مساحت سطح مرزی S' با R^2 افزایش می یابد. از این رو با میل نمودن R بسمت بینهایت، انتگرال سطحی در معادله حداقل با سرعت $1/R$ کاهش یافته و بسمت صفر میل خواهد نمود. پس در معادله تنها جمله ی زیر باقی می ماند.

مثال: مطلوبست محاسبه ی انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده در کره ی توپر که با چگالی حجمی ρ بار دار شده است. قبلاً محاسبه شده است که پتانسیل این کره در داخل و خارج کره عبارتست از:

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} r & ; r > R \\ \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) & ; r < R \end{cases}$$

حال محاسبه ی انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده در کره.

$$W_t = \frac{1}{2} \int_V V^{\text{ext}} \rho \, dv \Rightarrow W = \frac{1}{2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\rho^2}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) r^2 \, dr \, \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\Rightarrow W = \frac{\rho^2}{12\epsilon_0} \left[3R^2 \int_{r=0}^R r^2 \, dr - \int_{r=0}^R r^4 \, dr \right] \left[\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \right] \left[\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \right]$$

$$\Rightarrow W = \frac{\rho^2}{12\epsilon_0} \left[3R^2 \left(\frac{1}{3} r^3 \right)_0^R - \left(\frac{1}{5} r^5 \right)_0^R \right] [2][2\pi] \Rightarrow W = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}$$

راه حل دوم بر حسب بار و پتانسیل الکتریکی کره در کتاب و در صفحه ی ۱۶۱ موجود است.

راه حل سوم:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} & ; r > R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & ; r \leq R \end{cases} \rightarrow W_t = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dv \Rightarrow W_t = \frac{1}{2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right)^2 r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{r=R}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow W_t = \frac{\rho^2 \epsilon_0}{18 \epsilon_0^2} \left[\int_{r=0}^R r^4 dr \right] \left[\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \right] \left[\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \right]$$

$$+ \frac{\rho^2 \epsilon_0 R^6}{18 \epsilon_0^2} \left[\int_{r=R}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \right] \left[\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta \right] \left[\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \right]$$

$$\Rightarrow W_t = \frac{4\pi\rho^2\epsilon_0}{18\epsilon_0^2} \left[\frac{1}{5} R^5 \right] + \frac{4\pi\rho^2\epsilon_0 R^6}{18\epsilon_0^2} \left[\frac{1}{R} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_t = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}$$

شهر روز نصیریان

خازن ها:

گفته شد: چنانچه یک هادی داشته باشیم و بار q را در آن قرار دهیم بارها در سطح هادی قرار می گیرد و در سطح هادی دو نقطه مجزا دارای اختلاف پتانسیل نمی باشند چرا که اگر آن دو نقطه اختلاف پتانسل داشته باشند، آن موجب جابجایی بارها می شود و این برخلاف شروط الکتروستاتیک می باشد. به تجربه و با استفاده از قوانین میدان های کولن ثابت شده است که خارج قسمت بار روی سطح یک هادی بر اختلاف پتانسیل یک نقطه روی سطح هادی به مقدار بار بستگی ندارد و تنها وابسته به شکل هادی است که به آن ظرفیت هادی منفرد گویند.

$$C = \frac{Q}{\Delta v} \quad \text{ظرفیت هادی منفرد:}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{\Delta v} = \frac{Q}{v} = c \rightarrow \begin{cases} W = \frac{1}{2} \int \rho V(x) dv' = \frac{1}{2} V \int \rho dv' \\ W = \frac{1}{2} \int \sigma V(x) dv' = \frac{1}{2} V \int \sigma dv' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W = \frac{1}{2} QV, Q = CV \\ w = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \end{cases}$$

مثال : مطلوب است محاسبه ظرفیت و W یکاهای کروی با بار Q :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \xrightarrow{\text{on surface}} = V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \xrightarrow{C = \frac{Q}{\Delta V}} C = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$\left\{ W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 R \times \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \right)^2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}, W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}, W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} Q \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \right\}$$

ظرفیت دو هادی منفرد باردار: برای محاسبه بار Q را روی یکی، بار $-Q$ را روی دیگری می گذاریم و اختلاف پتانسیل بین سطوح دو هادی را در نقطه ای بین هادی ها محاسبه می کنیم، سپس با رابطه $Q=CV$ مقدار C محاسبه می شود.

$$\text{if : } Q_1 = Q_2 = Q \Rightarrow W = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2$$

$$\begin{aligned} \text{if : } Q_1 = -Q_2 = Q \Rightarrow W &= \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 = \frac{1}{2} Q V_1 + \frac{1}{2} (-Q) V_2 \\ &= w = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} Q \Delta V \end{aligned}$$

مثال : مطلوب است محاسبه C و W در دو هادی مسطح با فاصله d :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{L} = \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

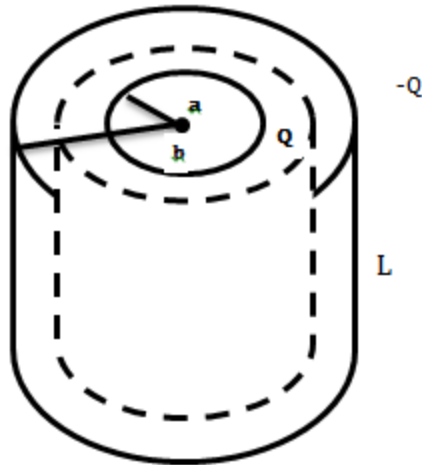
$$\Rightarrow \Delta V = \int_{+}^{-} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot dL = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^d dL = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{dL}{\epsilon_0} C = \frac{Q}{\Delta v} = \frac{Q}{\frac{\sigma d}{\epsilon_0}} = \frac{\sigma A}{\sigma d} \rightarrow \boxed{C = \epsilon_0 \frac{A}{d}}$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 \frac{A}{d}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 A}$$

مثال : خازنی استوانه ای با شعاع خارجی استوانه ای a و شعاع داخلی استوانه ای خارجی b و طول L داریم.

مطلوب است محاسبه ظرفیت و W خازن فوق.



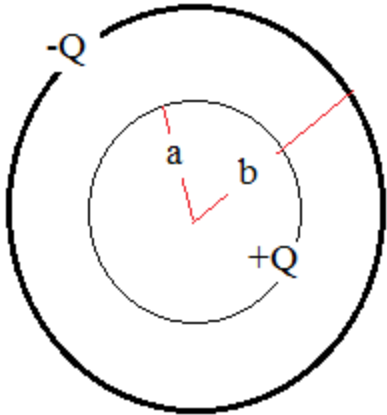
$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_{\text{Lateral surface}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E \int ds = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow E(2\pi rL) = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL}; a \leq r \leq b$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot dL = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot dL = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \pi L} dL = \left[\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \pi} \ln L \right]_a^b = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a} \xrightarrow{Q=C\Delta V}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}} \quad ; \quad W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}$$

مثال : خازنی کروی با شعاع خارجی b و شعاع داخلی a داریم. مطلوب است محاسبه ظرفیت و W خازن فوق.



$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \int ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad ; a \leq r \leq b$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot dL = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot dL = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right) \right]_a^b$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab}\right) \xrightarrow{Q=C\Delta V}$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} \quad ; \quad W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 (b-a)}{4\pi\epsilon_0 ab}$$

دیدیم رابطه ی بین بار (Q) و پتانسیل (V) رابطه ای خطی است. می توان نوشت:

$$\xrightarrow{Q=CV} V_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} Q_j \Rightarrow V = \sum_{i=1}^m V_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P_{ij} Q_j$$

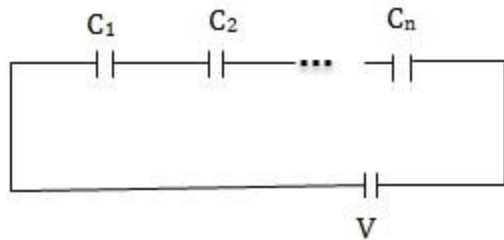
که به P_{ij} ها ضرایب پتانسیل می گویند.

و یا می توان نوشت:

$$\xrightarrow{Q=CV} Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j \Rightarrow Q = \sum_{i=1}^m Q_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j$$

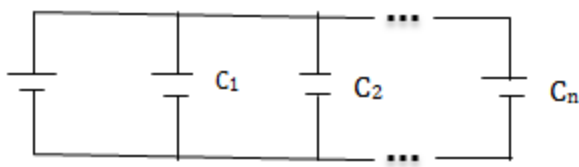
که به C_{ij} ها ضرایب ظرفیت می گویند.

بهم بستن خازن ها :
الف) خازن های سری :

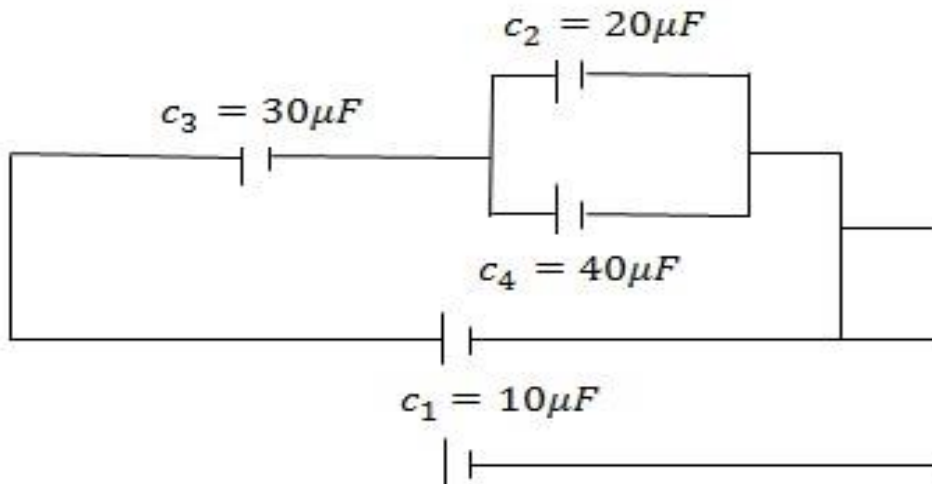


$$\left. \begin{aligned} Q_1 = Q_2 = \dots \\ V_t = V_1 + V_2 + \dots \\ Q = CV \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{Q}{C_t} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \dots \Rightarrow \frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

ب) خازن های موازی :

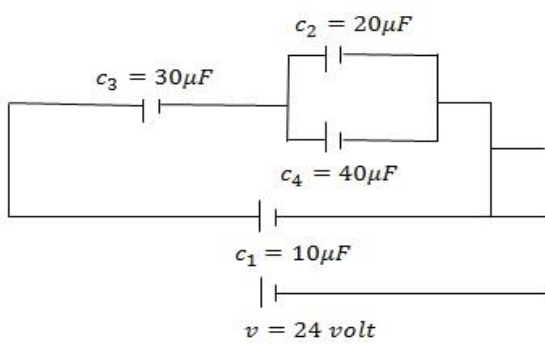


$$\left. \begin{aligned} V_1 = V_2 = \dots \\ Q_t = Q_1 + Q_2 + \dots \\ Q = CV \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_t V = c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots \Rightarrow C_t = C_1 + C_2 + \dots$$



مثال: مطلوبست محاسبه ی ظرفیت معادل،
بار و ولتاژ هر خازن در شکل.

شهر روز نصیریان $v = 24 \text{ volt}$



$$C_{24} = C_2 + C_4 = 20 + 40 = 60\mu F \quad ; \quad \frac{1}{C_{234}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_{24}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{60} \Rightarrow c_{234} = 20\mu F$$

$$C_{1234} = C_1 + C_{234} = 10 + 20 = 30\mu F \quad ; \quad V = 240 = V_1 = V_{234}$$

$$Q_t = C_t V_t \Rightarrow Q_T = 30 \times 240 \Rightarrow Q_t = 7200\mu c$$

$$\begin{cases} C_1 = 10\mu F \\ V_1 = 240 \end{cases} \Rightarrow Q_1 = C_1 V \rightarrow Q_1 = 2400\mu c \quad ; \quad Q_t - Q_1 = Q_{234}$$

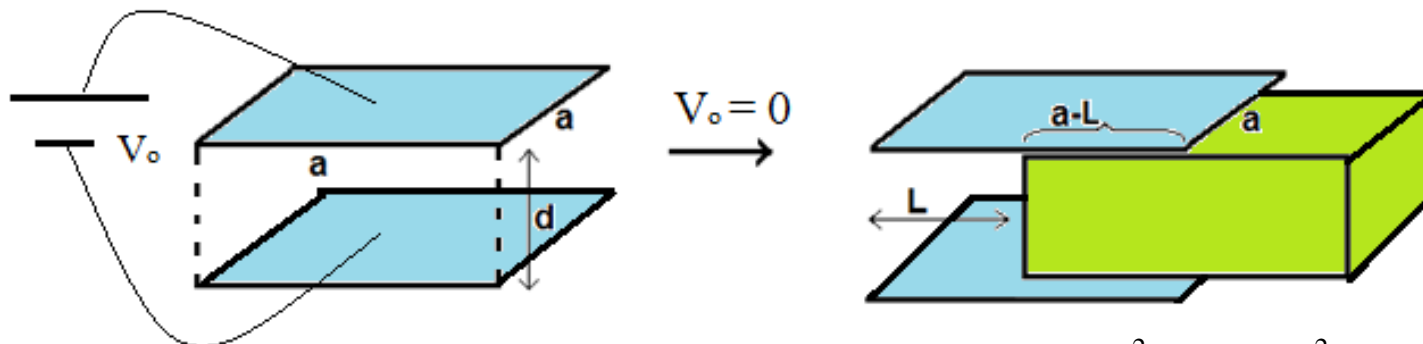
$$\rightarrow Q_{234} = Q_t - Q_1 = 7200 - 2400 \rightarrow Q_{234} = 4800\mu c \quad ; \quad Q_{234} = Q_3 = Q_{24} = 4800\mu c$$

$$\begin{cases} Q_3 = 4800\mu c \\ C_3 = 30\mu F \\ V_3 = ? \end{cases} \Rightarrow V_3 = \frac{Q_3}{C_3} \rightarrow V_3 = 160 V \quad ; \quad V_{24} = V_{234} - V_3 = 240 - 160 = 80$$

$$\xrightarrow{V_{24}=V_2=V_4} Q_2 = C_2 V_2 \rightarrow Q_2 = 20 \times 80 = 1600\mu c$$

$$\rightarrow Q_4 = C_4 V_4 \rightarrow Q_4 = 40 \times 80 \rightarrow Q_4 = 3200\mu c$$

مثال : خازنی با جوشن های مربع ($a \times a$) با عایقی با ثابت K را به پتانسیل خارجی V_0 وصل می کنیم. پس از شارژ کامل V_0 را قطع می نماییم. حال عایق را از یک سو به اندازه L که ($L > a$) است بیرون می کشیم. مطلوب است محاسبه ی C و W خازن قبل و بعد از خروج عایق.



$$C_0 = \epsilon \frac{A}{d} = K \epsilon_0 \frac{A}{d} = K \epsilon_0 \frac{a \times a}{d}$$

$$\text{and } W_0 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C_0} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{K \epsilon_0 \frac{a^2}{d}}$$

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \frac{L \times a}{d} + K \epsilon_0 \frac{(a-L)a}{d}$$

$$\text{and } W = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{\epsilon_0 \frac{L \times a}{d} + K \epsilon_0 \frac{(a-L)a}{d}}$$

$$\Rightarrow W = \left[\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{K \epsilon_0 \frac{a^2}{d}} \right] \left[\frac{Ka}{[Ka + L(1-K)]} \right] \Rightarrow W = \left[\frac{Ka}{[Ka + L(1-K)]} \right] W_0$$

فصل چهارم: حل مسائل الکتریسته ساکن

مسائل الکتریسته ساکن مسائلی هستند که در آنها تاثیرات بارهای در حال سکون بررسی می گردد و حل مساله مستلزم تعیین میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی و یا توزیع بار الکتریکی است.

در صورتی که توزیع بار داده شده باشد، با فرمول های فصل قبل میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی در هر نقطه از فضا محاسبه می گردد. اما در برخی مسائل توزیع دقیق بار مشخص نیست و این فرمولها کاربرد ندارند.

بطور مثال اگر توزیع بار های معینی در فضا و پتانسیل برخی از اجسام هادی داده شده باشد، یافتن توزیع بار های سطحی روی اجسام هادی و/یا شدت میدان الکتریکی در فضا نسبتاً مشکل است.

و یا در نمونه ای دیگر اگر پتانسیل الکتریکی تمام اجسام هادی معلوم باشد و بخواهیم پتانسیل الکتریکی و شدت میدان را در فضای پیرامون آنها و نیز توزیع بارهای سطحی را روی مرز هادی ها پیدا نماییم با روش فصل قبل نمی توان کار کرد.

پس می بایست روشهایی جدید را بکار گرفت و معادلات دیفرانسیلی مناسبی را با شرایط مرزی داده شده حل نمود.

معادلات پواسون و لاپلاس:

داشتیم: $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ (۱-۴)

$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ (۲-۴)

و بدلیل طبیعت غیر چرخشی \mathbf{E} می توان نوشت: (۳-۴) $\mathbf{E} = -\nabla V$

در یک محیط خطی و همسو یکسان داریم: $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

پس معادله ی (۱-۴) نوشته می شود: (۴-۴) $\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho$

با جایگذاری (۳-۴) در (۴-۴) داریم: (۵-۴) $\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho$

که در آن ϵ تابعی از مکان است. در محیط ساده و همگن می توان نوشت:

(۶-۴) $\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$

که در این رابطه ∇^2 را لاپلاسیان می گوئیم که همان دیورژانس-گرادیان پتانسیل در یک محیط همگن است. و یک

معادله دیفرانسیل پاره ای مرتبه دوم است در نقاطی از فضا که مشتقات مرتبه ی دوم موجود باشد.

معادله ی (۶-۴) به معادله ی پواسون معروف است.

In Cartesian coordinates

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{V/m}^2).} \quad (4-7)$$

Cylindrical coordinates:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (4-8)$$

Spherical coordinates:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}. \quad (4-9)$$

در نقاطی از یک محیط ساده که بار آزادی وجود ندارد (یعنی چگالی بار صفر است $\rho=0$)، معادله ی پواسون بشکل

$$\nabla^2 V = 0 \quad (10-4) \quad \text{زیر ساده می گردد که به آن معادله ی لاپلاس می گویند:}$$

EXAMPLE 4-1 The two plates of a parallel-plate capacitor are separated by a distance d and maintained at potentials 0 and V_0 , as shown in Fig. 4-1. Assuming negligible fringing effect at the edges, determine (a) the potential at any point between the plates, and (b) the surface charge densities on the plates.

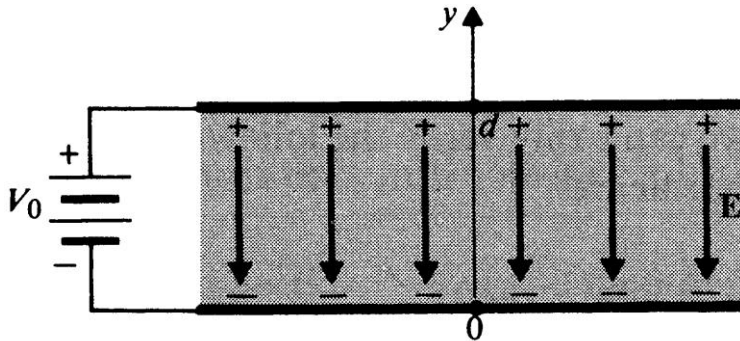


FIGURE 4-1
A parallel-plate capacitor (Example 4-1).

- a) Laplace's equation is the governing equation for the potential between the plates, since $\rho = 0$ there. Ignoring the fringing effect of the electric field is tantamount to assuming that the field distribution between the plates is the same as though the plates were infinitely large and that there is no variation of V in the x and z directions. Equation (4-7) then simplifies to

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = 0, \quad (4-11)$$

where d^2/dy^2 is used instead of $\partial^2/\partial y^2$, since y is the only space variable here.

Integration of Eq. (4-11) with respect to y gives

$$\frac{dV}{dy} = C_1,$$

where the constant of integration C_1 is yet to be determined. Integrating again, we obtain

$$V = C_1 y + C_2. \quad (4-12)$$

Two boundary conditions are required for the determination of the two constants of integration, C_1 and C_2 :

$$\text{At } y = 0, \quad V = 0. \quad (4-13a)$$

$$\text{At } y = d, \quad V = V_0. \quad (4-13b)$$

Substitution of Eqs. (4-13a) and (4-13b) in Eq. (4-12) yields immediately $C_1 = V_0/d$ and $C_2 = 0$. Hence the potential at any point y between the plates is, from Eq. (4-12),

$$V = \frac{V_0}{d} y. \quad (4-14)$$

The potential increases linearly from $y = 0$ to $y = d$.

EXAMPLE 4-2 Determine the \mathbf{E} field both inside and outside a spherical cloud of electrons with a uniform volume charge density $\rho = -\rho_0$ (where ρ_0 is a positive quantity) for $0 \leq R \leq b$ and $\rho = 0$ for $R > b$ by solving Poisson's and Laplace's equations for V .

a) Inside the cloud,

$$0 \leq R \leq b, \quad \rho = -\rho_0.$$

In this region, Poisson's equation ($\nabla^2 V_i = -\rho/\epsilon_0$) holds. Dropping $\partial/\partial\theta$ and $\partial/\partial\phi$ terms from Eq. (4-9), we have

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dV_i}{dR} \right) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0},$$

which reduces to

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dV_i}{dR} \right) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2. \quad (4-16)$$

Integration of Eq. (4-16) gives

$$\frac{dV_i}{dR} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R + \frac{C_1}{R^2}. \quad (4-17)$$

The electric field intensity inside the electron cloud is

$$\mathbf{E}_i = -\nabla V_i = -\mathbf{a}_R \left(\frac{dV_i}{dR} \right).$$

Since \mathbf{E}_i cannot be infinite at $R = 0$, the integration constant C_1 in Eq. (4-17) must vanish. We obtain

$$\mathbf{E}_i = -\mathbf{a}_R \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R, \quad 0 \leq R \leq b. \quad (4-18)$$

b) Outside the cloud,

$$R \geq b, \quad \rho = 0.$$

Laplace's equation holds in this region. We have $\nabla^2 V_o = 0$ or

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{dV_o}{dR} \right) = 0. \quad (4-19)$$

Integrating Eq. (4-19), we obtain

$$\frac{dV_o}{dR} = \frac{C_2}{R^2} \quad (4-20)$$

or

$$\mathbf{E}_o = -\nabla V_o = -\mathbf{a}_R \frac{dV_o}{dR} = -\mathbf{a}_R \frac{C_2}{R^2}. \quad (4-21)$$

The integration constant C_2 can be found by equating \mathbf{E}_o and \mathbf{E}_i at $R = b$.

$$\boxed{E_{\text{Out}} = E_{\text{in}} \quad ; \quad R=b} \implies \frac{C_2}{b^2} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} b,$$

from which we find

$$C_2 = \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0} \quad (4-22)$$

and

$$\mathbf{E}_o = -\mathbf{a}_R \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R^2}, \quad R \geq b. \quad (4-23)$$

Since the total charge contained in the electron cloud is

$$Q = -\rho_0 \frac{4\pi}{3} b^3,$$

Eq. (4-23) can be written as

$$\mathbf{E}_o = \mathbf{a}_R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad (4-24)$$

for potential: Integrating Eq. (4-17), remembering that $C_1 = 0$, we have

$$\frac{dV_i}{dR} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R + \frac{C_1}{R^2} \cdot (4-17) \Rightarrow V_i = \frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0} + C'_1. \quad (4-25)$$

It is important to note that C'_1 is a new integration constant and is not the same as C_1 . Substituting Eq. (4-22) in Eq. (4-20) and integrating, we obtain

$$C_2 = \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0} \quad (4-22) ; \quad \frac{dV_o}{dR} = \frac{C_2}{R^2} \quad (4-20) \Rightarrow V_o = -\frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R} + C'_2. \quad (4-26)$$

However, C'_2 in Eq. (4-26) must vanish, since V_o is zero at infinity ($R \rightarrow \infty$). As electrostatic potential is continuous at a boundary, we determine C'_1 by equating V_i and V_o at $R = b$:

$$\frac{\rho_0 b^2}{6\epsilon_0} + C'_1 = -\frac{\rho_0 b^2}{3\epsilon_0}$$

or

$$C'_1 = -\frac{\rho_0 b^2}{2\epsilon_0}; \quad (4-27)$$

and, from Eq. (4-25),

$$V_i = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left(\frac{3b^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right). \quad (4-28)$$

We see that V_i in Eq. (4-28) is the same as V in Eq. (3-172), with $\rho = -\rho_0$.

دو روش برای حل معادله ی لاپلاس وجود دارد: (۱) روش تصاویر و (۲) روش پیدا کردن جواب کلی بوسیله ی جوابهای خصوصی معادله در دستگاه مختصاتی که تقارن موجود در مساله آن را ایجاب می نماید.

قبل از پرداختن به این روشها، به دو قضیه ی مهم در جوابهای معادله ی لاپلاس می پردازیم.

قضیه ی اول: اگر V_1, V_2, \dots, V_n همگی جوابهای معادله ی لاپلاس باشند آنگاه V بشکل زیر که در آن C ها

$$V = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \dots + C_n V_n \quad \text{مقادیر ثابت و اختیاری هستند نیز جواب این معادله می باشد.}$$

اثبات:

$$\nabla^2 V = \nabla^2 C_1 V_1 + \nabla^2 C_2 V_2 + \dots + \nabla^2 C_n V_n \Rightarrow \nabla^2 V = C_1 \nabla^2 V_1 + C_2 \nabla^2 V_2 + \dots + C_n \nabla^2 V_n = 0$$

پس می توان دو یا چند جواب از معادله ی لاپلاس را با هم ترکیب کرد بنحوی که جواب در مجموعه ای از شرایط مرزی صدق نماید.

قضیه ی دوم: (قضیه ی یکتایی) دو جواب معادله ی لاپلاس که در شرایط مرزی یکسانی صدق نمایند یا با هم برابرند و یا اختلافشان عددی ثابت است.

روش تصاویر:

گفتیم که مجموعه ای از شرایط مرزی مفروض، جواب معادله ی لاپلاس یکتا است، بطوری که اگر بتوانیم به هر طریق ممکن جوابی برای V پیدا کنیم و این جواب در تمامی شرایط مرزی صدق کند، آنگاه جواب کامل معادله ی لاپلاس بدست آمده است. روش تصاویر بی آنکه معادله ای دیفرانسیلی را حل نماید راهی برای بدست آوردن این جواب می دهد. این روش در تمامی مسائل الکترواستاتیک قابل استفاده نیست.

بطور مثال فرض کنید:

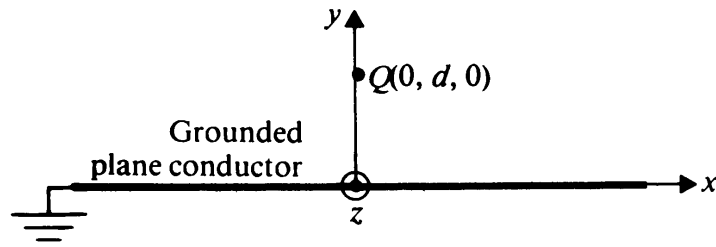
Consider the case of a positive point charge, Q , located at a distance d above a large grounded (zero-potential) conducting plane, as shown in Fig. 4–3(a). The problem is to find the potential at every point above the conducting plane ($y > 0$). The formal procedure for doing so would be to solve Laplace's equation in Cartesian coordinates:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (4-36)$$

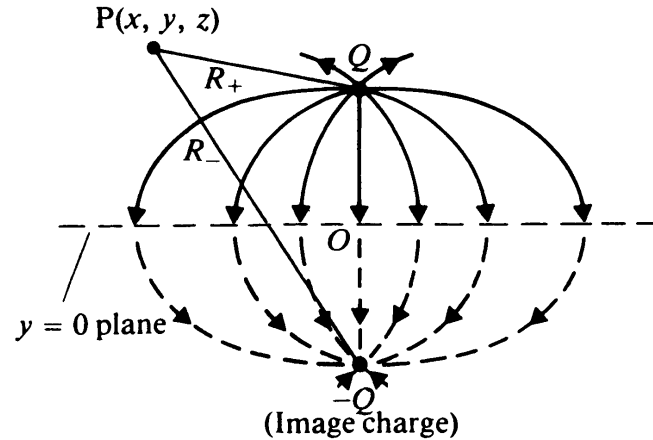
which must hold for $y > 0$ except at the point charge. The solution $V(x, y, z)$ should satisfy the following conditions:

1. At all points on the grounded conducting plane, the potential is zero; that is,

$$V(x, 0, z) = 0.$$



(a) Physical arrangement.



(b) Image charge and field lines.

2. At points very close to Q the potential approaches that of the point charge alone; that is

$$V \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \text{ as } R \rightarrow 0,$$

where R is the distance to Q .

3. At points very far from Q ($x \rightarrow \pm \infty$, $y \rightarrow +\infty$, or $z \rightarrow \pm \infty$) the potential approaches zero.
4. The potential function is even with respect to the x and z coordinates; that is,

$$V(x, y, z) = V(-x, y, z)$$

and

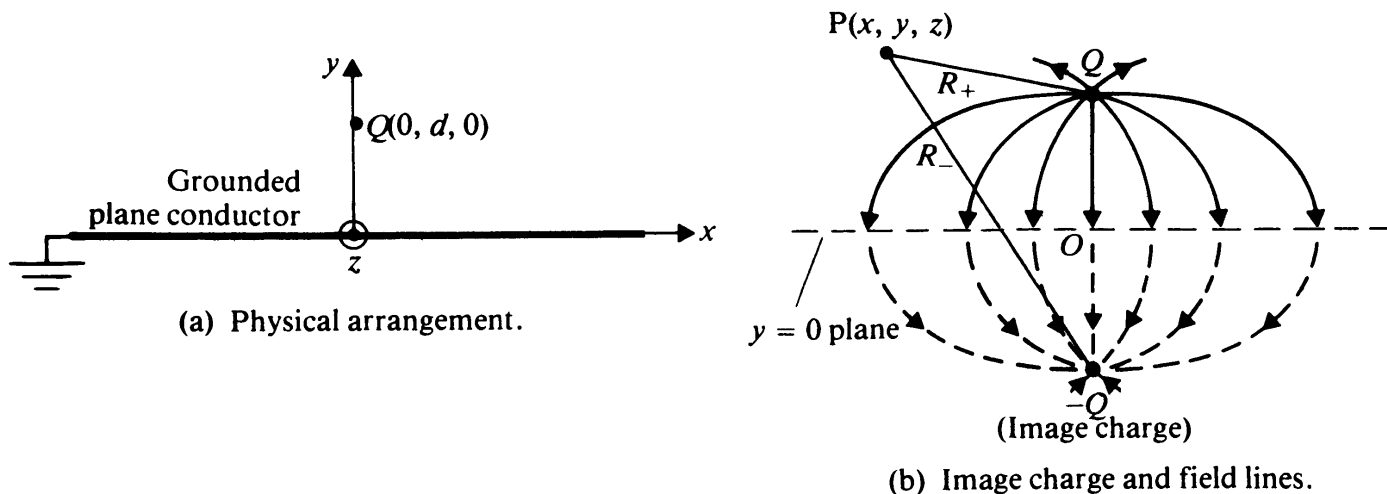
$$V(x, y, z) = V(x, y, -z).$$

It does appear difficult to construct a solution for V that will satisfy all of these conditions.

از دیدگاه دیگر می توانیم استدلال کنیم که حضور بار Q در $y=d$ موجب القای بار منفی روی سطح صفحه ی هادی می شود و چگالی بار سطحی ρ_s را نتیجه می دهد. پس پتانسیل برای نقاط بالای هادی می بایست از رابطه ی زیر محاسبه گردد:

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s}{R_1} ds,$$

که در آن R_1 فاصله ی ds از نقطه ی مورد نظر و S سطح کل صفحه ی هادی است. مشکل اینجاست که ابتدا می بایست ρ_s را از شرط مرزی $V(x, 0, z) = 0$ محاسبه کرد که مشکل است.



4-4.1 POINT CHARGE AND CONDUCTING PLANES

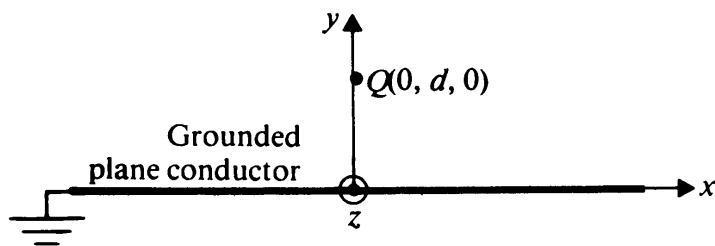
The problem in Fig. 4-3(a) is that of a positive point charge, Q , located at a distance d above a large plane conductor that is at zero potential. If we remove the conductor and replace it by an image point charge $-Q$ at $y = -d$, then the potential at a point $P(x, y, z)$ in the $y > 0$ region is

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right), \quad (4-37)$$

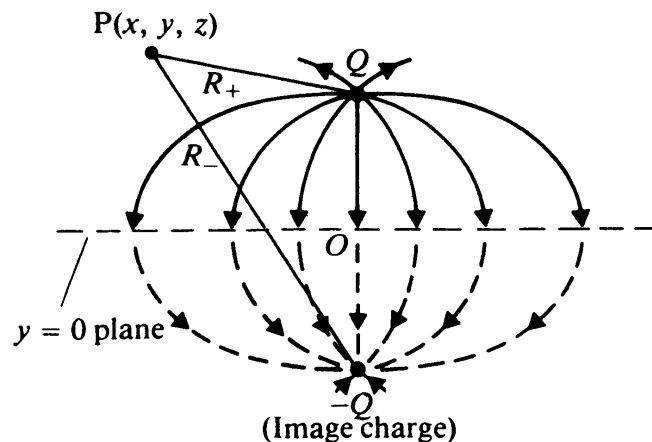
where R_+ and R_- are the distances from Q and $-Q$, respectively, to the point P .

$$R_+ = [x^2 + (y - d)^2 + z^2]^{1/2},$$

$$R_- = [x^2 + (y + d)^2 + z^2]^{1/2}.$$



(a) Physical arrangement.



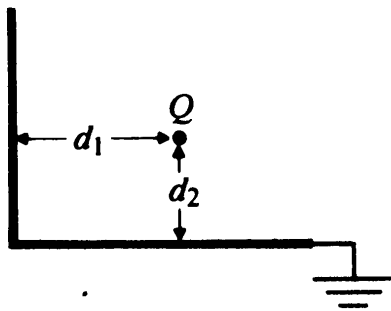
(b) Image charge and field lines.

با جایگذاری مقادی R ها در معادله ی (۴-۳۷) بسادگی اثبات می شود که معادله ی فوق در معادله ی لاپلاس

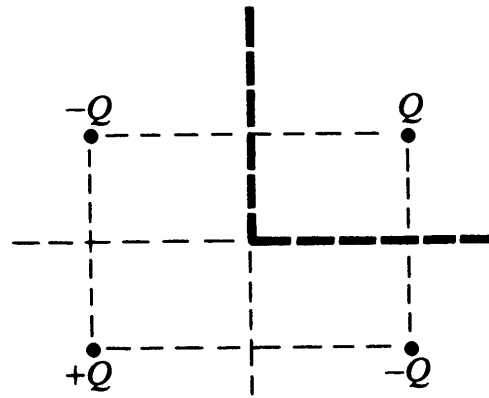
صدق می کند و هر ۴ شرط مساله را نیز برآورده می سازد. پس ((4-36) $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$)

معادله ی (۴-۳۷) یک جواب مساله است و بنا بر قضیه ی یکتایی تنها جواب مساله می باشد.

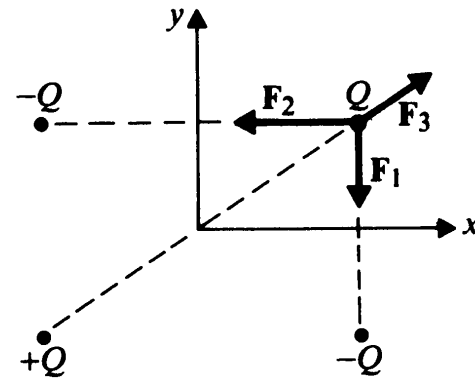
مثال: یک بار نقطه ای Q در فواصل d_1 و d_2 از دو نیم صفحه ی هادی عمود بر هم زمین شده قرار دارد. نیروی وارد بر Q را در نتیجه ی بارهای القایی روی صفحات تعیین نمایید.



(a) Physical arrangement.



(b) Equivalent image-charge arrangement.



(c) Forces on charge Q .

فرض میکنیم بارهای تصویری $-Q$ مطابق شکل قرار دارند و بجهت تقارن مساله و شرط مرزی صفر بودن پتانسیل در روی صفحات می بایست بار Q را در ربع سوم در نظر گرفت. حال داریم:

we have, for the net force on Q ,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3,$$

where

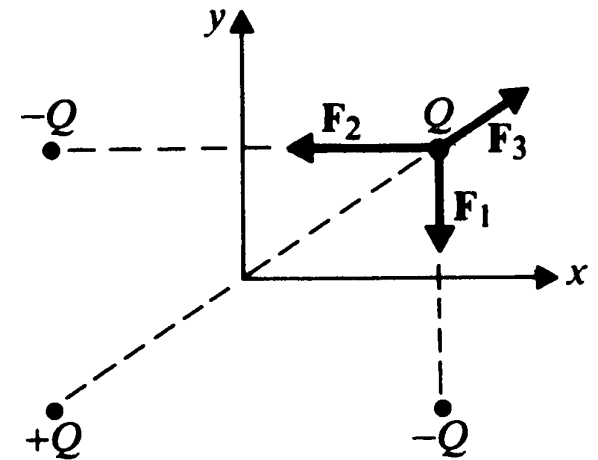
$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{a}_y \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(2d_2)^2},$$

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{a}_x \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(2d_1)^2},$$

$$\mathbf{F}_3 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0[(2d_1)^2 + (2d_2)^2]^{3/2}} (\mathbf{a}_x 2d_1 + \mathbf{a}_y 2d_2).$$

Therefore,

$$\mathbf{F} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \left\{ \mathbf{a}_x \left[\frac{d_1}{(d_1^2 + d_2^2)^{3/2}} - \frac{1}{d_1^2} \right] + \mathbf{a}_y \left[\frac{d_2}{(d_1^2 + d_2^2)^{3/2}} - \frac{1}{d_2^2} \right] \right\}.$$



مثال : بار خطی و استوانه ی مدور.

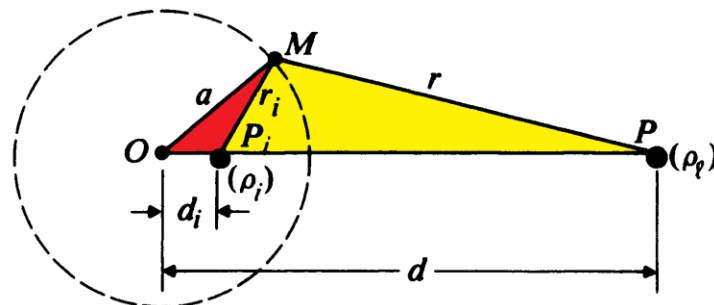
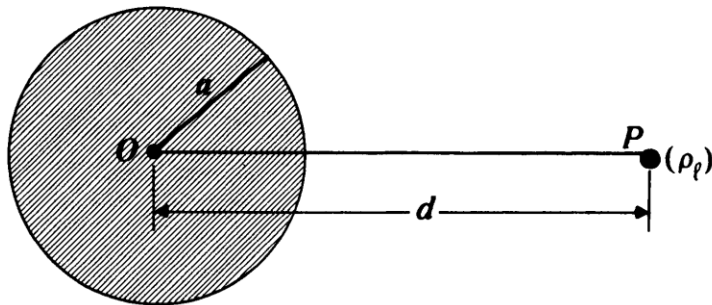
بار خطی با دانسیته ی خطی ρ_ℓ در فاصله ی d از محور یک استوانه ی مدور هادی موازی با آن به شعاع سطح مقطع a در نظر می گیریم. طول بار خطی و استوانه بینهایت است. هدف محاسبه E در خارج استوانه است. برای حل در نقطه ی P_i بار خطی موازی با محور استوانه با چگالی $\rho_i = -\rho_\ell$ را در نظر می گیریم. پتانسیل الکتریکی در فاصله ی r از بار

خطی با چگالی ρ_ℓ با انتگرال گیری از شدت میدان الکتریکی E در معادله $\mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 r}$ (3-40) بدست می آید:

$$V = - \int_{r_0}^r E_r dr = - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r} dr = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}. \quad (4-39)$$

r_0 را بعنوان مرجع پتانسیل صفر نمی توانیم در بینهایت بگیریم، چون پتانسیل را بینهایت می سازد. حال در M داریم:

$$V_M = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_i} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_i}{r}. \quad (4-40)$$



بنابراین سطوح هم پتانسیل بصورت (4-41) $\frac{r_i}{r} = \text{Constant}$. مشخص می شوند. اگر قرار باشد سطح هم پتانسیل بر سطح استوانه قرار داشته باشد می بایست مثلث های OMP_i و OPM متشابه باشند. این دو مثلث زاویه ی

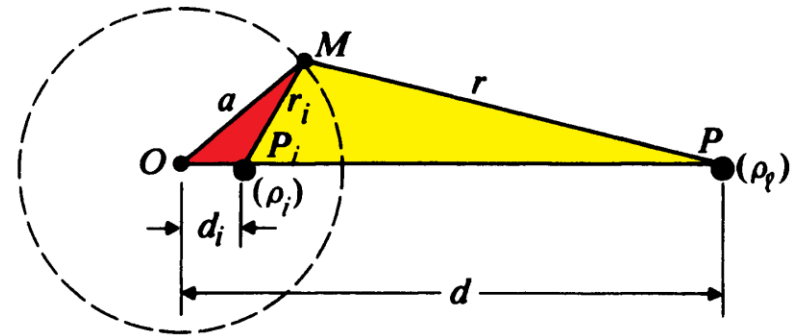
$$\frac{\overline{P_iM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OP_i}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} \quad \text{or}$$

$$\frac{r_i}{r} = \frac{d_i}{a} = \frac{a}{d} = \text{Constant}. \quad (4-42)$$

From Eq. (4-42) we see that if

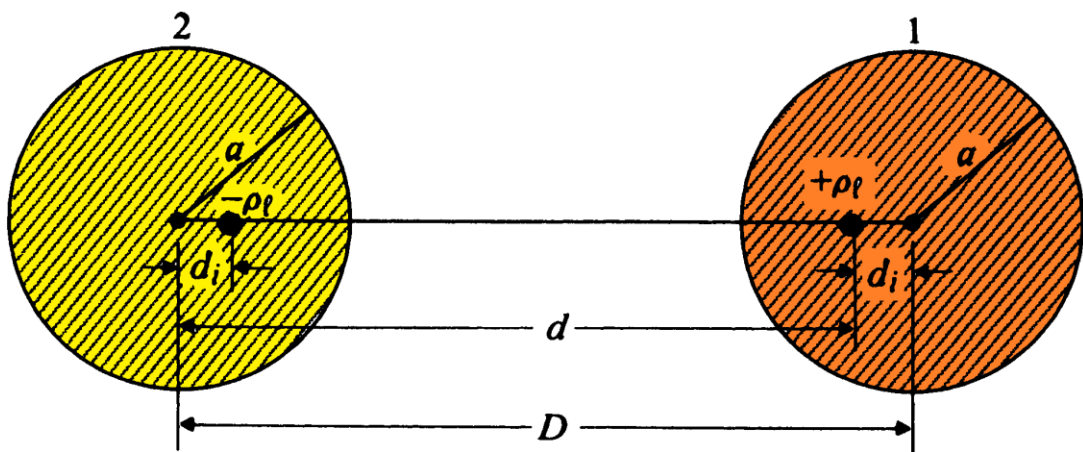
$$\boxed{d_i = \frac{a^2}{d}} \quad (4-43)$$

مشترک MOP_i دارند پس داریم:



پس بار خطی و تصویری $-\rho_l$ به همراه ρ_l سطح استوانه ی خط چین را هم پتانسیل می سازد. با تغییر مکان M روی دایره r و r_i تغییر می یابند اما نسبتشان همواره ثابت است. پس در مساله می توان بجای استوانه، یک خط بار با چگالی $-\rho_l$ را قرار داد و در تمام نقاط خارج سطح با استفاده از دو خط بار مقدار شدت میدان الکتریکی و پتانسیل را محاسبه نمود.

عملیات انجام شده ما را قادر می سازد تا ظرفیت یک خط انتقال با سیم باز شامل دو هادی موازی را محاسبه نماییم.
 مثال (۴-۴): مطلوبست محاسبه ی ظرفیت بین دو سیم هادی مدور موازی طویل به شعاع a را در واحد طول تعیین کنید.
 محور سیم ها در فاصله ی D از یکدیگر قرار دارند.



می توان تصور کرد که سطوح هم پتانسیل

دو سیم توسط یک جفت بار خطی

$+\rho_l$ and $-\rho_l$

که در فاصله ی $(D - 2d_i) = d - d_i$

قرار دارند ، تولید شده باشد.

اختلاف پتانسیل بین دو سیم برابر با اختلاف پتانسیل بین هر دو نقطه روی سیم ها است. از معادلات (۴-۴۰) و (۴-۴۱)

$$V_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d} \quad ; \quad V_1 = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d} \quad \text{داریم:}$$

چون $a < d$ است ، V_1 مثبت و V_2 منفی می باشند.

حال ظرفیت در واحد طول می شود:

$$C = \frac{\rho_l}{V_1 - V_2} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}, \quad (4-44)$$

where

$$d = D - d_i = D - \frac{a^2}{d},$$

from which we obtain†

$$d = \frac{1}{2}(D + \sqrt{D^2 - 4a^2}). \quad (4-45)$$

Using Eq. (4-45) in Eq. (4-44), we have

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \left[(D/2a) + \sqrt{(D/2a)^2 - 1} \right]} \quad (\text{F/m}). \quad (4-46)$$

Since

$$\ln [x + \sqrt{x^2 - 1}] = \cosh^{-1} x$$

for $x > 1$, Eq. (4-46) can be written alternatively as

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1} (D/2a)} \quad (\text{F/m}). \quad (4-47)$$

مسائل مقدار مرزی در دستگاههای مختصات و جداسازی متغیرها:

دیدیم که روش تصاویر برای حل انواع معینی از مسائل الکتریسته ساکن که شامل بار آزاد در نزدیکی مرزهای هادی با شکل هندسی ساده هستند بسیار مفید است. اما اگر مساله شامل دسته ای از هادی ها که در پتانسیل مشخصی نگه داشته شده اند و بار آزاد مجزا نیز وجود نداشته باشد، روش تصاویر کاربرد ندارد و می بایست معادله ی لاپلاس حل گردد. چون پتانسیل الکتریکی تابعی از مکان است و روی مرزهای مساله پتانسیل و/یا مشتقات عمودی آنها مشخص هستند، از روشی بنام جدا سازی متغیرها استفاده می نمایم.

مسائلی که از معادلات دیفرانسیل پاره ای با شرایط مرزی مشخص تبعیت می نمایند را مسائل مقدار مرزی می نامند.

مسائل مقدار مرزی در توابع پتانسیل به سه دسته تقسیم می شوند:

(۱) مسائل دیریکله: در آنها مقدار پتانسیل در تمام مرزها مشخص است.

(۲) مسائل نویمن: در آنها مشتق عمودی پتانسیل در تمام نقاط مرزها مشخص است.

(۳) مسائل مقدار مرزی ترکیبی: در آنها پتانسیل در برخی نقاط مرزی و مشتق عمودی پتانسیل در بقیه ی نقاط مشخص است.

بسته به شرایط مرزی مختلف، جواب توابع پتانسیل متفاوتند اما روش حل جداسازی متغیرها در هر سه شرط

مرزی بالا مشابه است.

حل معادلات لاپلاس در مختصات کارتزین:

Laplace's equation for scalar electric potential V in Cartesian coordinates is

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (4-81)$$

To apply the method of separation of variables, we assume that the solution $V(x, y, z)$ can be expressed as a product in the following form:

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z), \quad (4-82)$$

where $X(x)$, $Y(y)$, and $Z(z)$ are functions of only x , y , and z , respectively. Substituting Eq. (4-82) in Eq. (4-81), we have

$$Y(y)Z(z) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)Z(z) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + X(x)Y(y) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0,$$

which, when divided through by the product $X(x)Y(y)Z(z)$, yields

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0. \quad (4-83)$$

در رابطه ی بالا هر جمله تابعی از مختصات خودش است پس می نویسیم:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k_x^2, \quad (4-85)$$

where k_x^2 is a constant of integration to be determined from the boundary conditions of the problem.

It is convenient to rewrite Eq. (4-85) as

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0. \quad (4-86)$$

TABLE 4-1
Possible Solutions of $X''(x) + k_x^2 X(x) = 0$

k_x^2	k_x	$X(x)$	Exponential forms [†] of $X(x)$
0	0	$A_0 x + B_0$	
+	k	$A_1 \sin kx + B_1 \cos kx$	$C_1 e^{jkx} + D_1 e^{-jkx}$
-	jk	$A_2 \sinh kx + B_2 \cosh kx$	$C_2 e^{kx} + D_2 e^{-kx}$

[†] The exponential forms of $X(x)$ are related to the trigonometric and hyperbolic forms listed in the third column by the following formulas:

$$e^{\pm jkx} = \cos kx \pm j \sin kx, \quad \cos kx = \frac{1}{2}(e^{jkx} + e^{-jkx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2j}(e^{jkx} - e^{-jkx});$$

$$e^{\pm kx} = \cosh kx \pm \sinh kx, \quad \cosh kx = \frac{1}{2}(e^{kx} + e^{-kx}), \quad \sinh kx = \frac{1}{2}(e^{kx} - e^{-kx}).$$

اگر معادله ای به شکل زیر داشته باشیم:

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} + k^2F(x) = 0$$

جواب های عمومی آن یکی از فرم های زیر است:

$$\left. \begin{array}{l} F(x) : \sin(kx) \\ F(x) : \cos(kx) \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) = A_1 \sin(kx) + A_2 \cos(kx)$$

$$\left. \begin{array}{l} F(x) : e^{ikx} \\ F(x) : e^{-ikx} \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}$$

و یا اگر معادله ای به شکل زیر داشته باشیم:

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} - k^2F(x) = 0$$

جواب های عمومی آن یکی از فرم های زیر است:

$$\left. \begin{array}{l} F(x) : \sinh(kx) \\ F(x) : \cosh(kx) \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) = A_1 \sinh(kx) + A_2 \cosh(kx)$$

$$\left. \begin{array}{l} F(x) : e^{kx} \\ F(x) : e^{-kx} \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) = A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx}$$

حال چنانچه معادلات (۴-۸۶ الی ۸۸) با توجه به شرایط مرزی مساله بدست آیند.

مقدار جواب معادله ی لاپلاس یعنی V در محیط مشخص می گردد. 154

شرط تعامد: فرض نمایید با استفاده از روش جداسازی متغیرها و یا هر روش دیگری معادله دیفرانسیل مرتبه

$$\frac{d^2}{dr^2} u(r) + \lambda u(r) = 0 ; (r: x, y \text{ or } z) \text{ دومی بصورت زیر بدست آوردیم:}$$

بازای مقداری معلوم برای λ (که می تواند k^2 باشد)، تابعی مانند $u_\lambda(r)$ موجود است که در معادله ی فوق و شرایط

مرزی وضع شده صدق نماید. در این صورت λ را ویژه مقدار، $u_\lambda(r)$ را ویژه تابع و $L = \frac{d^2}{dr^2}$ را عملگر می نامند.

حال چنانچه در یک مساله بازای عملگر L ویژه توابعی بشکل $u_n(r)$ ، $u_m(r)$ داشته باشیم و آنها در رابطه ی زیر

صدق نمایند به عملگر L هرمیتی می گویند: (در آن * نشان دهنده ی همیوگ مختلط تابع است).

$$\int_a^b u_n^*(x) L u_m(x) dx = \int_a^b u_n(x) L u_m^*(x) dx$$

ثابت می شود که :

(۱) ویژه مقدارهای هر عملگر هرمیتی حقیقی اند.

(۲) ویژه تابعهای هر عملگر هرمیتی متعامدند

(۳) ویژه تابع های هر عملگر هرمیتی یک مجموعه کامل تشکیل می دهند.

چنانچه شرط تعامد روی تابع $u_n(x)$ بصورت زیر باشد:

$$\int_a^b u_n(x) u_m(x) dx = \delta_{mn}$$

آنگاه هر تابع دلخواه $f(x)$ را می توان بر حسب توابع متعامد کامل اش بسط داد و نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x)$$

برای محاسبه a_n طرفین را در u_n^* ضرب و انتگرال می گیریم و داریم:

$$\begin{aligned} \times u_n^*(x) \left(f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) \right) &\Rightarrow \int_a^b f(x) u_n^*(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_a^b u_n^*(x) u_n(x) dx}_{= \delta_{n^*n} = 1} \\ \Rightarrow a_n &= \int_a^b f(x) u_n^*(x) dx \end{aligned}$$

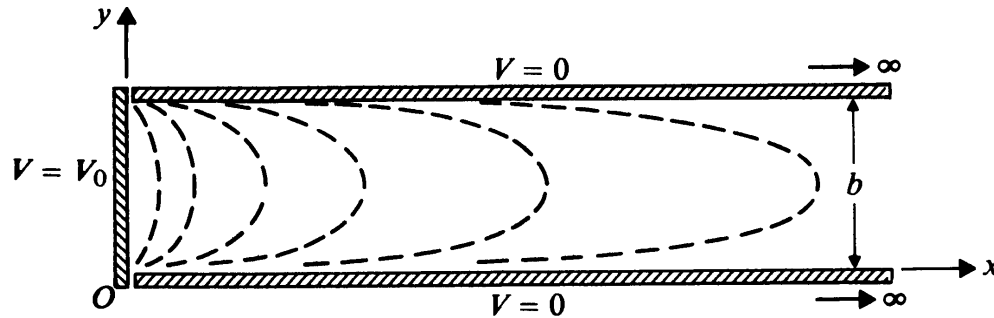
حال چنانچه ویژه توابع عملگر هرمیتی موجود باشند با استفاده از شرط تعامد می توان ضرایب آنها را محاسبه نمود.

یکی از توابع مشهور متعامد سینوس و کسینوس می باشند.

مثال: دو الکتروود صفحه ای موازی نیمه بینهایت با فاصله b که در پتانسیل صفر قرار دارند، داریم. الکتروود سومی

عمود بر آنها و مجزا شده در پتانسیل ثابت V_0 نگه داشته شده است. مطلوبست محاسبه ی توزیع پتانسیل در

ناحیه ی محصور شده توسط الکتروودها.



Solution Referring to the coordinates in Fig. 4–15, we write down the boundary conditions for the potential function $V(x, y, z)$ as follows.

With V independent of z :

$$V(x, y, z) = V(x, y). \quad (4-90a)$$

In the x -direction:

$$V(0, y) = V_0 \quad (4-90b)$$

$$V(\infty, y) = 0. \quad (4-90c)$$

In the y -direction:

$$V(x, 0) = 0 \quad (4-90d)$$

$$V(x, b) = 0. \quad (4-90e)$$

Condition (4–90a) implies $k_z = 0$, and from Table 4–1,

$$Z(z) = B_0. \quad (4-91)$$

The constant A_0 vanishes because Z is independent of z . From Eq. (4–89) we have

$$\boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0. \quad (4-89)}$$

$$k_y^2 = -k_x^2 = k^2, \quad (4-92)$$

$$\nabla^2 V(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} = 0 \xrightarrow{V(x, y) = X(x)Y(y)}$$

$$Y(y) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\div X(x)Y(y)} \underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{=+k_x^2=k^2} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{=-k_y^2=k_y^2=-k^2} = 0 \Rightarrow$$

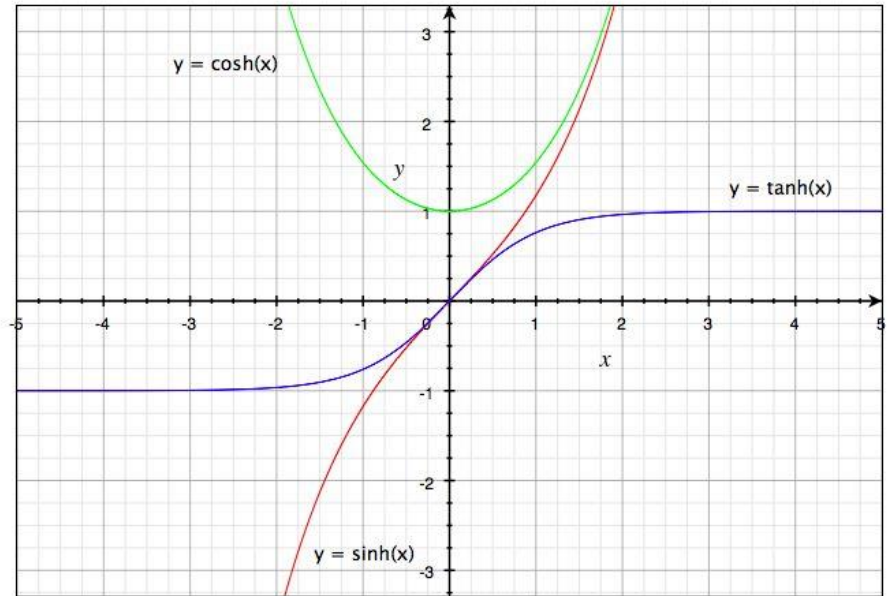
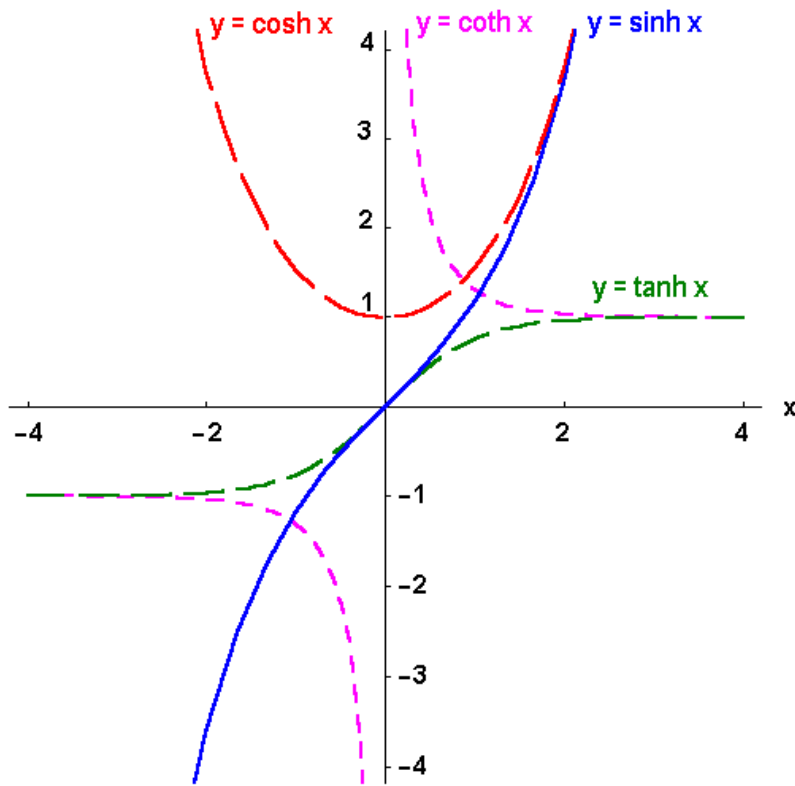
$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = +k^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x) = D_1 e^{kx} + D_2 e^{-kx} \\ Y(y) = A_1 \sin(ky) + A_2 \cos(ky) \end{cases} \Rightarrow$$

$$V(x, y) = X(x)Y(y) = (D_1 e^{kx} + D_2 e^{-kx}) \times (A_1 \sin(ky) + A_2 \cos(ky))$$

حال می توان نوشت:

$$X(x) = D_1 e^{kx} + D_2 e^{-kx} \xrightarrow{V(\infty, y)=0} X(x) = D_2 e^{-kx} \quad (4-93)$$

$$Y(y) = A_1 \sin(ky) + A_2 \cos(ky) \xrightarrow{V(x, 0)=0} Y(y) = A_1 \sin(ky) \quad (4-94)$$



با قرار دادن (۹۱-۴)، (۹۳-۴) و (۹۴-۴) در (۸۲-۴) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} V_n(x, y) &= (B_0 D_2 A_1) e^{-kx} \sin ky \\ &= C_n e^{-kx} \sin ky, \end{aligned} \quad (4-95)$$

where the arbitrary constant C_n has been written for the product $B_0 D_2 A_1$.

Now, of the five boundary conditions listed in Eqs. (4-90a) through (4-90e) we have used conditions (4-90a), (4-90c), and (4-90d). To meet condition (4-90e), we

$$\boxed{V(x, b) = 0. \quad (4-90e)}$$

require

$$V_n(x, b) = C_n e^{-kx} \sin kb = 0, \quad (4-96)$$

which can be satisfied, for all values of x , only if

$$\sin kb = 0$$

or

$$kb = n\pi$$

or

$$k = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4-97)$$

Therefore, Eq. (4-95) becomes

$$V_n(x, y) = C_n e^{-n\pi x/b} \sin \frac{n\pi}{b} y. \quad (4-98)$$

$$V_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi x}{b}} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) ; (4-98)$$

$$V(0, y) = V_0 \quad (4-90b)$$

با قرار دادن شرط (4-90b) در رابطه ی (4-98) داریم:

$$\begin{aligned} V(0, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} V_n(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{b} y \\ &= V_0, \quad 0 < y < b. \end{aligned} \quad (4-99)$$

حال شرط تعامد را بکار می بریم:

$$\underbrace{\int_0^b V_0 \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dy}_{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^b C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dy}_{(2)} \quad (4-100)$$

$$(1) : \int_0^b V_0 \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dy = \frac{bV_0}{m\pi} \left(-\cos \frac{m\pi y}{b}\right)_0^b = \begin{cases} \frac{2bV_0}{m\pi} & m : \text{odd} \\ 0 & m : \text{even} \end{cases}$$

$$(2) : \int_0^b C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dy = \frac{C_n}{2} \int_0^b \left[\cos \frac{(n-m)\pi}{b} y - \cos \frac{(n+m)\pi}{b} y \right] dy$$

$$\Rightarrow \int_0^b C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dy = \begin{cases} \frac{C_n}{2} b & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} \pi \delta_{mn} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} \pi \delta_{mn} & n \neq 0 \\ 2\pi & n = 0 \end{cases}$$

حال با قرار دادن جوابهای دو معادله در (۴-۱۰۰) داریم:

$$\begin{cases} \frac{2bV_0}{m\pi} & m:\text{odd} \\ 0 & m:\text{even} \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} \frac{C_n}{2} b & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \Rightarrow C_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi} & n:\text{odd} \\ 0 & n:\text{even} \end{cases}$$

در نتیجه توزیع پتانسیل مورد نظر در معادله ی (۴-۹۸) می شود:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/b} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\pi x/b} \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad (4-104)$$

$n = 1, 3, 5, \dots,$
 $x > 0 \quad \text{and} \quad 0 < y < b.$

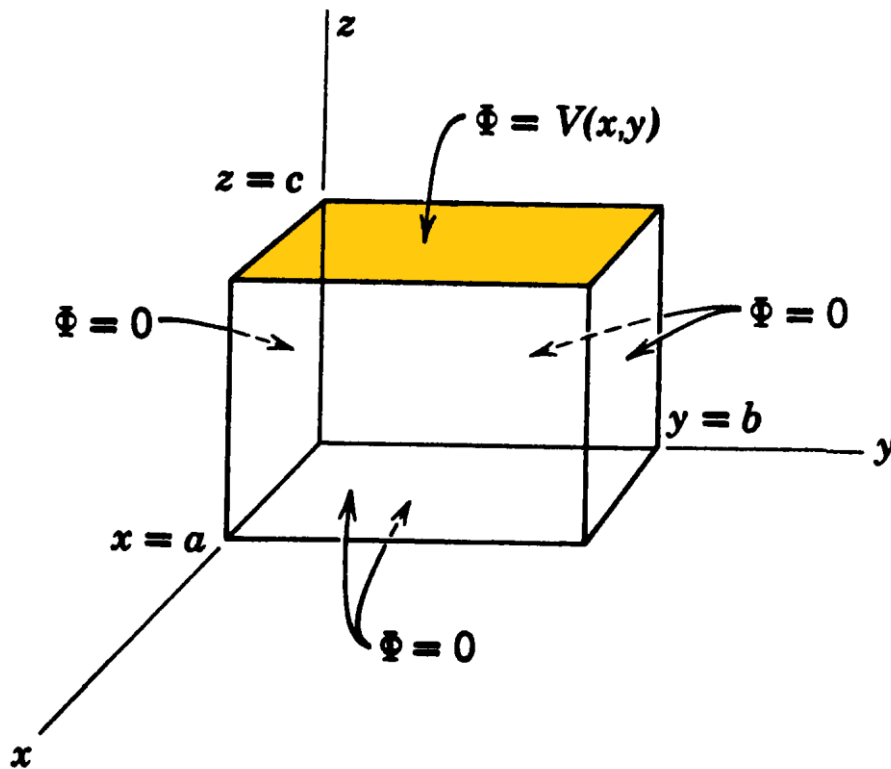
مثال: یک جعبه ی مکعب مستطیل شکل به ابعاد a ، b و c داریم. پتانسیل تمام سطوح غیر از $Z=c$ صفر است.

می خواهیم پتانسیل را در داخل جعبه بدست آوریم.

در داخل جعبه که بار نداریم پس برای آن معادله ی لاپلاس

صادق است. و فرض می کنیم جواب معادله ی لاپلاس

در مختصات کارتزین شده:



$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow$$

$$V(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \quad (*)$$

$$\nabla^2 V(x, y, z) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \xrightarrow{V(x, y) = X(x)Y(y)Z(z)}$$

$$Y(y)Z(z) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)Z(z) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + X(x)Y(y) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\div X(x)Y(y)Z(z)} \underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{=-\alpha^2} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{=-\beta^2} + \underbrace{\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}}_{=+\gamma^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + \beta^2 Y = 0 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \gamma^2 Z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x) = A_1 \sin(\alpha x) + B_1 \cos(\alpha x) \\ Y(y) = A_2 \sin(\beta y) + B_2 \cos(\beta y) \\ Z(z) = A_3 \sinh(\gamma z) + B_3 \cosh(\gamma z) \end{cases}$$

حال در مورد وجه پشت و جلو داریم:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ V = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{X(x) = A_1 \sin \alpha x + B_1 \cos \alpha x} \left\{ \begin{array}{l} X(x) = A_1 \sin \alpha x \\ B_1 = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\left. \begin{array}{l} x=a \\ V=0 \end{array} \right\}} \\ A_1 \sin \alpha a = 0 \Rightarrow \alpha a = n\pi \Rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{a} ; n = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right] \Rightarrow X(x) = A_1 \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \quad (1)$$

حال جوابهای $Y(y)$: $Y(y) = A_2 \sin \beta y + B_2 \cos \beta y$

حال در مورد وجه چپ و راست داریم:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ V = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{Y(y)=A_2 \sin \beta y + B_2 \cos \beta y} \left\{ \begin{array}{l} Y(y) = A_2 \sin \beta y \\ B_2 = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\left. \begin{array}{l} y=b \\ V=0 \end{array} \right\}} \Rightarrow Y(y) = A_2 \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \quad (2) \\ A_2 \sin \beta y = 0 \Rightarrow \beta b = m\pi \Rightarrow \beta_m = \frac{m\pi}{b} ; m = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

حال جوابهای $Z(z)$: مطابق با جداسازی متغیرها می بایست برای معادله ی لاپلاس داشته باشیم: $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$

$$\underbrace{\frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} V(x, y, z)}_{=\alpha^2} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2}{dy^2} V(x, y, z)}_{=\beta^2} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} V(x, y, z)}_{=-\gamma^2} = 0$$

فلذا جوابهای $Z(z)$ می شوند:

$$Z(z) = A_3 \sinh \gamma z + B_3 \cosh \gamma z$$

$$\left[\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ V = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{Z(z)=A_3 \sinh \gamma z + B_3 \cosh \gamma z} \left\{ \begin{array}{l} Z(z) = A_3 \sinh \gamma z \\ B_3 = 0 \end{array} \right. \right]$$

با توجه به : $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$

$$\gamma = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \Rightarrow \gamma_{nm} = \pi \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} \quad (3) \quad \text{داریم:}$$

با توجه به (*), (1), (2) و (3) داریم:

$$V(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \underbrace{A_1 A_2 A_3}_{= A_{nm}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \sinh(\gamma_{nm} z) \Rightarrow$$

$$V(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z)$$

حال شرط زیر:

$$\xrightarrow{\begin{cases} V=V(x,y) \\ z=c \end{cases}} V(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} c)$$

حال استفاده از شرط تعامد برای محاسبه ی A_{nm} :

طرفین را در $\sin(\alpha_{n'} x) \sin(\beta_{m'} y)$ ضرب کرده و انتگرال می گیریم.

$$\int_0^a \int_0^b V(x, y) \sin(\alpha_{n'} x) \sin(\beta_{m'} y) dx dy =$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} c) \sin(\alpha_{n'} x) \sin(\beta_{m'} y) dx dy \Rightarrow$$

$$\int_0^a \sin(\alpha_{n'} x) dx \int_0^b V(x, y) \sin(\beta_{m'} y) dy =$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sinh(\gamma_{nm} c) \underbrace{\int_0^a \sin(\alpha_n x) \sin(\alpha_{n'} x) dx}_{\int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} \pi \delta_{mn} & n \neq 0 \\ 0 & n=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} \delta_{nn'}} \underbrace{\int_0^b \sin(\beta_m y) \sin(\beta_{m'} y) dy}_{\int_0^{2\pi} \sin(my) \sin(m'y) dy = \begin{cases} \pi \delta_{mm'} & m \neq 0 \\ 0 & m=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{2} \delta_{mm'}} \Rightarrow$$

$$\int_0^a \sin(\alpha_{n'} x) dx \int_0^b V(x, y) \sin(\beta_{m'} y) dy = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sinh(\gamma_{nm} c) \frac{ab}{4}$$

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm} c)} \int_0^a \sin(\alpha_{n'} x) dx \int_0^b V(x, y) \sin(\beta_{m'} y) dy$$

حل معادلات لاپلاس در مختصات استوانه ای:

برای حل مسائل با مرزهای استوانه ای معادله ی لاپلاس را در دستگاه استوانه ای می نویسیم.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (4-115)$$

جواب کلی این معادله که به بسل معروف است تا فصل ۱۰ بتعویق می افتد. در حالت هایی که بعد طولی در مقایسه

با شعاع بزرگ است می توان حل را از بخش مربوط به Z مستقل در نظر گرفت. پس معادله می شود:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0. \quad (4-116)$$

روش جداسازی متغیرها را با در نظر گرفتن حاصلضرب زیر انجام می دهیم: $V(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$, (4-117)

با جایگذاری (۴-۱۱۷) در (۴-۱۱۶) و تقسیم بر $R(r)\Phi(\phi)$ داریم:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)\Phi(\phi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 R(r)\Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\Phi(\phi)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{R(r)}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = 0 \xrightarrow{\div \frac{1}{R(r)\Phi(\phi)}}$$

$$\frac{r}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = 0$$

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dR(r)}{dr} \right] + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0. \quad (4-118)$$

حال می گیریم:

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dR(r)}{dr} \right] = k^2 \quad (4-119)$$

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = -k^2, \quad (4-120)$$

معادله ی (۴-۱۲۰) را می توان بصورت زیر باز نویسی نمود.

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + k^2\Phi(\phi) = 0. \quad (4-121)$$

اگر $k=n$ (عدد صحیح است) باشد، داریم: $\Phi(\phi) = A_\phi \sin n\phi + B_\phi \cos n\phi,$ (4-122)

که A و B اعداد ثابت اند.

حال در (۴-۱۱۹) داریم:

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} - n^2 R(r) = 0, \quad (4-123)$$

Φ دامنه تغییرات صفر تا 2π دارد. جواب (۴-۱۲۳) می شود:

$$R(r) = A_r r^n + B_r r^{-n}. \quad (4-124)$$

با قرار دادن (۴-۱۲۲) و (۴-۱۲۴) در (۴-۱۱۷)، جواب معادله لاپلاس (۴-۱۱۶) مستقل از Z بدست می آید:

$$V_n(r, \phi) = r^n(A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi) + r^{-n}(A'_n \sin n\phi + B'_n \cos n\phi) \quad n \neq 0. \quad (4-125)$$

اگر ناحیه تنها شامل محور استوانه باشد ($r=0$) پس جمله ی r^{-n} نمی تواند باشند.

اگر ناحیه شامل نقطه ای در بینهایت باشد چون در آنجا پتانسیل صفر است، جملات r^n موجود نیستند.

Eq. (4-121) has the simplest form when $k = 0$. We have

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0. \quad (4-126)$$

The general solution of Eq. (4-126) is $\Phi(\phi) = A_0\phi + B_0$. If there is no circumferential variation, A_0 vanishes,[†] and we have

$$\Phi(\phi) = B_0, \quad k = 0. \quad (4-127)$$

The equation for $R(r)$ also becomes simpler when $k = 0$. We obtain from Eq. (4-119)

$$\frac{d}{dr} \left[r \frac{dR(r)}{dr} \right] = 0, \quad (4-128)$$

which has a solution

$$R(r) = C_0 \ln r + D_0, \quad k = 0. \quad (4-129)$$

The product of Eqs. (4-127) and (4-129) gives a solution that is independent of either z or ϕ :

$$V(r) = C_1 \ln r + C_2, \quad (4-130)$$

where the arbitrary constants C_1 and C_2 are determined from boundary conditions.

EXAMPLE 4–8 Consider a very long coaxial cable. The inner conductor has a radius a and is maintained at a potential V_0 . The outer conductor has an inner radius b and is grounded. Determine the potential distribution in the space between the conductors.

Solution Figure 4–18 shows a cross section of the coaxial cable. We assume no z -dependence and, by symmetry, also no ϕ -dependence ($k = 0$). Therefore, the electric potential is a function of r only and is given by Eq. (4–130).

The boundary conditions are

$$V(b) = 0, \quad (4-131a)$$

$$V(a) = V_0. \quad (4-131b)$$

Substitution of Eqs. (4–131a) and (4–131b) in Eq. (4–130) leads to two relations:

$$C_1 \ln b + C_2 = 0, \quad (4-132a)$$

$$C_1 \ln a + C_2 = V_0. \quad (4-132b)$$

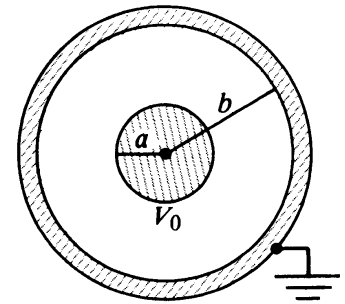
$$V(r) = C_1 \ln r + C_2, \quad (4-130)$$

From Eqs. (4–132a) and (4–132b), C_1 and C_2 are readily determined:

$$C_1 = -\frac{V_0}{\ln(b/a)}, \quad C_2 = \frac{V_0 \ln b}{\ln(b/a)}.$$

Therefore, the potential distribution in the space $a \leq r \leq b$ is

$$V(r) = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \ln\left(\frac{b}{r}\right). \quad (4-133)$$



Obviously, equipotential surfaces are coaxial cylindrical surfaces. ■

مثال: یک استوانه ی مدور بینهایت طویل به شعاع a به دو قسمت تقسیم شده است. نیمه ی بالایی در پتانسیل V_0 و نیمه ی پایینی در پتانسیل $-V_0$ قرار دارند. توزیع پتانسیل را در درون و بیرون استوانه تعیین نمایید.

چون طول استوانه بینهایت طویل است ، پتانسیل مستقل از z می باشد پس

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0. \quad (4-116) \quad \text{معادله ی لاپلاس می شود:}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$V(b, \phi) = \begin{cases} V_0 & \text{for } 0 < \phi < \pi, \\ -V_0 & \text{for } \pi < \phi < 2\pi. \end{cases} \quad (4-134)$$

(الف) در $r < b$ چون در این ناحیه $r=0$ است پس جمله ی r^{-n} نداریم.

$$V_n(r, \phi) = A_n r^n \sin n\phi. \quad (4-135)$$

چنین جمله ای بتنهایی نمی تواند شروط مرزی (۴-۱۳۴) را برآورده نماید.

پس سری زیر را بعنوان جواب می گیریم:

$$V(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin n\phi, \quad (4-136)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n b^n \sin n\varphi = \begin{cases} V_0 & 0 < \varphi < \pi \\ -V_0 & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases} \quad (4-137) \quad \text{می بایست شروط (۴-۱۳۴) در } b \text{ برقرار باشند.}$$

ضرایب A_n با شرط تعامد بدست می آیند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} A_n b^n \sin n\varphi \sin n'\varphi d\varphi = \begin{cases} \int_0^{\pi} V_0 \sin n'\varphi d\varphi & 0 < \varphi < \pi \\ -\int_{\pi}^{2\pi} V_0 \sin n'\varphi d\varphi & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n b^n \underbrace{\int_0^{\pi} \sin n\varphi \sin n'\varphi d\varphi}_{=\frac{\pi}{2}\delta_{nn'}} = \begin{cases} V_0 \begin{cases} \frac{2}{n'} & n' : \text{odd} \\ 0 & n' : \text{even} \end{cases} & 0 < \varphi < \pi \\ -V_0 \begin{cases} -\frac{2}{n'} & n' : \text{odd} \\ 0 & n' : \text{even} \end{cases} & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n b^n \frac{\pi}{2} \delta_{nn'} = \begin{cases} \frac{2V_0}{n'} & n' : \text{odd} \\ 0 & n' : \text{even} \end{cases} \Rightarrow A_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi b^n} & n : \text{odd} \\ 0 & n : \text{even} \end{cases} \quad (4-138)$$

توزیع پتانسیل در درون استوانه با جایگذاری (۴-۱۳۸) در (۴-۱۳۶) بدست می آید:

$$V(r, \phi) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{b}\right)^n \sin n\phi, \quad r < b. \quad (4-139)$$

(ب) در $r > b$ چون اگر r بسمت بینهایت میل نماید می بایست پتانسیل صفر گردد، جملات r^n نداریم پس جواب

بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} V(r, \phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} V_n(r, \phi) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B'_n r^{-n} \sin n\phi. \end{aligned} \quad (4-140)$$

At $r = b$,

$$\begin{aligned} V(b, \phi) &= \sum_{n=1}^{\infty} B'_n b^{-n} \sin n\phi \\ &= \begin{cases} V_0 & \text{for } 0 < \phi < \pi, \\ -V_0 & \text{for } \pi < \phi < 2\pi. \end{cases} \end{aligned} \quad (4-141)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} B_n b^{-n} \sin n\phi \sin n'\phi d\phi = \begin{cases} \int_0^{\pi} V_0 \sin n'\phi d\phi & 0 < \phi < \pi \\ -\int_{\pi}^{2\pi} V_0 \sin n'\phi d\phi & \pi < \phi < 2\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n b^{-n} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin n\phi \sin n'\phi d\phi}_{=\frac{\pi}{2}\delta_{nn'}} = \begin{cases} V_0 \begin{cases} \frac{2}{n'} & n' : \text{odd} \\ 0 & n' : \text{even} \end{cases} & 0 < \phi < \pi \\ -V_0 \begin{cases} -\frac{2}{n'} & n' : \text{odd} \\ 0 & n' : \text{even} \end{cases} & \pi < \phi < 2\pi \end{cases} \Rightarrow$$

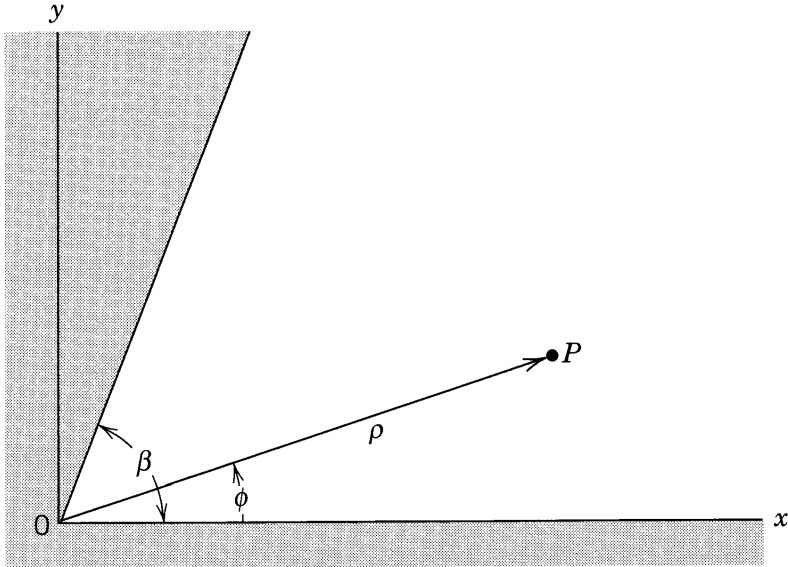
$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n b^{-n} \frac{\pi}{2} \delta_{nn'} = \begin{cases} \frac{2V_0}{n'} & n' : \text{odd} \\ 0 & n' : \text{even} \end{cases} \Rightarrow B_n = \begin{cases} \frac{4V_0 b^n}{n\pi} & n : \text{odd} \\ 0 & n : \text{even} \end{cases}$$

بنابر این توزیع پتانسیل در بیرون استوانه می شود:

$$V(r, \phi) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{b}{r}\right)^n \sin n\phi, \quad r > b. \quad (4-143)$$

میدانها و چگالی بار در دو بعد و گوشه ها:

در بسیاری از مسائل فصل مشترک دو سطح در نزدیکی محل تقاطع را می توان بصورت تقاطع دو صفحه در نظر گرفت. مطابق شکل دو صفحه ی رسانا با یک زاویه ی β و پتانسیل ثابت V را در نظر بگیرید.



می خواهیم پتانسیل الکتریکی را در P محاسبه نماییم.

می بایست معادله ی لاپلاس حل گردد.

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow V(\rho, \varphi) = R(\rho) \Phi(\varphi) \quad (*)$$

$$\nabla^2 V(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

با قرار دادن (*) در رابطه ی بالا و ضرب در $\frac{\rho^2}{R(\rho) \Phi(\varphi)}$

داریم:

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \underbrace{\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2}}_{=-v^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -v^2 \\ \underbrace{\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right)}_{=(I)} = v^2 \end{cases} \xrightarrow{v \neq 0}$$

$$\begin{cases} R(\rho) = a\rho^{\nu} + b\rho^{-\nu} \\ \Phi(\varphi) = A \cos(\nu\varphi) + B \sin(\nu\varphi) \end{cases} \xrightarrow[\text{from (I)}]{\text{if } \nu=0} \begin{cases} R(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho \\ \Phi(\varphi) = A_0 + B_0 \varphi \end{cases}$$

اگر در یک مساله $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ باشد (مثلاً بین دو استوانه ی هم محور) چون جواب در $\varphi = 0$ و $\varphi = 2\pi$ یکسان

است، اصطلاحاً جواب تک مقدار باید باشد پس: $V(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi + 2\pi) \Rightarrow B_0 = 0$

حال داریم: $V(\rho, 0) = V$ and $V(\rho, \beta) = V$ پس می توان نوشت:

$$V(\rho, \varphi) = \sum_{\nu} \left(\begin{matrix} a_{\nu} \rho^{\nu} + b_{\nu} \rho^{-\nu} \\ (1) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} A_{\nu} \cos(\nu\varphi) + B_{\nu} \sin(\nu\varphi) \\ (2) \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} a_0 + b_0 \ln \rho \\ (3) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} A_0 + B_0 \varphi \\ (4) \end{matrix} \right)$$

جمله ی (۱) صفر است چون مبداء در نظر گرفته شده. جمله ی (۲) صفر است چون پتانسیل در $\varphi = 0$ نباید تابع ρ

باشد. جمله ی (۳) صفر است چون مبداء در نظر گرفته شده. جمله ی (۴) صفر است چون پتانسیل تک

$$V(\rho, \varphi) = V + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \rho^{\nu} \sin(\nu\varphi) \quad \text{مقداری است. بنابر این جواب می شود:}$$

روی محور z ها $V(\rho, \beta) = V$ پس: $m = 0, 1, 2, \dots$; $\sin(\beta\nu) = 0 \Rightarrow \sin(\beta\nu) = \sin(m\pi) \Rightarrow \nu = \frac{m\pi}{\beta}$

در نتیجه جواب کلی می شود:

$$V(\rho, \varphi) = V + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{\frac{m\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{m\pi}{\beta} \varphi\right)$$

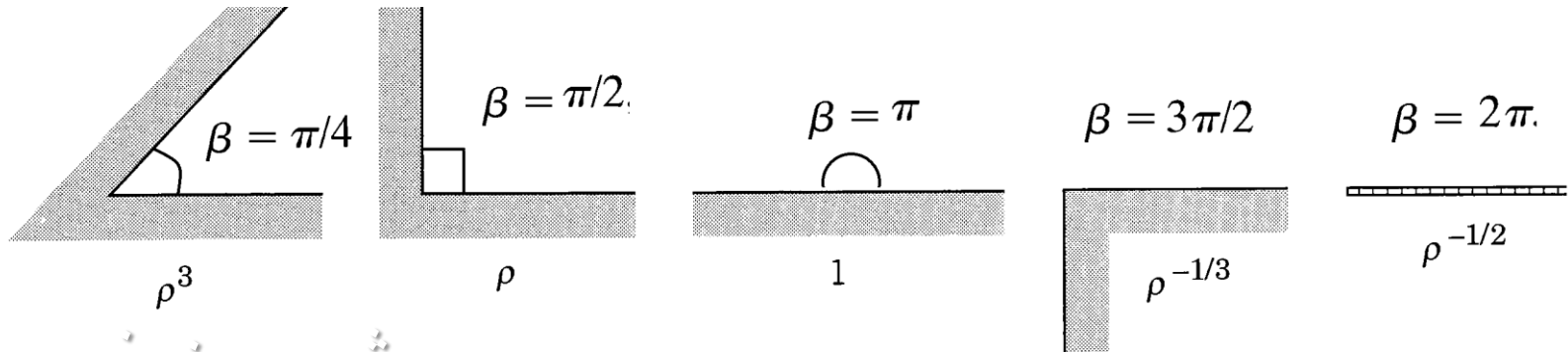
چون شرط مرزی دیگری نداریم نمی توان a_m را بدست آورد. حال اگر:

$$\text{if : } \rho \ll 1 \xrightarrow{\text{just first sentence}} V(\rho, \varphi) \cong V + a_1 \rho^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{\pi}{\beta} \varphi\right) \Rightarrow$$

$$E = -\nabla V \rightarrow \begin{cases} E_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \sin\left(\frac{\pi}{\beta} \varphi\right) \\ E_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \cos\left(\frac{\pi}{\beta} \varphi\right) \end{cases}$$

چگالی بار می شود:

$$\sigma(\rho) = \frac{E_\varphi(\rho, \beta)}{4\pi} = -\frac{a_1}{4\beta} \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1} \cos\left(\frac{\pi}{\beta} \varphi\right) \Rightarrow \sigma(\rho) \propto \rho^{\frac{\pi}{\beta}-1}$$



حل معادلات لاپلاس در مختصات کروی:

برای حل مسائل با مرزهای کروی معادله ی لاپلاس را در دستگاه کروی می نویسیم. چون محاسبات پیچیده می شوند، بحث خود را در حالت هایی انجام می دهیم که پتانسیل الکتریکی مستقل از زاویه ی سمتی ϕ باشد. فلذا:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \Rightarrow \quad (4-144)$$

روش جداسازی متغیرها را با در نظر گرفتن حاصلضرب زیر انجام می دهیم: $V(R, \theta) = \Gamma(R) \Theta(\theta)$; (4-145)

با جایگذاری (4-145) در (4-144) و تقسیم بر $V(R, \theta) = \Gamma(R) \Theta(\theta)$ داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \Gamma(R) \Theta(\theta)}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Gamma(R) \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) = 0 \Rightarrow \\ & \frac{\Theta(\theta)}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \Gamma(R)}{\partial R} \right) + \frac{\Gamma(R)}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) = 0 \xrightarrow{\div \frac{1}{\Gamma(R)\Theta(\theta)}} \\ & \frac{1}{R^2 \Gamma(R)} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\Gamma(R)}{dR} \right) + \frac{1}{R^2 \Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = 0 \Rightarrow \\ & \underbrace{\frac{1}{R^2} \frac{1}{\Gamma(R)} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\Gamma(R)}{dR} \right)}_{=k^2} + \underbrace{\frac{1}{R^2} \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right)}_{=-k^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{\Gamma(R)} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\Gamma(R)}{dR} \right) = k^2 \right. \quad (4-147)$$

$$\left. \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = -k^2 \right. \quad (4-148)$$

می بایست این دو معادله دیفرانسیل حل گردند. معادله ی (۴-۱۴۷) را بصورت زیر می نویسیم:

$$R^2 \frac{d^2\Gamma(R)}{dR^2} + 2R \frac{d\Gamma(R)}{dR} - k^2\Gamma(R) = 0, \quad (4-149)$$

این معادله دارای جوابی بصورت زیر است: $\Gamma_n(R) = A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}$. $(4-150)$

که در این رابطه A_n و B_n اعدادی ثابتند و نیز: $n(n+1)=k^2$ $(4-151)$

در حالی که k از رابطه ی (۴-۱۵۱) داده شده است، از معادله ی (۴-۱۴۸) داریم:

$$\frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right] + n(n+1)\Theta(\theta) \sin \theta = 0, \quad (4-152)$$

که شکلی از معادله ی لژاندر است. جوابهای معادله ی لژاندر را با $P_n(\cos \theta)$ نمایش می دهند که به آنها چند

جمله ای های لژاندر نیز می گویند.

معادلات دیفرانسیلی بشکل زیر را معادلات لژاندر می گویند: $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n-1)y = 0$

که جوابهای آن بصورت زیر می باشد: $y = C_n P_n(x)$; $x = \cos \theta$

چند جمله ای های لژاندر توسط فرمول رودریگز بیان می شوند:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \xrightarrow{x = \cos \theta}$$

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \theta)^n} (\cos^2 \theta - 1)^n$$

n	$P_n(\cos \theta)$
0	1
1	$\cos \theta$
2	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$

بنابر این جواب معادله ی (۴-۱۵۲) می شود: $\Theta_n(\theta) = C_n P_n(\cos \theta)$; (4-153)

با قرار دادن (۴-۱۵۳) و (۴-۱۵۰) در (۴-۱۴۵) در مورد مسائل مقدار مرزی بدون تغییرات زاویه ی سمتی خواهیم داشت: $(V(R, \theta) = \Gamma(R)\Theta(\theta))$; (4-145)

$$V_n(R, \theta) = \left[A_n R^n + B_n R^{-(n+1)} \right] P_n(\cos \theta) ; (4-154)$$

توضیح اضافی: جواب معادله ی لاپلاس کلی در مختصات کروی و با روش جداسازی متغیر ها بصورت زیر می شود:

$$\nabla^2 V(R, \theta, \varphi) = 0 \Rightarrow \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

با روش جداسازی متغیر ها با اخذ $V(R, \theta) = \Gamma(R) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$ ، جواب معادله ی لاپلاس می شود:

$$V(R, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(A_{nm} R^n + B_{nm} R^{-(n+1)} \right) Y_{nm}(\theta, \varphi)$$

که به $Y_{nm}(\theta, \varphi)$ هارمونیک های کروی می گوئیم. و حال برای جواب کلی داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{nm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \\ P_n^m(\cos \theta) = (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_n(\cos \theta) \Rightarrow \\ P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \theta)^n} (\cos^2 \theta - 1)^n \end{array} \right.$$

$$V(R, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(A_{nm} R^n + B_{nm} R^{-(n+1)} \right) \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

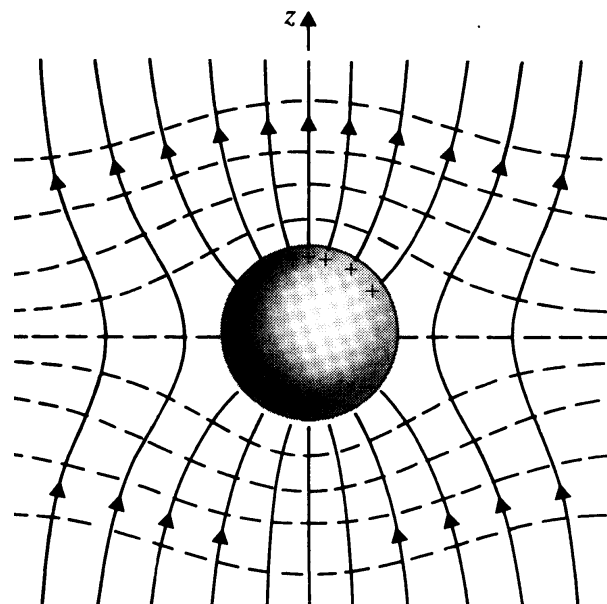
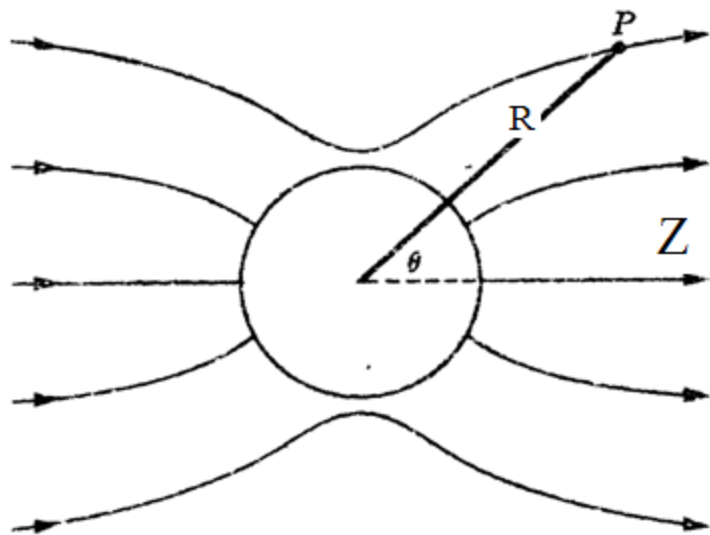
مثال: یک کره ی هادی بدون بار به شعاع b در میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}_0 = a_z E_0$ قرار دارد. مطلوبست محاسبه ی

(الف) توزیع پتانسیل $V(R, \theta)$ و (ب) شدت میدان الکتریکی $\mathbf{E}(R, \theta)$ را پس از قرار دادن کره در میدان.

پس از قرار گیری کره در میدان خارجی توزیع بار ها بگونه ای صورت می پذیرد که سطح کره هم پتانسیل بماند.

شدت میدان الکتریکی در داخل کره صفر است. در بیرون کره خطوط میدان بصورت عمود سطح را قطع می

نمایند و در نقاط دور از کره میدان تاثیر چندانی نخواهد پذیرفت.



(الف) برای تعیین توزیع پتانسیل $V(R, \theta)$ در ناحیه $R \geq b$ شرایط مرزی زیر را داریم:

$$V(b, \theta) = 0^+ \quad (4-155a)$$

$$V(R, \theta) = -E_0 z = -E_0 R \cos \theta, \quad \text{for } R \gg b. \quad (4-155b)$$

معادله $(4-155b)$ بدین مفهوم است که E_0 اولیه در نقاط دور از کره تحت تاثیر قرار نمی گیرد. جواب کلی معادله $(4-155b)$ با در نظر گرفتن عدم وابستگی به زاویه θ سمتی عبارت است از:

$$V(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta); \quad R \geq b \quad (4-156)$$

با توجه به شرط $(4-155b)$ می بایست تمام A_n ها بجز A_1 صفر باشند و $A_1 = E_0$ است.

$$\begin{aligned} V(R, \theta) &= -E_0 R P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \\ &= B_0 R^{-1} + (B_1 R^{-2} - E_0 R) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos \theta), \quad R \geq b. \end{aligned} \quad (4-157)$$

جمله $(4-157)$ اول به یک کره $R=b$ مربوط است و چون کره بدون بار است پس $B_0=0$ است و معادله می شود:

$$V(R, \theta) = \left(\frac{B_1}{R^2} - E_0 R \right) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos \theta), \quad R \geq b. \quad (4-158)$$

اکنون شرط مرزی (4-155a) را در $R=b$ اعمال می کنیم:

$$0 = \left(\frac{B_1}{b^2} - E_0 b \right) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n b^{-(n+1)} P_n(\cos \theta),$$

from which we obtain

$$B_1 = E_0 b^3$$

and

$$B_n = 0, \quad n \geq 2.$$

We have, finally, from Eq. (4-158),

$$V(R, \theta) = -E_0 \left[1 - \left(\frac{b}{R} \right)^3 \right] R \cos \theta, \quad R \geq b. \quad (4-159)$$

b) The electric field intensity $\mathbf{E}(R, \theta)$ for $R \geq b$ can be easily determined from $-\nabla V(R, \theta)$:

$$\mathbf{E}(R, \theta) = \mathbf{a}_R E_R + \mathbf{a}_\theta E_\theta, \quad (4-160)$$

where

$$E_R = -\frac{\partial V}{\partial R} = E_0 \left[1 + 2 \left(\frac{b}{R} \right)^3 \right] \cos \theta, \quad R \geq b \quad (4-160a)$$

and

$$E_\theta = -\frac{\partial V}{R \partial \theta} = -E_0 \left[1 - \left(\frac{b}{R} \right)^3 \right] \sin \theta, \quad R \geq b. \quad (4-160b)$$

The surface charge density on the sphere can be found by noting that

$$\rho_s(\theta) = \epsilon_0 E_R \Big|_{R=b} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta, \quad (4-161)$$

which is proportional to $\cos \theta$, being zero at $\theta = \pi/2$.

مثال: فرض کنید پتانسیل روی سطح کره ای به شعاع a ، $V(\theta)$ باشد. مطلوبست محاسبه ی پتانسیل داخل کره. بخاطر تقارن سمتی جمله ی وابسته به ϕ در جوابهای معادله ی لاپلاس نداریم. یعنی می بایست معادله لاپلاس زیر

$$\nabla^2 V(R, \theta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

حل شود:

با در نظر گرفتن $V(R, \theta) = \Gamma(R)\Theta(\theta)$ و استفاده از جداسازی متغیرها، جواب بصورت زیر است:

$$V(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta)$$

چون در مرکز کره بار نداریم بنابراین پتانسیل محدود است پس B_n ها صفرند. لذا جواب بصورت زیر است:

$$V(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \theta)$$

در $R=a$ داریم:

$$V(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \theta)$$

حال با بکار بردن شرط تعامد داریم:

$$V(\theta) \times \sin \theta P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \theta) \times \sin \theta P_n(\cos \theta) \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi} V(\theta) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta = \int_0^{\pi} A_n a^n P_n(\cos \theta) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta$$

$$\int_0^{\pi} V(\theta) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta = A_n a^n \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta) d(\cos \theta)$$

$$\frac{\int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta) d(\cos \theta) = \frac{2}{2n+1}}{\longrightarrow}$$

$$\int_0^{\pi} V(\theta) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta = A_n a^n \left(\frac{2}{2n+1} \right) \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \int_0^{\pi} V(\theta) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta$$

مثال: فرض کنید پتانسیل روی سطح کره ای به شعاع a ، به دو بخش زیر تقسیم شده باشد. مطلوبست محاسبه ی

$$V(\theta) = \begin{cases} V & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -V & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \text{پتانسیل داخل کره.}$$

بنخاطر تقارن سمتی جمله ی وابسته به ϕ در جوابهای معادله ی لاپلاس نداریم. یعنی می بایست معادله لاپلاس زیر

حل شود:

$$\nabla^2 V(R, \theta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

با در نظر گرفتن $V(R, \theta) = \Gamma(R)\Theta(\theta)$ و استفاده از جداسازی متغیرها، جواب بصورت زیر است:

$$V(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n R^n + B_n R^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta)$$

چون در مرکز کره بار نداریم بنابراین پتانسیل محدود است پس B_n ها صفرند. لذا جواب بصورت زیر است:

$$V(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \theta)$$

$$V(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \theta) \quad \text{در } R=a \text{ داریم:}$$

حال بدلیل وجود دو پتانسیل برای بکار بردن شرط تعامد داریم:

$$V(\theta) \times \sin \theta P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \theta) \times \sin \theta P_n(\cos \theta) \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (V) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-V) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta = \int_0^{\pi} A_n a^n P_n(\cos \theta) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (V) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-V) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta = A_n a^n \int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta) d(\cos \theta)$$

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta) d(\cos \theta) = \frac{2}{2n+1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (V) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-V) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta = A_n a^n \left(\frac{2}{2n+1} \right) \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (V) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-V) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta \right]$$

حال $\cos \theta = x$ می گیریم و داریم:

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (V) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-V) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta \right]$$

$$\frac{x = \cos \theta}{dx = -\sin \theta d\theta} \rightarrow A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \left[\int_1^0 V P_n(x) dx + \int_0^{-1} (-V) P_n(x) dx \right]$$

$$\xrightarrow{P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)}$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} (-V) \left[\int_0^1 P_n(x) dx + (-1)^n \int_0^1 P_n(x) dx \right] \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} (V) \left[(-1)^n - 1 \right] \int_0^1 P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & n : \text{even} \\ \frac{2n+1}{2a^n} (V) \int_0^1 P_n(x) dx & n : \text{odd} \end{cases}$$

فصل پنجم: جریان های الکتریکی دائم

طبق تعریف داریم:

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

چگالی ← چگالی جریان سرعت

اگر این \vec{J} از سطح مقطع جسم dS بگذرد، شار در سطح ایجاد مینماید که طبق تعریف شار داریم:

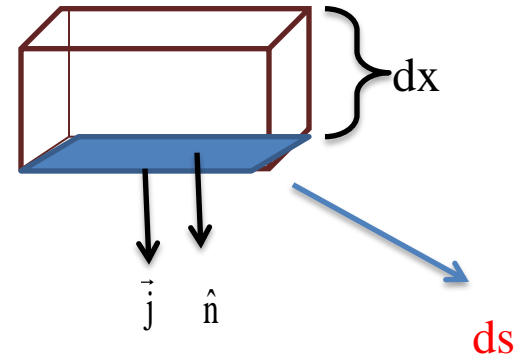
$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

$$d\Phi = \vec{J} \cdot d\vec{s} = \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{\rho dx}{dt} \cdot d\vec{s} \Rightarrow$$

$$d\Phi = \frac{\rho(dx \cdot d\vec{s})}{dt} = \frac{\rho(dV)}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

$$\Phi = \oint_S d\Phi = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \oint_S \frac{dQ}{dt} = \mathbf{I} \Rightarrow$$

$$\boxed{I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} = \frac{dQ}{dt}}$$



شهر روز نصیریان

بنابراین اصل بقای بار ایجاب می نماید که در داخل المان حجم dV با/ بدون وجود جریان مقدار کل بار ثابت بماند.
 پس در حجم V با سطح S که جریان از آن می گذرد داریم:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{dQ}{dt} \quad (Q: \text{electron}) \Rightarrow \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

با استفاده از قضیه ی دیورژانس انتگرال سطحی را به حجمی تبدیل می نماییم و داریم:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \Rightarrow \int_V (\nabla \cdot \vec{J}) dV = -\int_V \frac{d\rho}{dt} dV$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

چون معادله ی فوق می بایست مستقل از V باشد داریم:

این رابطه که از اصل بقای بار بدست آمده را معادله ی پیوستگی می گویند.

در جریان های دائم چگالی بار با زمان تغییر نمی کند یعنی مشتق زمانی اش صفر است پس رابطه می شود: $\boxed{\nabla \cdot \vec{J} = 0}$

از این روی جریانهای الکتریکی دائم، بدون دیورژانس یا سلونوئیدی هستند.

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n I_j = 0 \quad \text{حال داریم:}$$

عبارتی برای قانون کیرشهف است که بیان می دارد جمع جبری جریانهایی که از یک گره در مدار الکتریکی خارج می

شوند، صفر است.

مثال: فرض کنید به دو سر رسانایی، پتانسیل الکتریکی v اعمال شود و این پتانسیل، میدان الکتریکی E را در رسانا تولید میکند که موجب حرکت حامل های بار (الکترون ها) می شود. مقدار نیروی وارد بر الکترون eE است. از طرفی نیروی باز دارنده ای به الکترون وارد می شود که ناشی از برخورد آن ها با الکترون های دیگر و یون های شبکه است. این نیروی بازدارنده تعریف میشود:

$$\vec{f} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{m\vec{v}}{\tau}$$

پس قانون دوم نیوتن برای الکترون ها در هادی می شود:

$$\vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow eE - \frac{mv}{\tau} = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow -\frac{m}{\tau} \left[v - \frac{e\tau E}{m} \right] = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$v - \frac{e\tau E}{m} = -\frac{\tau dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{v - \frac{e\tau E}{m}} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v - \frac{e\tau E}{m}} = \int_{t_0}^t -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow$$

$$\text{Ln}\left(v - \frac{e\tau E}{m}\right) = -\frac{t}{\tau} + k_0 \quad (1)$$

حال برای محاسبه k_0 داریم: در $t=0$ ، $v=0$ است.

$$\text{Ln}\left(0 - \frac{e\tau E}{m}\right) = +k_0$$

$$\text{Ln}\left(v - \frac{e\tau E}{m}\right) = -\frac{t}{\tau} + \text{Ln}\left(-\frac{e\tau E}{m}\right) \Rightarrow \text{Ln}\left(v - \frac{e\tau E}{m}\right) - \text{Ln}\left(-\frac{e\tau E}{m}\right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow$$

$$\text{Ln}\left(\frac{v - \frac{e\tau E}{m}}{-\frac{e\tau E}{m}}\right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \text{Ln}\left(\frac{v}{\left(\frac{-e\tau E}{m}\right)} + 1\right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \frac{v}{\left(\frac{-e\tau E}{m}\right)} + 1 = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow$$

$$\boxed{v = \frac{e\tau E}{m} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

اما در فلزات عموماً از مرتبه $\tau = 10^{-14}$ sec است و $t = 100\tau$ است. پس داریم:

$$v = \frac{e\tau E}{m}$$

حال:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = ne\vec{v} \xrightarrow{\vec{v} = \left(\frac{e\tau E}{m}\right)} \vec{j} = ne\left(\frac{e\tau E}{m}\right) \Rightarrow \vec{j} = \underbrace{\left(\frac{ne^2\tau}{m}\right)}_{=\sigma_E} E \Rightarrow \begin{cases} \vec{j} = \sigma_E E \\ \sigma_E = \frac{ne^2\tau}{m} \end{cases}$$

از طرفی داشتیم: $J = \sigma E$

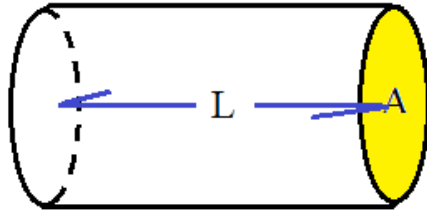
پس داریم:

شکل دیفرانسیل:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{Ed}{JA} = \frac{Ed}{\sigma_E EA} = \frac{d}{\sigma_E A} \xrightarrow{\frac{1}{\sigma_E} = \rho} R = \rho \frac{d}{A}$$

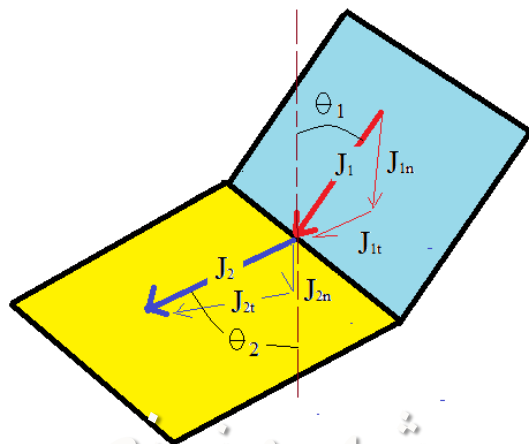
$$dR = \rho \frac{dl}{A}$$

رسانایی که عکس مقاومت است می شود:

$$G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{A}{\ell}$$


شرایط مرزی چگالی جریان:

هنگامی که جریان بطور مایل از فصل مشترک بین دو محیط با رسانندگی های متفاوت می گذرد بردار چگالی جریان در اندازه و جهت تغییر می کند. معادلات حاکم بر چگالی جریان دائم J در غیاب منبع انرژی عبارتند از:



Governing Equations for Steady Current Density

Differential Form

Integral Form

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (5-56)$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} \right) = 0$$

$$\oint_C \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0 \quad (5-57)$$

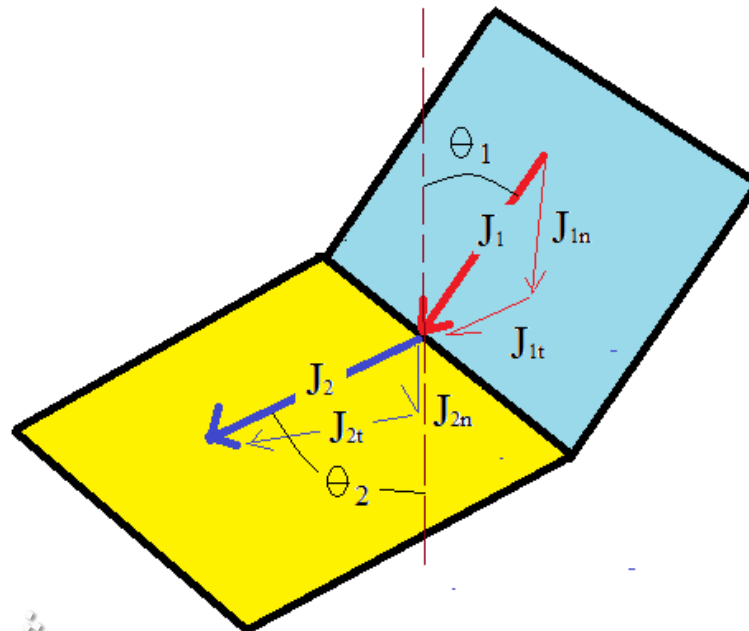
میدانیم که مولفه ی عمودی یک میدان برداری بدون دیورژانس پیوسته است. پس با توجه به $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ داریم:

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow J_{1n} = J_{2n} \left(\frac{A}{m^2} \right) \quad (5-58)$$

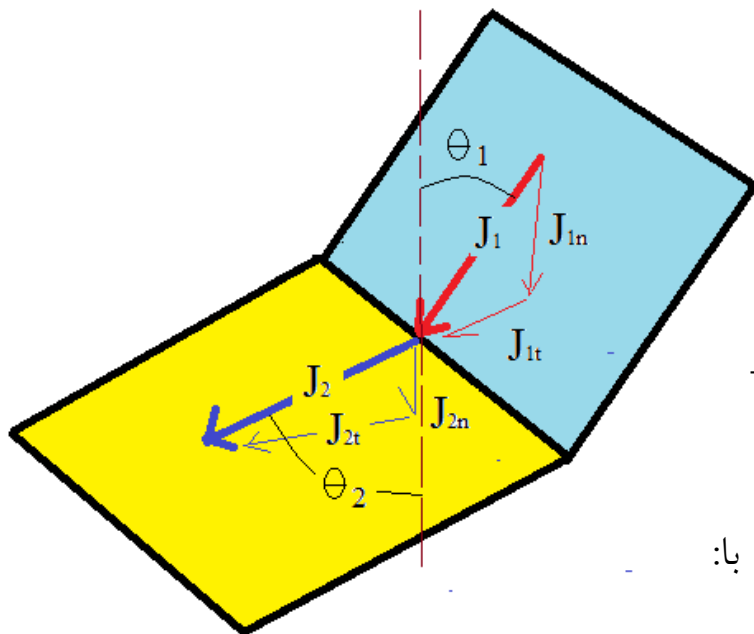
به همین ترتیب، مولفه مماسی یک میدان برداری بدون کرل روی فصل مشترک پیوسته است. از $\nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} \right) = 0$

$$\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (5-59) \quad \text{نتیجه می شود که:}$$

معادله ی (5-59) بیان می کند که نسبت مولفه های مماسی \mathbf{J} در دو طرف فصل مشترک برابر نسبت رسانندگی ها است.



مثال : دو محیط رسانا با رسانندگی های σ_1 و σ_2 توسط فصل مشترکی جدا می شوند. بردار چگالی جریان در محیط اول اندازه ای برابر با J_1 دارد و با محور عمودب زاویه ی θ_1 میسازد. اندازه و جهت چگالی جریان را در محیط ۲ بدست آورید.



$$J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow J_1 \cos \theta_1 = J_2 \cos \theta_2$$

$$\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \Rightarrow \sigma_2 J_{1t} = \sigma_1 J_{2t} \Rightarrow \sigma_2 J_1 \sin \theta_1 = \sigma_1 J_2 \sin \theta_2$$

با تقسیم دو رابطه داریم:

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

اندازه ی J_2 برابر است با:

$$J_2 = \sqrt{J_{2t}^2 + J_{2n}^2} = \sqrt{(J_2 \sin \theta_2)^2 + (J_2 \cos \theta_2)^2} \xrightarrow{\frac{J_1 \cos \theta_1 = J_2 \cos \theta_2}{\sigma_2 J_1 \sin \theta_1 = \sigma_1 J_2 \sin \theta_2}}$$

$$\left[\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} J_1 \sin \theta_1 \right)^2 + (J_1 \cos \theta_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow J_2 = J_1 \left[\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \sin \theta_1 \right)^2 + (\cos^2 \theta_1) \right]^{\frac{1}{2}}$$

میدان های مغناطیسی ساکن

تا کنون با دو میدان برداری بنام های ثقل و الکتریکی آشنا شده ایم. نوع دیگری از میدان برداری نیز وجود دارد که به آن میدان برداری مغناطیسی یا میدان برداری چگالی شار مغناطیسی (\mathbf{B}) گوییم و عامل ایجاد آن یک آهنربای دائمی و یا سیم حامل جریان می باشد. به تجربه ثابت شده است اگر یک بار متحرک در یک میدان مغناطیسی قرار گیرد، نیرویی از طرف میدان به بار وارد می شود که این نیرو حالات زیر را ایجاد می کند :

جهت نیرو بر میدان مغناطیسی و همچنین بردار سرعت ذره عمود است.

مقدار نیرو با حاصلضرب بار ذره، سرعت ذره و میدان مغناطیسی متناسب است.

بیشترین نیرو وقتی ایجاد می شود، که ذره بر میدان مغناطیسی عمود باشد.

جمع بندی این حالات به شکل فرمول زیر است :

$$\vec{F}_B = q(\vec{V} \times \vec{B})$$

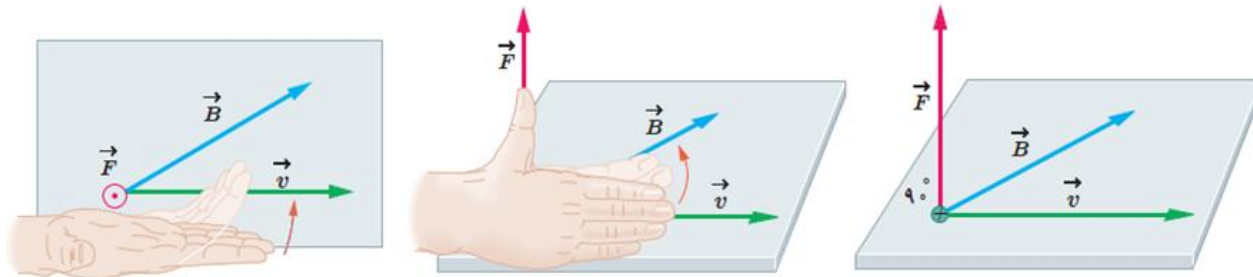
میدان مغناطیسی موجب تغییر سرعت و انرژی جنبشی ذره نخواهد شد و تنها اثر آن جابجایی ذره در جهت «F»

می باشد. پس میدان مغناطیسی تنها بر بارهای متحرک اثر می گذارد و اثری بر بارهای جایگزیده ندارد.

چنانچه بار متحرک تحت تأثیر دو میدان برداری \mathbf{B} (مغناطیسی) و \mathbf{E} قرار گیرد، نیروی وارد بر ذره که به آن نیروی

$$\vec{F}_L = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E} + q(\vec{V} \times \vec{B}) = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$$

لورنس گویند برابر است با :



(*) اصول موضوعی مغناطیس ساکن:

دو اصل موضوعی مغناطیس ساکن که دیورژانس و کرل \mathbf{B} را در فضای آزاد مشخص می کنند وجود دارد که

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6-6)$$

عبارتند از:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (6-7)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left(\frac{\text{H}}{\text{m}} \right)$$

که در آن نفوذ پذیری فضای آزاد عبارت است از:

و \mathbf{J} نیز چگالی جریان است.

واحد \mathbf{B} وبر بر متر مربع یا تسلا است.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{با (6-6)}$$

به این نتیجه می رسیم که برای چگالی بار الکتریکی ρ ، هیچ مشابه

مغناطیسی موجود نیست.

با اخذ انتگرال حجمی از (۶-۶) و استفاده از قضیه ی دیورژانس حاصل می شود:

$$\frac{\int_V \nabla \cdot \vec{A} dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}}{(6-6)} \rightarrow \int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (6-9)$$

که در آن انتگرال سطحی روی سطح مرزی یک حجم دلخواه V انجام می شود.

این رابطه که قانون بقای شار مغناطیسی می باشد بیان می دارد که بارهای مغناطیسی مجزا وجود ندارند ، هیچ منبع

شار مغناطیسی موجود نیست و خطوط شار مغناطیسی همیشه در خود بسته می شوند.

با انتگرال گیری روی یک سطح باز از رابطه ی (۶-۷) و اعمال قضیه ی استوکس داریم:

$$\frac{\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}}{(6-7)} \rightarrow \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad (6-10)$$

Postulates of Magnetostatics in Free Space	
Differential Form	Integral Form
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\ell} = \mu_0 I$

این رابطه شکلی از قانون آمپر است که بیان می دارد

گردش چگالی شار مغناطیسی در فضای آزاد، بدور

هر مسیر بسته، برابر با حاصلضرب μ_0 در کل جریان

گذرنده از سطح محصور شده توسط این مسیر است.

پتانسیل مغناطیسی برداری:

چون دیورژانس \mathbf{B} صفر است ، پس سلونوئیدی است. بنابراین می توان \mathbf{B} را بصورت کرل میدان برداری جدیدی

$$\xrightarrow{\nabla \cdot \vec{B}=0} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{مانند } \mathbf{A} \text{ بیان نمود، پس داریم:}$$

که \mathbf{A} را پتانسیل مغناطیسی برداری نامیم. رابطه ی اخیر برای معرفی \mathbf{A} کافی نیست و می بایست دیورژانس آن

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \xrightarrow[\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}]{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \text{ or}} \text{تعریف شود. داریم:}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

می خواهیم این رابطه را حتی الامکان ساده نماییم پس شرط کولن ($\nabla \cdot \mathbf{A}=0$) را لحاظ می نماییم و داریم:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

که معادله ی برداری پواسون است.

این معادله جوابی مانند زیر دارد:

که در آن R شعاع

کره ی حجمی است.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}}{R} dV' \quad \left(\mathbf{A} \rightarrow \begin{cases} A_x \\ A_y \\ A_z \end{cases} \text{ and } \mathbf{J} \rightarrow \begin{cases} J_x \\ J_y \\ J_z \end{cases} \right)$$

(*)

نیروی وارد بر سیم حامل جریان از طرف میدان مغناطیسی

$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B} = Nq\vec{v} \times \vec{B}$$

که در آن N تعداد حامل بار در طول dL و v سرعت حرکت حامل ها است. می توان نوشت:

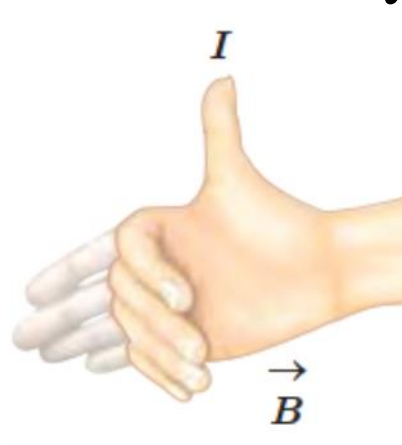
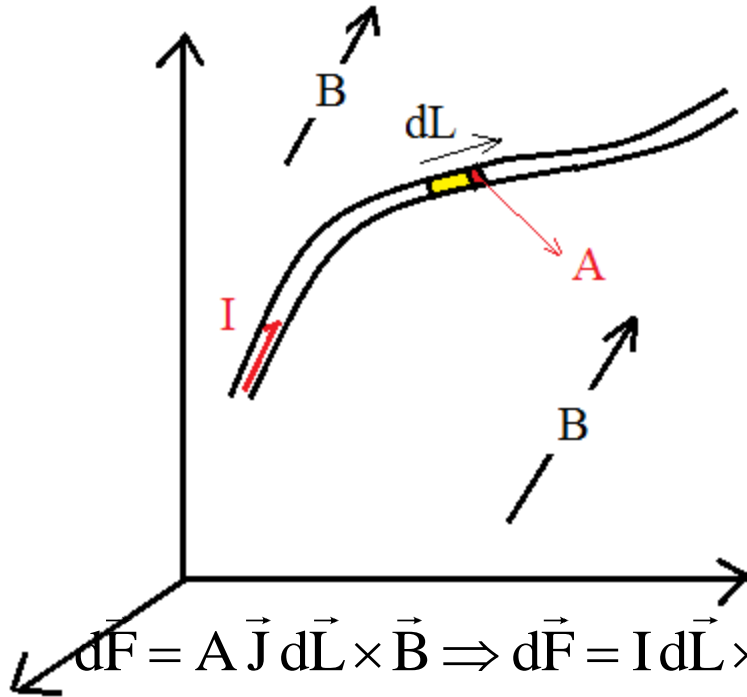
$$d\vec{F} = n A dL q \vec{v} \times \vec{B}$$

n تعداد بار در واحد حجم و A سطح مقطع سیم می باشد.

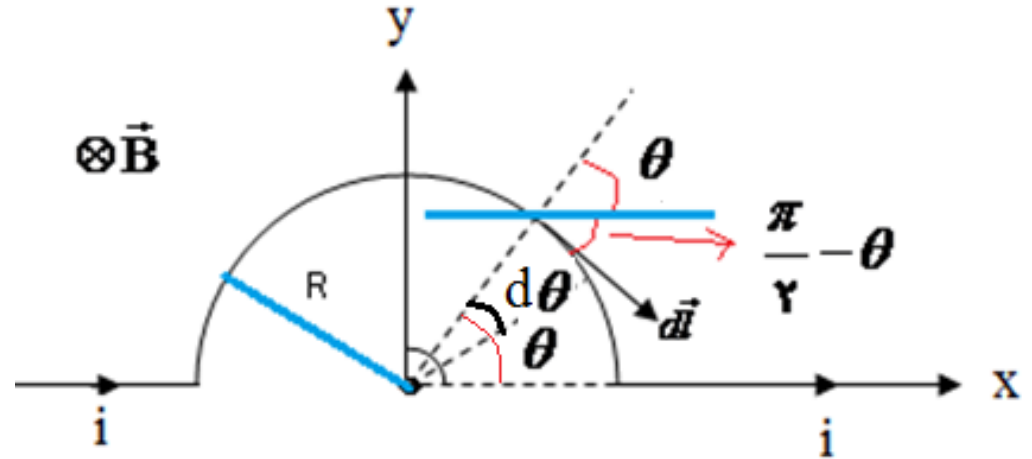
از طرفی داریم: $\vec{J} = \rho \vec{v} = nq\vec{v}$ پس می توان نوشت:

$$d\vec{F} = A \vec{J} dL \times \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = I d\vec{L} \times \vec{B} \Rightarrow \oint d\vec{F} = I \oint_C d\vec{L} \times \vec{B} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = I \oint_C d\vec{L} \times \vec{B}}$$

در سیم مستقیم داریم: $\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$



مثال: مطلوب است محاسبه نیروی وارد بر سیم نیم‌دایره‌ای که در میدان مغناطیسی ثابت در شکل زیر قرار دارد:



$$\vec{F} = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad ; \quad \vec{B} = B(-\hat{k})$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ d\vec{\ell} = |d\vec{\ell}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \hat{i} - |d\vec{\ell}| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \hat{j} \right\} \Rightarrow \\ |d\vec{\ell}| = R d\theta \\ \Rightarrow d\vec{\ell} = R d\theta [\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}] \end{array} \right]$$

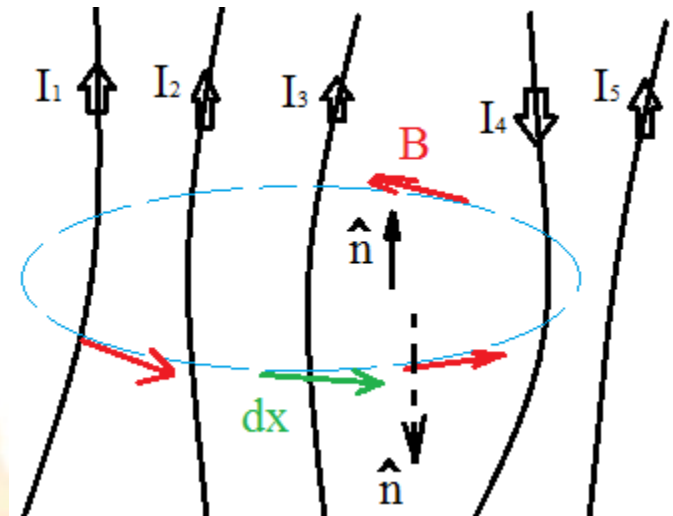
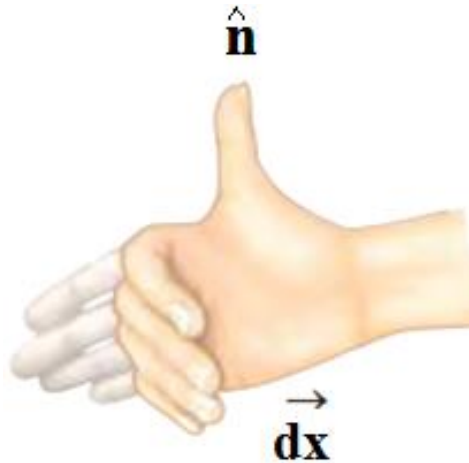
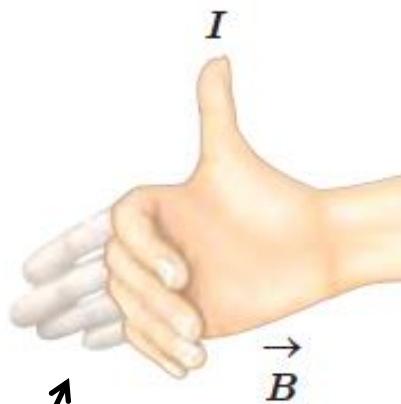
$$\vec{F} = IR \int d\theta [\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}] \times (-B\hat{k}) \Rightarrow \vec{F} = IRB \int_{\pi}^0 [\sin \theta (\hat{j}) + \cos \theta \hat{i}] d\theta \Rightarrow$$

$$\vec{F} = IRB \left[\underbrace{-\cos \theta (\hat{j}) \Big|_{\pi}^0 + \sin \theta (\hat{i}) \Big|_{\pi}^0}_{= 2\hat{j}} \right] \Rightarrow \vec{F} = 2IRB(-\hat{j})$$

قانون آمپر: گفتیم در اطراف سیم حامل جریان میدان مغناطیسی درست می‌شود. قانون آمپر بیان می‌داد و چنانچه در فضا چند سیم حامل جریان داشته باشیم و حلقه‌ای بسته (حلقه آمپری) بدور آن جریان‌ها انتخاب کنیم، بردار \mathbf{B} کل یا چرخش حول این حلقه بسته مقداری می‌یابد که برابر با جمع جبری جریانهای داخل حلقه می‌باشد.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{x} = \mu_0 \sum_{j=1}^N i_j$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{x} = \mu_0 (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)$$

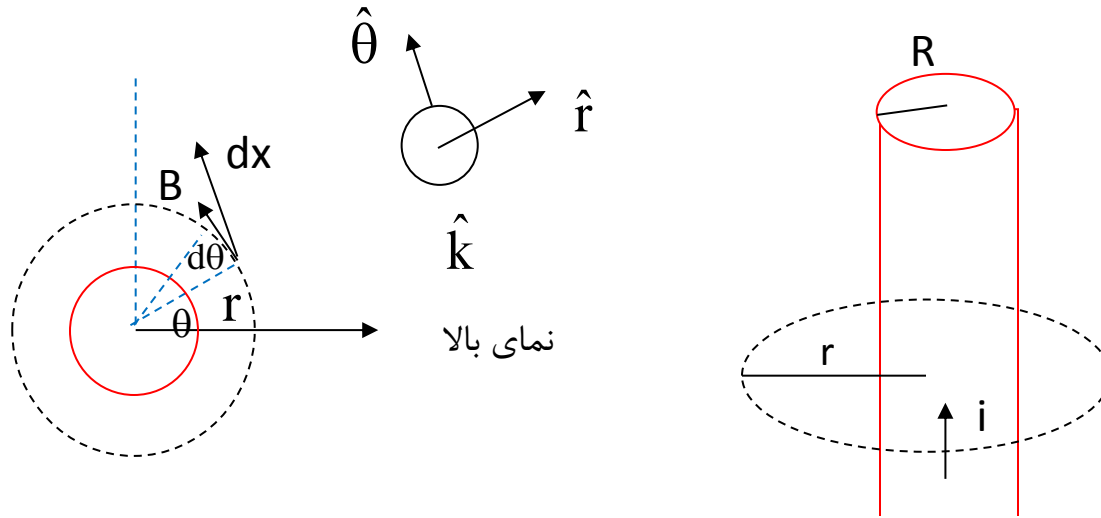


۱- انتخاب جهت dx : چنانچه شست دست راست را در جهت بردار نرمال سطح حلقه بسته بگیریم، انگشت جهت dx را نمایش می‌دهد.

۲- جهت B : شست دست راست در جهت جریان در سیم قرار دهیم، جهت بسته شدن انگشت جهت میدان

B را می‌دهد.

مثال: سیمی استوانه‌ای به شعاع R حامل جریان I است، مطلوبست محاسبه میدان مغناطیسی در داخل و خارج سیم.

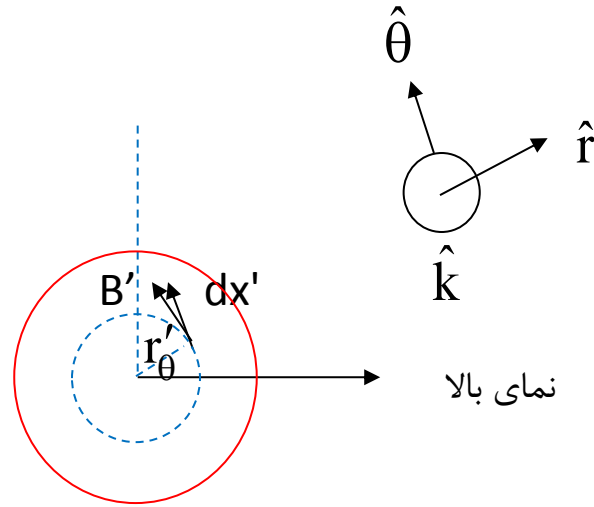


نقاط خارج سیم:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{x} = \mu_0 I \Rightarrow \oint (B \hat{\theta}) \cdot (dx \hat{\theta}) = \mu_0 I \Rightarrow \oint B dx = \mu_0 I \xrightarrow{dx=r d\theta}$$

$$\int_0^{2\pi} Br d\theta = \mu_0 I \Rightarrow Br(2\pi) = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \quad ; \quad r > R$$

شهر روز نصیریان



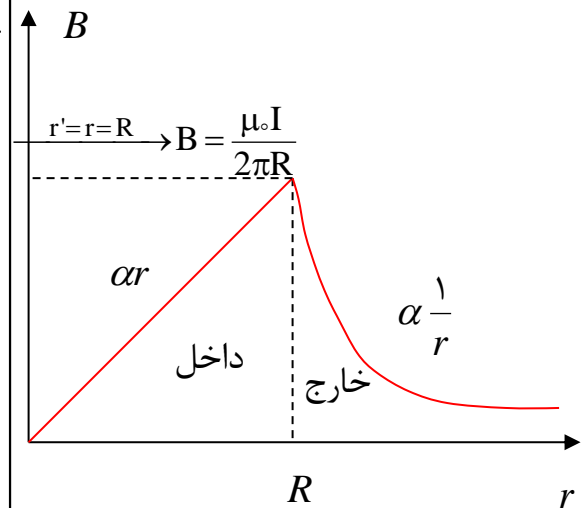
نقاط داخل سیم:

$$\oint \vec{B}' \cdot d\vec{x}' = \mu_0 I' \Rightarrow \oint (B' \hat{\theta}) \cdot (dx' \hat{\theta}) = \mu_0 I' \Rightarrow \oint B' dx' = \mu_0 I' \xrightarrow{dx' = r' d\theta}$$

$$\int_0^{2\pi} B' r' d\theta = \mu_0 I' \Rightarrow B' r' (2\pi) = \mu_0 I' \Rightarrow B' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r'} \quad ; \quad r' < R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J = \frac{I}{\pi R^2} \\ I' = J(\pi r'^2) \end{array} \right\} \Rightarrow I' = \frac{I}{\pi R^2} (\pi r'^2) \Rightarrow I' = \frac{I r'^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow B' = \frac{\mu_0 \left(\frac{I r'^2}{R^2} \right)}{2\pi r'} \Rightarrow \boxed{B' = \frac{\mu_0 I r'}{2\pi R^2}} \quad ; \quad r' < R$$



قانون بیوساوار:

برای محاسبه \mathbf{B} در حالت کلی بکار می رود.

فرض کنید سیمی مطابق شکل در فضا حامل جریان \mathbf{i} است. برای استفاده از قانون بیوساوار داریم:

۱- انتخاب دستگاه مختصات مناسب .

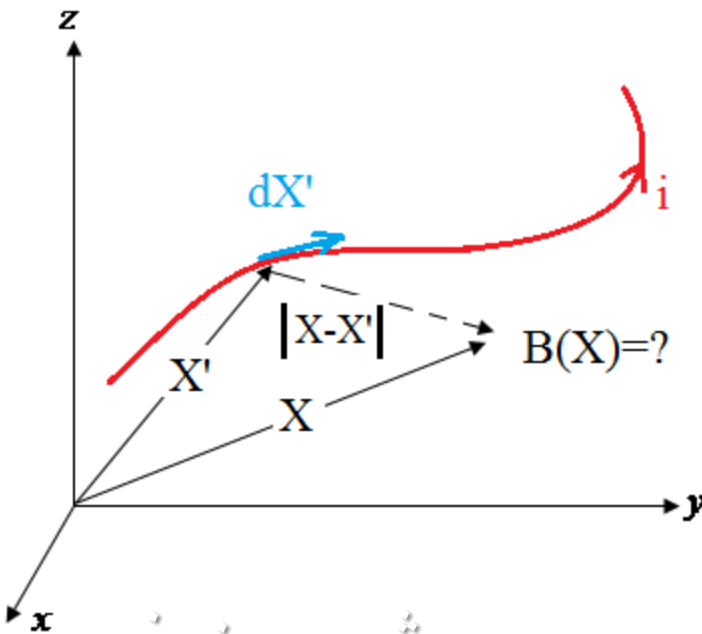
۲- بردار مکانی که از مبدا تا نقطه ای که می خواهیم \mathbf{B} را بدست آوریم رسم می شود را با \mathbf{X} نمایش می دهیم.

۳- انتخاب $d\mathbf{X}'$ (المان طولی در سیم حامل جریان) می بایست در جهت جریان باشد.

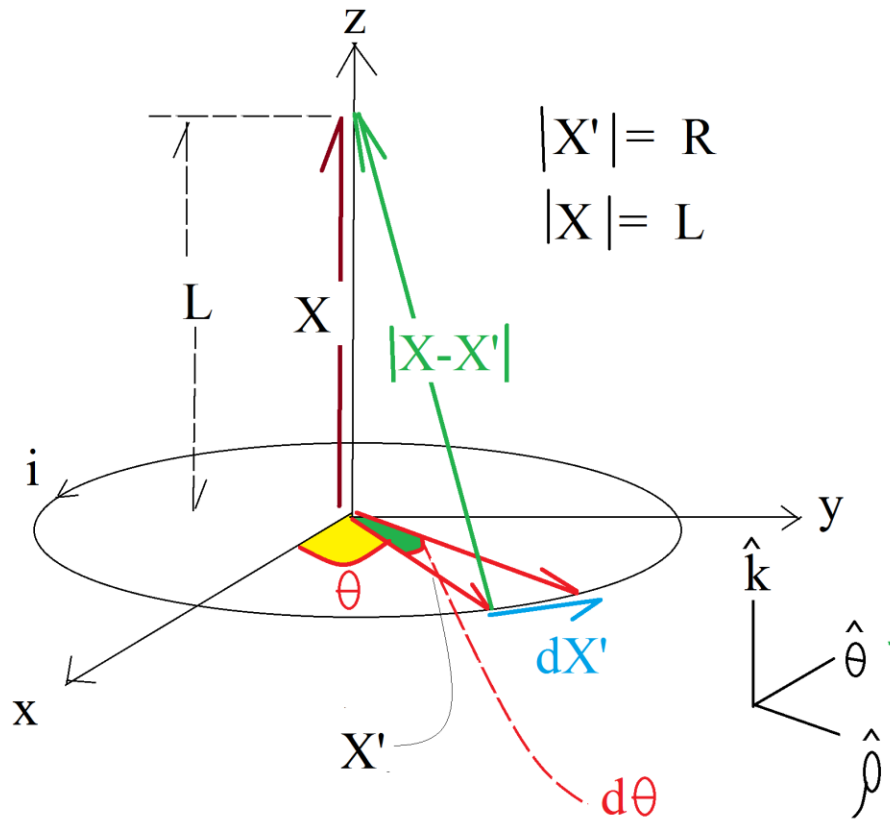
۴- بردار مکانی که از مبدا تا اول $d\mathbf{X}'$ رسم می شود را \mathbf{X}' می گیریم.

۵- استفاده از فرمول :

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3}$$



مثال: حلقه ای به شعاع R حامل جریان i است. مطلوبست محاسبه ی میدان مغناطیسی حاصل از آن در فاصله ی L از مرکز حلقه و واقع بر خط عمود بر صفحه ی حلقه و گذرنده از مرکز آن.



$$d\vec{X}' = dX' \hat{\theta} = R d\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{X} = L \hat{k} \quad ; \quad \vec{X}' = R \hat{\rho}$$

$$\Rightarrow |\vec{X} - \vec{X}'| = \sqrt{L^2 + R^2} \quad ; \quad \hat{\rho} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$$

$$\vec{B}(\vec{X}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3}$$

$$\rightarrow \vec{B}(R) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{R d\theta \hat{\theta} \times (L \hat{k} - R \hat{\rho})}{(R^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}}$$

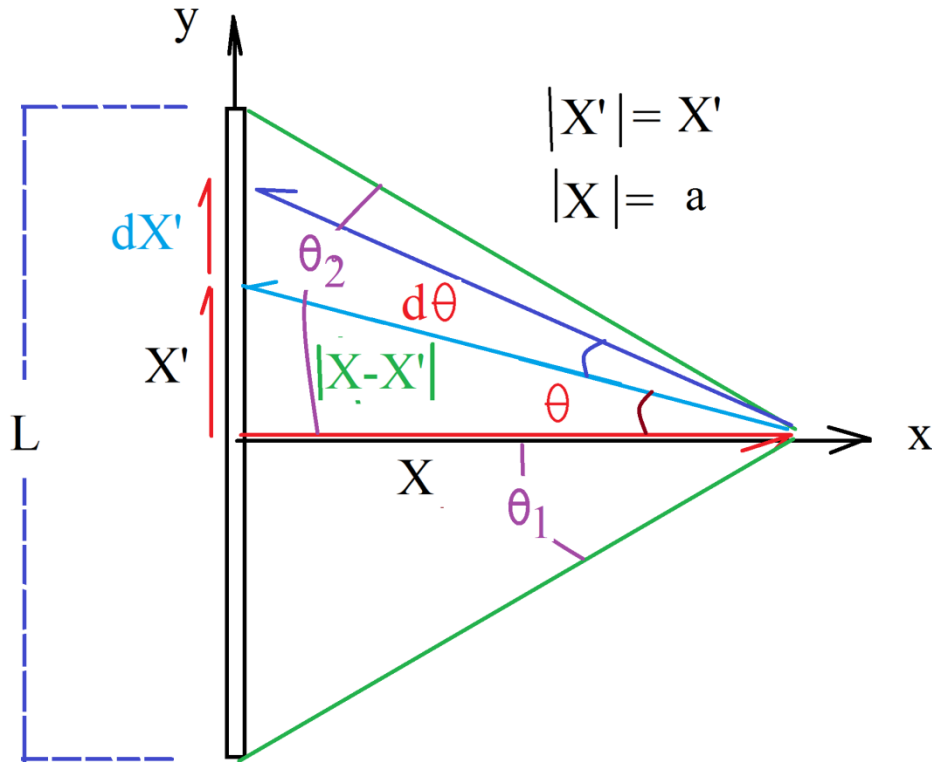
$$\rightarrow \vec{B}(R) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (R^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta [L \hat{\rho} + R \hat{k}]$$

$$\rightarrow \vec{B}(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi(\mathbf{R}^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta \left[L(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) + R \hat{k} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi(\mathbf{R}^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \underbrace{\left(L \hat{i} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right)}_{=0} + \underbrace{\left(L \hat{j} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \right)}_{=0} + \left(R \hat{k} \int_0^{2\pi} d\theta \right) \right\} \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0 i R}{4\pi(\mathbf{R}^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} (R \hat{k} (2\pi)) \Rightarrow \boxed{\vec{B}(\mathbf{X} = \mathbf{R}) = \frac{\mu_0 i R^2 \hat{k}}{2(\mathbf{R}^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

مثال: سیمی مستقیم بطول L دارای جریان i می باشد. مطلوبست محاسبه ی میدان مغناطیسی حاصل از آن در فاصله ی a از سیم و واقع بر خط عمود منصف آن.



$$d\vec{X}' = dX' \hat{j} \quad ; \quad \vec{X} = a \hat{i} \quad ; \quad \vec{X}' = X' \hat{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{X} - \vec{X}'| = \sqrt{X'^2 + a^2}$$

$$\vec{B}(\vec{X}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3}$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{X}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dX' \hat{j} \times (a \hat{i} - X' \hat{j})}{(X'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{X}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{a dX' (-\hat{k})}{(X'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + 0$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{X}) = \frac{\mu_0 i a (-\hat{k})}{4\pi a^3} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dX'}{\left(\left(\frac{X'}{a}\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{X'}{a} = \tan \theta \rightarrow \frac{dX'}{a} = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ \rightarrow dX' = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

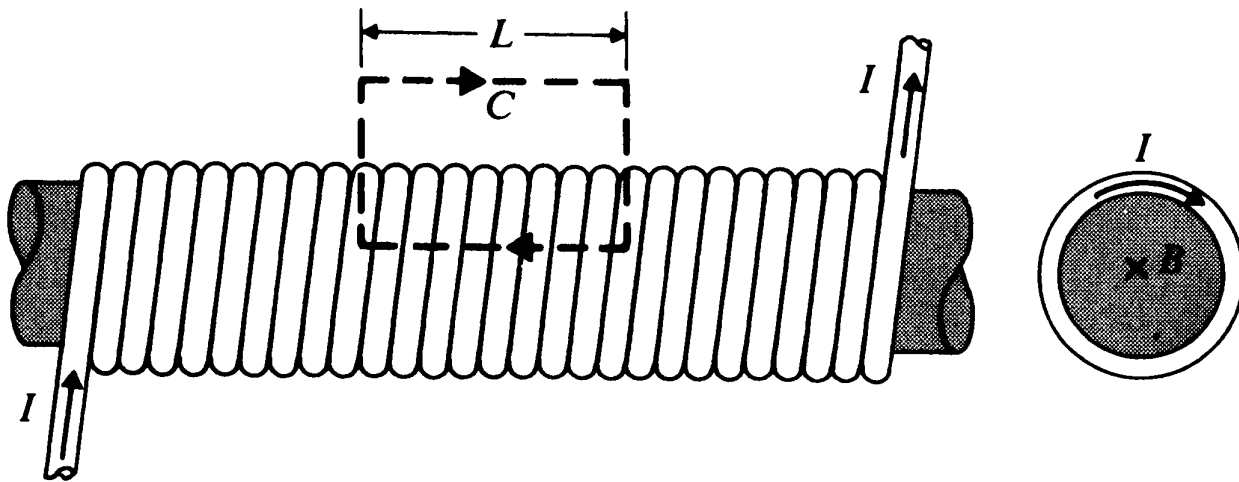
$$\vec{B}(\vec{X}) = \frac{\mu_0 i a (-\hat{k})}{4\pi a^3} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta \left(\tan^2 \theta + 1\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 i (-\hat{k})}{4\pi a} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} = \frac{\mu_0 i (-\hat{k})}{4\pi a} \int_{-\frac{L}{2} \rightarrow \theta_2}^{\frac{L}{2} \rightarrow \theta_1} \cos \theta d\theta \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{X}) = \frac{\mu_0 i (-\hat{k})}{4\pi a} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta_1 = \frac{-\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{L}{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{-L}{\sqrt{4L^2 + a^2}} ; \sin \theta_2 = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{L}{\sqrt{4L^2 + a^2}} \end{array} \right\}$$

روش دیگر حل این مساله استفاده از قانون آمپر است:

واضح است در خارج سولنوئید هیچ میدانی نداریم، پس برای تعیین B در داخل مسیر مستطیلی C به طول L را چنان تشکیل می دهیم که بخشی از آن داخل و بخشی دیگر در خارج باشد. بدلیل تقارن خطوط میدان می بایست در داخل بصورت موازی و بموازات محور اصلی سولنوئید باشند. با استفاده از قانون آمپر داریم:



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{x} = \mu_0 I \Rightarrow BL = \mu_0 nLI \Rightarrow B = \mu_0 nI$$

نیروی مغناطیسی وارد بر یک سیم حامل جریان از سوی سیم دیگر حامل جریان:

قبلاً دیدیم که نیروی وارد بر یک سیم حامل جریان از طرف میدان مغناطیسی \vec{B} می‌شود: $\vec{F}_1 = i_1 \int d\vec{L}_1 \times \vec{B}$
 حال اگر این میدان مغناطیسی توسط سیم حامل جریان دومی ایجاد شده باشد می‌بایست مقدار \vec{B} حاصل از آن را در

مکان سیم اول محاسبه نمود و داریم:

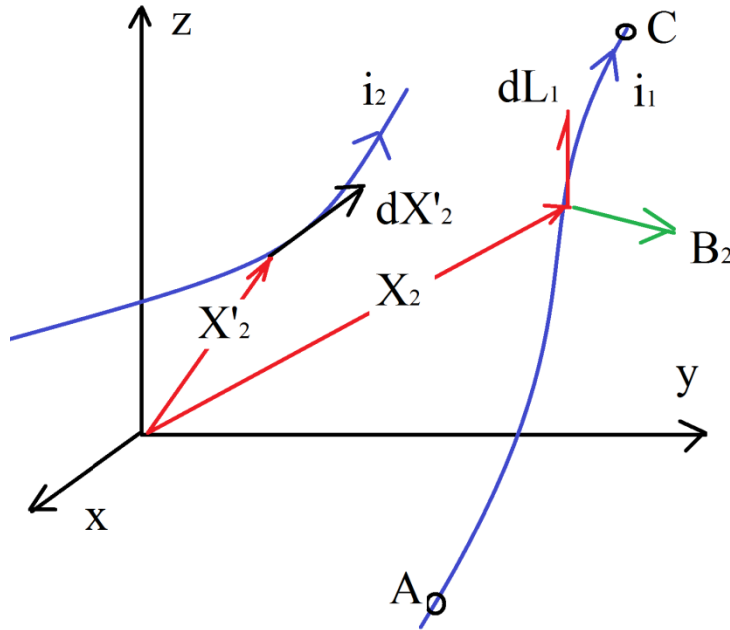
$$\vec{B}_2(\vec{X}) = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}'_2 \times (\vec{X}_2 - \vec{X}'_2)}{|\vec{X}_2 - \vec{X}'_2|^3}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = i_1 \int d\vec{L}_1 \times \vec{B}_2$$

و داریم:

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = i_1 \int_A^C d\vec{L}_1 \times \left(\frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}'_2 \times (\vec{X}_2 - \vec{X}'_2)}{|\vec{X}_2 - \vec{X}'_2|^3} \right)$$



مثال: دو سیم موازی به فاصله ی d با جریان های i_1 و i_2 که در یک جهت حرکت می کنند داریم. مطلوبست محاسبه ی

نیروی وارد بر سیم حامل جریان i_2 از سوی سیم حامل جریان i_1 .

قبلاً با استفاده از قانون آمپر مقدار میدان مغناطیسی حاصل از سیم

حامل جریان در فاصله ی d از آن بدست آمده که شده است:

$$\vec{B}(d, \theta, z) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \hat{\theta} \quad \vec{B}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \hat{\theta}$$

برای این مساله می شود:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= i_2 \int d\vec{L}_2 \times \vec{B}_1 \\ \vec{B}_1(d, \theta, z) &= \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \hat{\theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = i_2 \int_{Z_A}^{Z_C} d\vec{L}_2 \times \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \hat{\theta}$$

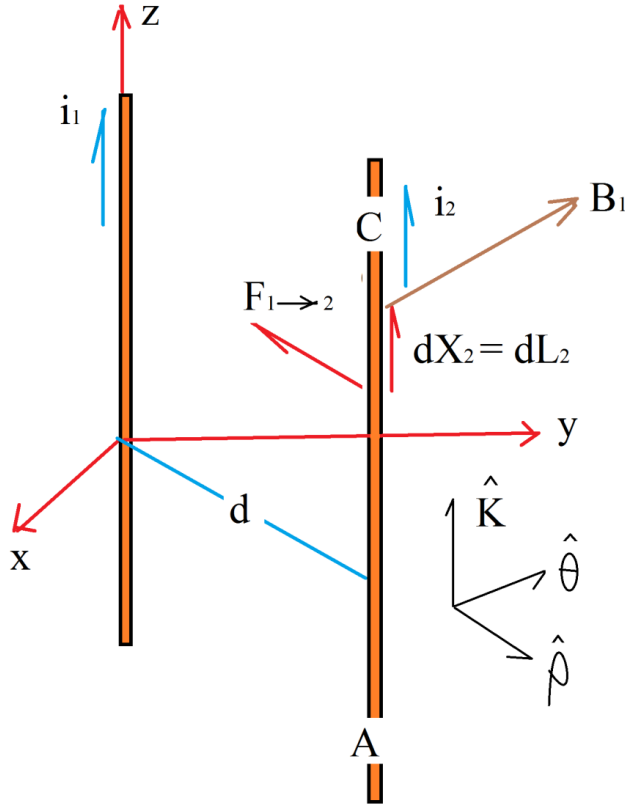
و حال F می شود:

$$\xrightarrow{d\vec{L}_2 = dz \hat{k}} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d} \int_{Z_A}^{Z_C} dz \hat{k} \times \hat{\theta} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d} \int_{Z_A}^{Z_C} dz (-\hat{\rho}) = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d} (Z_C - Z_A) (-\hat{\rho})$$

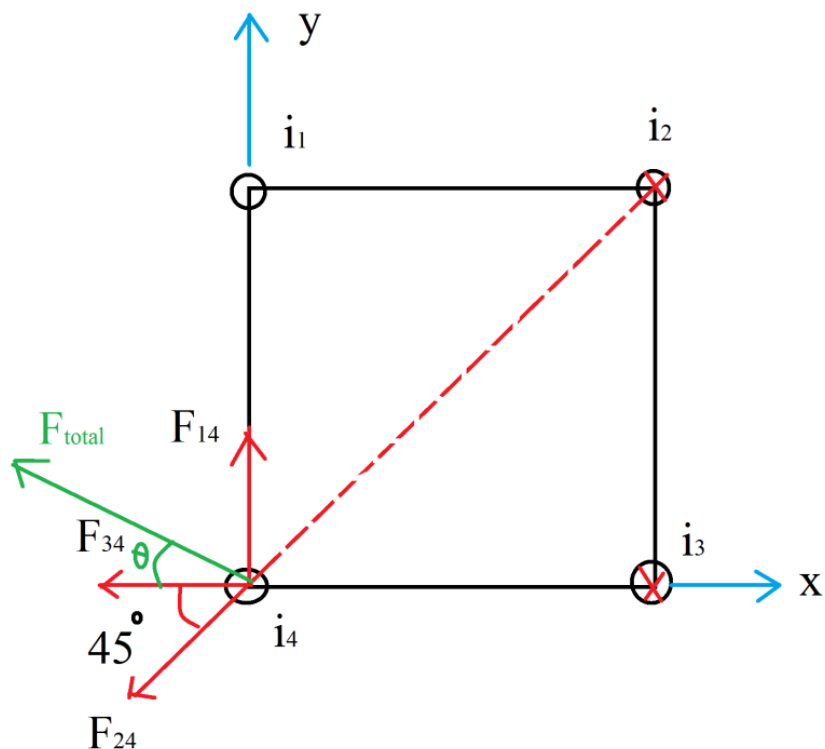
که نشان دهنده ی نیروی جاذبه ی بین دو سیم است.

²¹⁵توجه: چنانچه جهت جریان در یکی از دو سیم برعکس شود نیروی دافعه بین سیم ها ایجاد می شود.



مثال: در شکل زیر ۴ رشته سیم واقع بر چهار راس مربعی به ضلع a حامل جریانهای i_1 الی i_4 می باشند. مطلوبست محاسبه ی مقدار و جهت نیروی وارد بر سیم چهارم از طرف ۳ سیم دیگر.

قبلاً محاسبه شده برای دو سیم با جهات جریان هم سو نیرو جاذبه و برای غیر هم سو نیرو دافعه می باشد. پس داریم:



$$\vec{F}_{1 \rightarrow 4} = \frac{\mu_0 i_1 i_4}{2\pi a} L_4 (\hat{j})$$

$$\vec{F}_{3 \rightarrow 4} = \frac{\mu_0 i_3 i_4}{2\pi a} L_4 (-\hat{i})$$

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 4} = \frac{\mu_0 i_2 i_4}{2\pi a} L_4 (\cos 45^\circ (-\hat{i}) + \sin 45^\circ (-\hat{j}))$$

شهر روز نصیریان

شار مغناطیسی:

اگر یک آهنربا را به یک حلقه ی بسته از یک سیم رسانا نزدیک نماییم، مشاهده می شود که جریانی در سیم پدیدار می شود. اگر برعکس آهنربا را از حلقه دو نماییم نیز جریان در حلقه ایجاد می شود ولی در جهت خلاف حالت قبل. بنابراین تغییر شار مغناطیسی حاصل از میدان برداری مغناطیسی و گذرنده از سطح حلقه موجب ایجاد این جریان القایی می گردد.

قانون فاراده:

اگر شار مغناطیسی گذرنده از مسیر تغییر نماید، در دو سوی آن مسیر یک نیروی محرکه ی القایی (emf) ایجاد می شود. اگر مسیر مورد نظر بسته باشد در آن جریانی موسوم به جریان القایی ایجاد می گردد و اگر دو سر مسیر باز باشد در دو سر آن ولتاژ القایی ایجاد می شود. تغییر شار به ۳ روش امکان پذیر است: ۱- مسیر مورد نظر یا قسمتی از آن متحرک باشد. ۲- میدان مغناطیسی متغییر با زمان باشد. ۳- مسیر متحرک و نیز میدان مغناطیسی متغییر باشند. داریم:

$$\left(\Phi_B = \int \vec{B}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{a} \right)$$

حال فرمولبندی این قانون بصورت زیر است:

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\int \vec{B}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{a} \right) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{x} = \varepsilon$$

(*) می توان شار مغناطیسی را بر پایه ی پتانسیل برداری A نیز بدست آورد:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} \xrightarrow{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}} \Phi_B = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} \xrightarrow{\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}} \boxed{\Phi_B = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}}$$

پس پتانسیل مغناطیسی برداری (A) دارای مفهوم فیزیکی است و آن بدین معنی است که انتگرال خطی آن بدور هر مسیر بسته برابر کل شار مغناطیسی گذرنده از سطح محصور شده توسط این مسیر است. (*)
قانون لنز:

حال فرض نمایید تغییر شار (به هر دلیل) موجب ایجاد جریان در مسیر بسته شود. این جریان در جهتی جاری می گردد که میدان مغناطیسی حاصل از آن در خلاف جهت میدان مغناطیسی ایجاد کننده باشد. یعنی شاری که میدان ثانویه ایجاد می نماید با شار ایجاد کننده ی جریان مخالفت می نماید. یعنی اگر شار مغناطیسی ایجاد کننده ی جریان القایی رو به افزایش (کاهش) باشد، میدان مغناطیسی ناشی از جریان القایی (و نهایتاً شار حاصل از آن) سعی در کاهش (افزایش) جریان دارد. این بیان، قانون لنز است. جهت جریان القایی و نهایتاً جهت میدان حاصل از آن را می توان با استفاده از قانون لنز و قانون دست راست بدست آورد.

مثال : سیمی مستقیم حامل جریان i در فاصله a از قابی رسانا مطابق شکل قرار دارد. مطلوبست محاسبه ی شار مغناطیسی گذرنده از قاب.

B در اطراف سیم مستقیم قبلاً محاسبه شده و مقدار آن در فاصله ی R از سیم (و گذرنده از سطح قاب) عبارت است از :

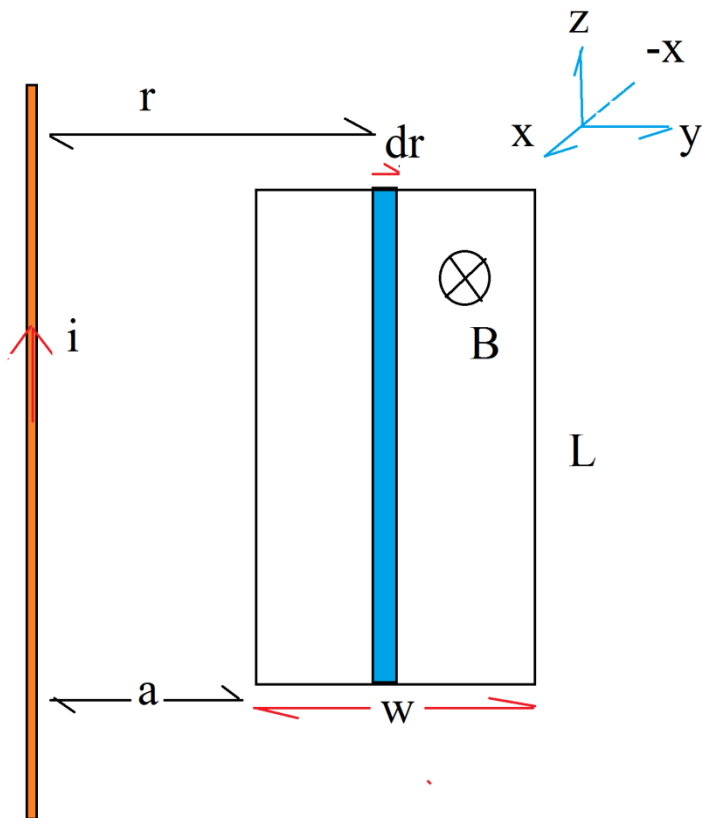
$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} (-\hat{i})$$

این میدان بر هر چهار سیم قاب عمود است، لذا:

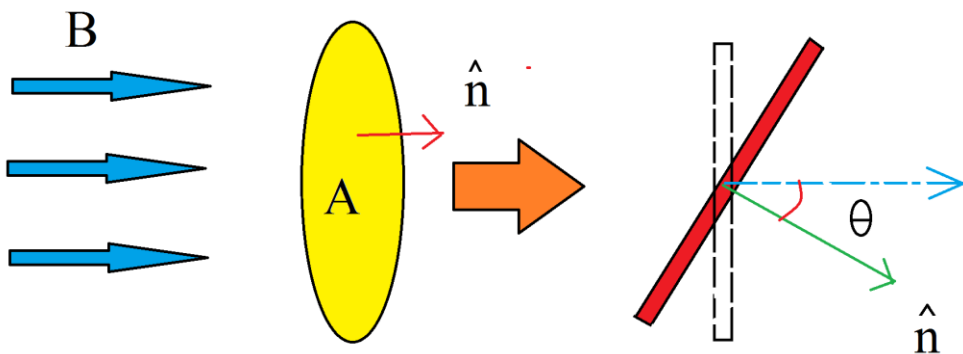
$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{a} = B \cdot da = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} L dr \Rightarrow$$

$$\Phi_B = \oint d\Phi_B = \int_a^{a+w} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} L dr \Rightarrow$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 i L}{2\pi} \ln\left(\frac{a+w}{a}\right)$$



مثال : سیم رسانا و دایره ای به شعاع a دارای مقاومت R است. در زمان صفر سطح این حلقه بر میدان مغناطیسی خارجی عمود است. در زمان $t > 0$ انرا با سرعت زاویه ای ω حول یکی از اقطار اصلی اش می چرخانیم. مطلوبست محاسبه ی جریان القایی در حلقه اگر تغییر میدان مغناطیسی با زمان بشکل زیر باشد. $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)$.



$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{a} = B(t) da \cos \theta \Rightarrow$$

$$\Phi_B = \oint d\Phi_B = B(t) A \cos \theta \xrightarrow{\theta = \omega t}$$

$$\Phi_B = B(t) A \cos(\omega t) \xrightarrow{\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)}$$

$$\Phi_B = B_0 A \cos(\omega t) \cos(\omega t) \Rightarrow$$

$$\Phi_B = B_0 A \cos^2 \omega t \Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = -2 B_0 A \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) \xrightarrow{\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

$$\varepsilon = 2 B_0 A \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) = B_0 A \omega \sin(2\omega t) \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B_0 A \omega \sin(2\omega t)}{R}$$

مثال: حلقه ای با n دور سیم و شعاع a حامل جریان i_a است. حلقه ی دیگری با شعاع b می افتد و به سمت حلقه ی a با سرعت ثابت حرکت می کند بنحوی که همواره بردار نرمال های دو سطح موازی هستند. مطلوب است محاسبه نیرو محرکه القایی در حلقه به شعاع b . (فاصله دو حلقه L می باشد)

B حلقه اول (a) در مکان حلقه دوم:

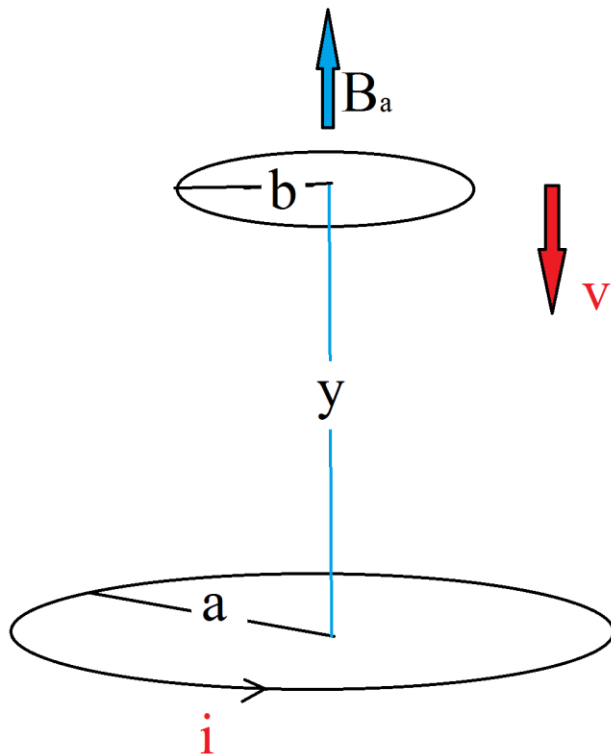
$$B_a = \frac{\mu_0 i_a n a^2}{2(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

حال:

$$\varphi_{a \rightarrow b} = \vec{B}_a \cdot \vec{S}_b = B_a S_b \Rightarrow$$

$$\varphi_{a \rightarrow b} = \frac{\mu_0 i_a n a^2}{2(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} (\pi b^2) \Rightarrow$$

$$\varphi_{a \rightarrow b} = \frac{\mu_0 \pi i_a n a^2 b^2}{2(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$



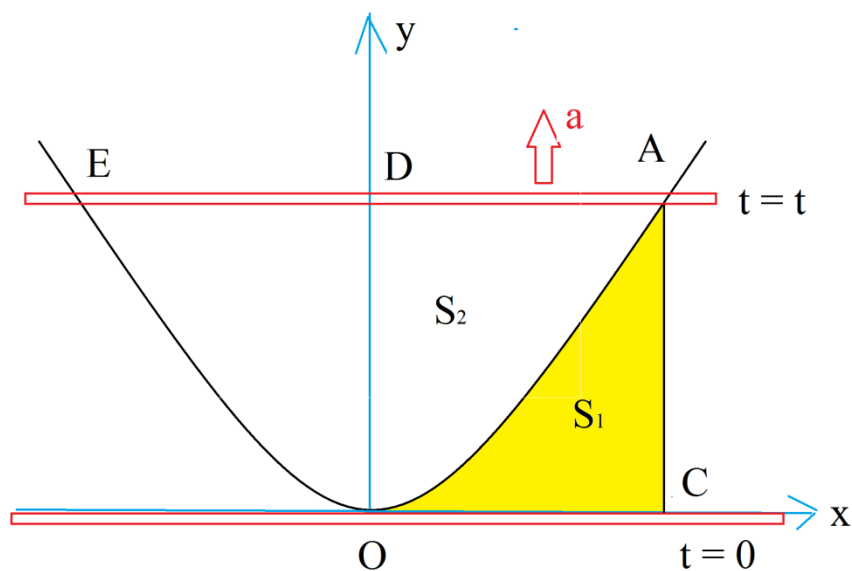
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 \pi i_a n a^2 b^2}{2(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \Rightarrow$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\left(-\frac{3 \mu_0 \pi i_a n a^2 b^2 (2y)}{2 (a^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \frac{dy}{dt} \right) \xrightarrow{y=y_0 - vt \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -v}$$

$$\varepsilon = \left(\frac{3 \mu_0 \pi i_a n a^2 b^2 (2y)}{4 (a^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \frac{dy}{dt} \right) = \left(\frac{3 \mu_0 \pi i_a n a^2 b^2 (2y)}{4 (a^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} (-v) \right)$$

مثال: مطابق شکل سیمی سهمی شکل با معادله $y=kx^2$ داریم. میله ای از رأس سهمی با شتاب ثابت (a) به سمت بالا حرکت می کند اگر مجموعه فوق در میدان یکنواخت خارجی که عمود بر سطح سهمی است قرار داشته باشد مطلوبست محاسبه نیرو و محرکه القایی در مجموعه.

برای حل می بایست ابتدا مساحت بین سهمی و میله را بدست آورد.



$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \int_0^{x_A} y \, dx = \int_0^{x_A} k x^2 \, dx = \frac{k x_A^3}{3} \\ S_{OCAD} = x_A y_A \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\substack{y_A = kx_A^2 \\ \Rightarrow x_A = \sqrt{\frac{y_A}{k}}}} \left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{k \frac{y_A}{k} \sqrt{\frac{y_A}{k}}}{3} = \frac{y_A}{3} \sqrt{\frac{y_A}{k}} \\ S_{OCAD} = \sqrt{\frac{y_A}{k}} y_A \end{array} \right. \end{array}$$

$$S_2 = S_{OCAD} - S_1 = \sqrt{\frac{y_A}{k}} y_A - \frac{y_A}{3} \sqrt{\frac{y_A}{k}} = \frac{2y_A}{3} \sqrt{\frac{y_A}{k}} \Rightarrow$$

$$S_{OAE0} = 2S_2 = \frac{4y_A}{3} \sqrt{\frac{y_A}{k}} = \frac{4(y_A)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{k}}$$

$$y_A = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y_A}{a}}$$

میله با شتاب ثابت بسمت بالا حرکت می نماید، پس داریم:

حال داریم:

$$\Phi_B = \oint d\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = BS_{OAE0} \Rightarrow \Phi_B = B \frac{4(y_A)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{k}} \xrightarrow{y_A = \frac{1}{2} at^2} \Phi_B = \frac{4B \left(\frac{1}{2} at^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{k}} \Rightarrow$$

$$\Phi_B = \frac{4B \left(\frac{1}{2} a \right)^{\frac{3}{2}} t^3}{3\sqrt{k}} \Rightarrow \varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \left[\frac{4B \left(\frac{1}{2} a \right)^{\frac{3}{2}} t^3}{3\sqrt{k}} \right] = - \frac{4B \left(\frac{1}{2} a \right)^{\frac{3}{2}} 3t^2}{3\sqrt{k}}$$

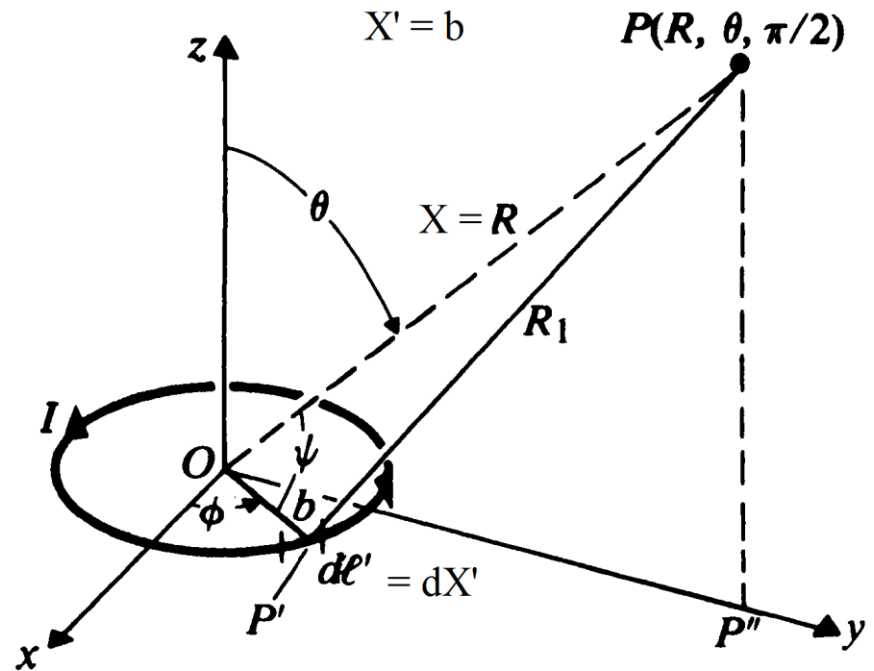
$$\xrightarrow{t = \sqrt{\frac{2y_A}{a}}} \varepsilon = - \frac{4B \left(\frac{1}{2} a \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} a \right) \left(\frac{2y_A}{a} \right)}{\sqrt{k}} \Rightarrow \varepsilon = - \frac{4B y_A}{\sqrt{k}} \left(\frac{1}{2} a \right)^{\frac{1}{2}}$$

(*) دو قطبی مغناطیسی:

ابتدا می خواهیم چگالی شار مغناطیسی را در فاصله ای دور از یک حلقه ی دایره ای کوچک به شعاع b و حامل جریان I (یک دو قطبی مغناطیسی) بدست آوریم. با استفاده از قانون بیوساوار و رابطه ی چگالی شار مغناطیسی داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}}{R} dV' \xrightarrow{J dV' = JS d\ell' = Id\ell'} \\ \rightarrow \vec{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{V'} \frac{d\ell'}{R} \\ \vec{B}(\vec{X}) &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{V'} \frac{d\vec{X}'}{|\vec{X} - \vec{X}'|}$$



$$\xrightarrow{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$d\vec{X}' = dX' \hat{\phi} = bd\phi \hat{\phi} = bd\phi (-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j})$$

$$\vec{X} = R \cos \psi \cos \phi \hat{i} + R \cos \psi \sin \phi \hat{j} + R \sin \psi \hat{k}$$

$$\vec{X}' = b \cos \phi \hat{i} + b \sin \phi \hat{j}$$

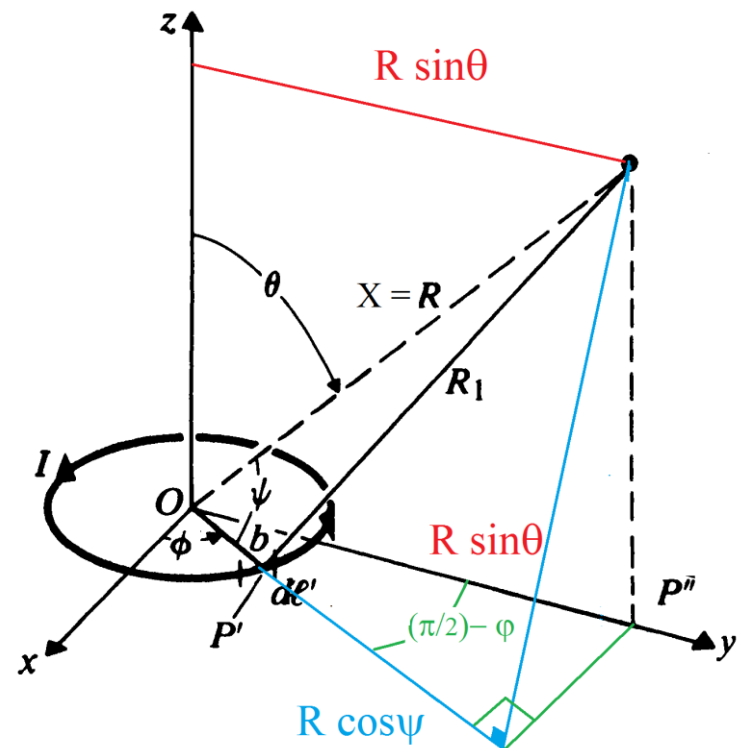
$$\Rightarrow |\vec{X} - \vec{X}'| = R_1$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{V'} \frac{d\vec{X}'}{|\vec{X} - \vec{X}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{V'} \frac{bd\phi (-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j})}{|R_1|}$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (R-b).(R-b) = R^2 + b^2 - 2Rb \cos \psi \\ (R-b).(R-b) = |R-b||R-b| \cos 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ |R-b| = R_1 \\ \Rightarrow R_1^2 = R^2 + b^2 - 2Rb \cos \psi \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{R \cos \psi}{R \sin \theta} \Rightarrow R \cos \psi = R \sin \theta \sin \phi$$

$$\Rightarrow R_1^2 = R^2 + b^2 - 2Rb \sin \theta \sin \phi$$

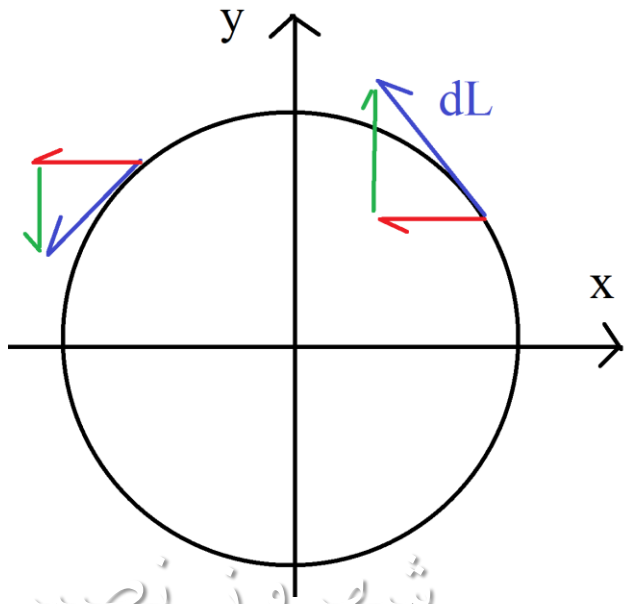


$$R_1^2 = R^2 + b^2 - 2Rb \sin \theta \sin \varphi \Rightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{b^2}{R^2} - \frac{2b}{R} \sin \theta \sin \varphi \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\xrightarrow{R^2 \gg b^2} \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{2b}{R} \sin \theta \sin \varphi \right)^{-\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{R} \left(1 + \frac{b}{R} \sin \theta \sin \varphi \right)$$

با جایگذاری در رابطه ی A داریم:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{V'} \frac{bd\varphi (-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j})}{|R_1|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{V'} \frac{bd\varphi}{R} \left(1 + \frac{b}{R} \sin \theta \sin \varphi \right) (-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j})$$



اما در این رابطه مولفه ی وابسته به \hat{j} در جزء دیفرانسیلی مقداری برابر و در خلاف جهت در طرف دیگر محور y ها دارد که آنرا خنثی می نماید ولی مولفه ی مربوط به \hat{i} با مقداری برابر و هم جهت روی A اثر می گذارد. بنابراین جمله ی وابسته به \hat{j} حذف می شود و داریم:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\nu'} \frac{bd\varphi}{R} \left(1 + \frac{b}{R} \sin \theta \sin \varphi\right) (-\sin \varphi \hat{i}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{bd\varphi}{R} \left(1 + \frac{b}{R} \sin \theta \sin \varphi\right) (-\sin \varphi \hat{i}) \xrightarrow{\text{Or}} \rightarrow$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{bd\varphi}{R} \left(1 + \frac{b}{R} \sin \theta \sin \varphi\right) (\sin \varphi \hat{\phi}) \quad \left(\begin{array}{l} \hat{i} = \cos \varphi \hat{r} - \sin \varphi \hat{\phi} \\ \hat{\phi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \end{array} \right) \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} * = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi} * + \int_{\pi}^{2\pi} * \right] = \int_0^{\pi} * = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} * \right)$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I b}{2\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{b}{R} \sin \theta \sin \varphi\right) (\sin \varphi d\varphi) = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I b}{2\pi R} \left[\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi}_{=0} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{R} \sin \theta \sin^2 \varphi d\varphi \right]$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I b^2 \sin \theta}{2\pi R^2} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \right) = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I b^2 \sin \theta}{2\pi R^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi$$

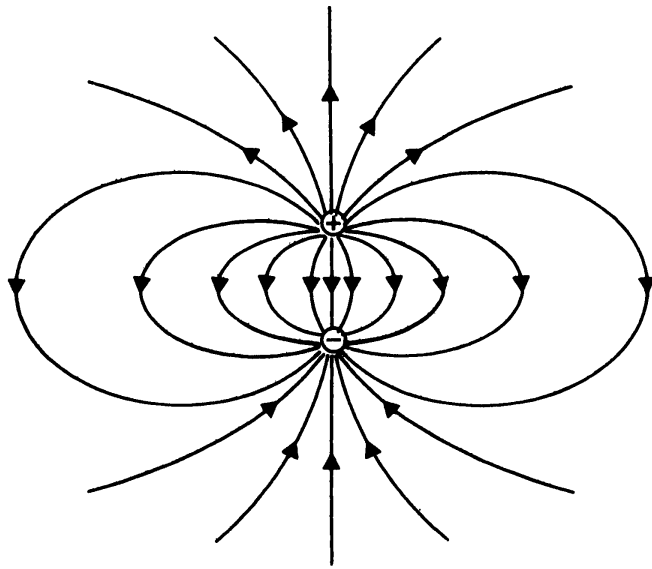
$$\Rightarrow \vec{A} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I b^2 \sin \theta}{2\pi R^2} \left\{ \underbrace{\left[\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \right]}_{=\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\left[\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\varphi) d\varphi \right]}_{=0} \right\} \Rightarrow \vec{A} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I b^2 \sin \theta}{4R^2}$$

حال رابطه ی اخیر را مجدد می نویسیم:

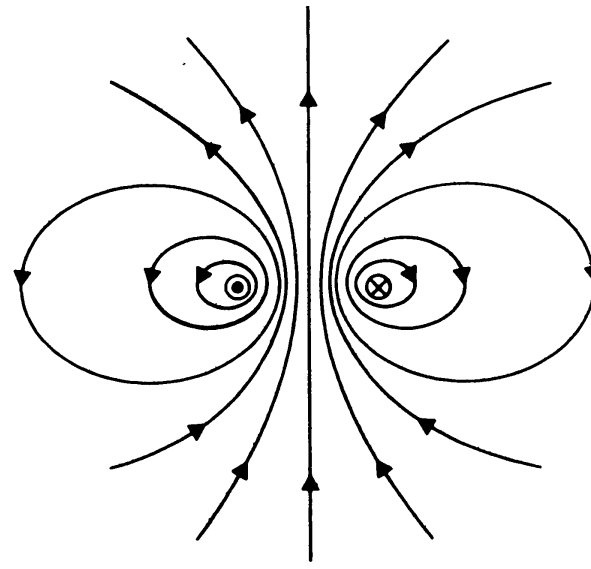
$$\vec{A}(\vec{R}) = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I b^2 \sin \theta}{4 R^2} \Rightarrow \vec{A}(\vec{R}) = \hat{\phi} \frac{\mu_0 (I \pi b^2) \sin \theta}{4 \pi R^2} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \hat{R}}{4 \pi R^2} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \vec{R}}{4 \pi R^3} \left(\frac{Wb}{m} \right) \quad (*)$$

$$\left[\vec{m} = \hat{k} I \pi b^2 = \hat{k} I S = \hat{k} m \right]$$

که در آن m را گشتاور دوقطبی مغناطیسی تعریف می کنند و برداری است که اندازه ی آن برابر با حاصلضرب جریان وارده در سطح حلقه بوده و جهتی هم سو با شست دست راست دارد، اگر انگشتان جهت جریان را دنبال نمایند.



(a) Electric dipole.



(b) Magnetic dipole.

میدان مغناطیسی با محاسبه ی کرل معادله ی (*) بدست می آید. داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} (*) : \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}\hat{R}}{R^3} \right) \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}\hat{R}}{R^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}\hat{R}}{R^3} + \mathbf{m} \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}\hat{R}}{R^3} \right]$$

جمله ی اول داخل کروشه را می توان با توجه به رابطه ی زیر تبدیل کرد.

$$\xrightarrow{\mathbf{R}\hat{R} = \vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k}} m_x \frac{\partial}{\partial R_x} \left(\frac{\mathbf{R}\hat{R}}{R^3} \right) = \frac{m_x \hat{i}}{R^3} - 3m_x R_x \frac{\mathbf{R}\hat{R}}{R^5}$$

$$\left[\mathbf{R}\hat{R} \frac{\partial}{\partial R_x} (R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)^{-\frac{3}{2}} = \mathbf{R}\hat{R} \left(-\frac{3}{2} \right) (-2R_x) (R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)^{-\frac{5}{2}} = -3m_x R_x \frac{\mathbf{R}\hat{R}}{R^5} \right]$$

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}\hat{R}}{R^3} = \frac{\vec{m}}{R^3} - \frac{3(\vec{m} \cdot \mathbf{R}\hat{R}) \mathbf{R}\hat{R}}{R^5}$$

پس داریم:

اما جمله ی دوم داخل کروشه شامل محاسبه ی زیر است:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}\hat{R}}{R^3} = \frac{3}{R^3} - \mathbf{R}\hat{R} \cdot \frac{3\mathbf{R}\hat{R}}{R^5} = 0$$

پس نهایتاً داریم:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\vec{m}}{R^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot R\hat{R})R\hat{R}}{R^5} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\vec{m}}{R^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} \right] \quad (\text{دوقطبی مغناطیسی})$$

این رابطه نشان می دهد که میدان مغناطیسی ناشی از یک مدار در فواصل دور به جزئیات شکل هندسی مدار بستگی ندارد ، بلکه تنها به گشتاور دو قطبی مغناطیسی آن (\mathbf{m}) مربوط می شود.

پتانسیل مغناطیسی نرده ای (عددی)

رابطه ی $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ بیان می کند که هر جا چگالی جریان صفر باشد، کرل میدان مغناطیسی در آنجا صفر است. پس می توانیم میدان مغناطیسی را در نواحی که چگالی جریان صفر است بصورت شیب یک پتانسیل مغناطیسی نرده

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla V_m \quad \text{ای بنویسیم:}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{اما داریم:}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = -\mu_0 \nabla^2 V_m = 0 \quad \text{پس می توان نوشت:}$$

پس V_m که پتانسیل نرده ای مغناطیسی است در معادله ی لاپلاس صدق می کند.

رابطه ی مربوط به پتانسیل نرده ای یک دو قطبی مغناطیسی را می توان بدست آورد:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\vec{m}}{R^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} \right] = -\mu_0 \nabla \left(\frac{(\vec{m} \cdot \vec{R})}{4\pi R^3} \right)$$

با توجه به رابطه ی $\vec{B} = -\mu_0 \nabla V_m$ می توان نوشت:

$$V_m = \frac{(\vec{m} \cdot \vec{R})}{4\pi R^3}$$

مغناطیس شدگی (مغناطش)

همه ی مواد از اتم هایی با هسته ی مثبت و الکترون هایی که بدور آنها می چرخند تشکیل شده است. پس این الکترونها ی گردان دو قطبی های مغناطیسی میکروسکوپی ایجاد می نمایند. بعلاوه هم هسته و هم الکترونها حول محور اتم حرکت دورانی (وضعی) دارند ولی چون گشتاور دو قطبی مغناطیسی هسته نسبت به الکترون ها خیلی کوچک تر است صرفنظر می گردد.

پس ظاهراً در طبیعت دو نوع جریان داریم: (۱) جریان واقعی که توسط حرکت حامل های بار (الکترون ها یا یون ها) ایجاد می شود. (۲) جریان های اتمی که جریان های دورانی اند و منجر به انتقال بار نمی شوند. نکته آنست که هر دو جریان می توانند میدان مغناطیسی ایجاد نمایند.

در غیاب میدان مغناطیسی گشتاور دو قطبی های اتمی تصادفی اند (جز آهنرباهای دائمی) و هیچ گشتاور مغناطیسی خالصی را نتیجه نمی دهند. در حضور میدان مغناطیسی خارجی، گشتاور های مغناطیسی الکترون ها اولاً هم سو می شوند و ثانیاً بدلیل تغییر در حرکت مداری الکترون ها بدور هسته یک گشتاور مغناطیسی القایی ایجاد می شود. پس مهم است که تغییرات چگالی شار مغناطیسی را در حضور یک ماده ی مغناطیسی بررسی نماییم.

فرض می نماییم m_k گشتاور دوقطبی مغناطیسی اتم k باشد. اگر n اتم در واحد حجم موجود باشد، بردار مغناطیس شدگی را بصورت زیر تعریف می نماییم، که همان چگالی حجمی گشتاور دوقطبی مغناطیسی است.

$$m = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta V} m_k}{\Delta V} \left(\frac{A}{m} \right) \quad (6-55)$$

حال گشتاور دوقطبی مغناطیسی dm در یک حجم کوچک dV' می شود: $dm = M dV'$

$$\frac{\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \vec{R}}{4\pi R^3}}{\longrightarrow} d\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 \vec{M} \times \vec{R}}{4\pi R^3} dV' \xrightarrow{\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\vec{R}}{R^3}}$$

$$d\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dV' \Rightarrow \vec{A}(\vec{R}) = \int_{V'} d\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dV'$$

$$\nabla \times (f \vec{G}) = f \nabla \times \vec{G} + (\nabla f) \times \vec{G} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f = \frac{1}{R} \\ \vec{G} = \vec{M} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \vec{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla' \times \vec{M} - \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{R} \right)$$

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\nabla' \times \vec{M}}{R} \right) dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{R} \right) dV'$$

$$\int_{V'} (\nabla' \times F) dV' = - \oint_{S'} F \times dS' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{V'} \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}}{R} \right) dV' = - \oint_{S'} \left(\frac{\vec{M}}{R} \right) \times dS' = - \oint_{S'} \left(\frac{\vec{M} \times \hat{n}'}{R} \right) ds'$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\nabla' \times \vec{M}}{R} \right) dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \left(\frac{\vec{M} \times \hat{n}'}{R} \right) ds' \quad (I)$$

که در آن بردار نرمال عمود و بسمت خارج از سطح ماده ی مغناطیسی (S') است و S' سطح دربرگیرنده ی حجم V' است. علامت پریم نشان دهنده ی وابستگی به مختصات منبع، یعنی جایی که بردار مغناطیس شدگی \vec{M} وجود دارد (ماده وجود دارد) می باشد.

از رابطه ی بالا داریم:

$$\vec{J}_m = \nabla' \times \vec{M}$$

چگالی جریان حجمی:

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}'$$

چگالی جریان سطحی:

رابطه ی (I) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\nabla' \times \vec{M}}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \left(\frac{\vec{M} \times \hat{n}'}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) ds' \quad \text{or}$$

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\vec{J}_M}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \left(\frac{\vec{J}_{ms}}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) ds'$$

وقتی می خواهیم **B** را برای توزیع مشخصی از مغناطش محاسبه نماییم می بایست ابتدا کرل **M** حساب گردد و با استفاده از آن حساب **A** شود. آنگاه برای پیدا کردن **B** می بایست مجدد کرل **A** محاسبه شود.

چون محاسبه ی شیب یک میدان نرده ای نسبت به کرل یک میدان برداری آسان تر استف راه دیگری را برای محاسبه ی **B** معرفی می کنیم. به رابطه ی زیر باز می گردیم:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dV' \xrightarrow[\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) = \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3}]{R = |\vec{X} - \vec{X}'|} \vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left[\vec{M} \times \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right] dV'$$

$$\vec{B}(\vec{X}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{X}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \left[\vec{M} \times \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right] dV' \xrightarrow[\substack{G = \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \text{ and } F = M}{\left[\nabla \times (F \times G) = (\nabla \cdot G)F - (\nabla \cdot F)G + (G \cdot \nabla)F - (F \cdot \nabla)G \right]}{}}{}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \times \left(\vec{M} \times \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right) &= \left(\nabla \cdot \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right) \vec{M} - (\nabla \cdot \vec{M}) \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \\ &\quad + \left(\frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \cdot \nabla \right) \vec{M} - (\vec{M} \cdot \nabla) \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \\ \xrightarrow[\substack{\nabla \cdot \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right)}{\nabla \cdot \vec{M}(x', y', z') = 0}]{\nabla \times \left(\vec{M} \times \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right)} &= \vec{M} \nabla \cdot \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} - (\vec{M} \cdot \nabla) \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{X}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \underbrace{\vec{M} \nabla \cdot \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3}}_{\vec{B}_1(\vec{X})} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \underbrace{(\vec{M} \cdot \nabla) \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3}}_{\vec{B}_2(\vec{X})} dV' \quad (P)$$

$$\vec{B}_1(\vec{X}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{M} \nabla \cdot \left[\frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right] dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{M}(\vec{X}') 4\pi \delta(\vec{X} - \vec{X}') dV' = \mu_0 \mathbf{M}(\vec{X}) \quad (*)$$

$$\vec{B}_2(\vec{X}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} (\mathbf{M} \cdot \nabla) \left[\frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right] dV'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\left[\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) \right]}{\mathbf{G} = \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \text{ and } \mathbf{F} = \mathbf{M}} \rightarrow \\ \nabla \left(\mathbf{M} \cdot \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right) = (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} + \mathbf{M} \times \left(\nabla \times \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right) + \left(\frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \cdot \nabla \right) \mathbf{M} + \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \times (\nabla \times \mathbf{M}) \\ \frac{\mathbf{M}(x', y', z')=0}{\nabla \times \mathbf{M} = \nabla \mathbf{M} = 0} \rightarrow \nabla \left(\mathbf{M} \cdot \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right) = (\mathbf{M} \cdot \nabla) \left[\frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right] + \mathbf{M} \times \left(\nabla \times \frac{(\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \nabla \left(\mathbf{M} \cdot \frac{(\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}')}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|^3} \right) = (\mathbf{M} \cdot \nabla) \left[\frac{(\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}')}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|^3} \right] + \mathbf{M} \times \left(\nabla \times \frac{(\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}')}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|^3} \right) = (\mathbf{M} \cdot \nabla) \left[\frac{(\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}')}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|^3} \right] + \mathbf{M} \times \underbrace{\left(-\nabla \times \left\{ \nabla \frac{1}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|} \right\} \right)}_{=0} \right\}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{B}}_2(\vec{\mathbf{X}}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} (\mathbf{M} \cdot \nabla) \left[\frac{(\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}')}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|^3} \right] dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \left(\mathbf{M}(\vec{\mathbf{X}}') \cdot \frac{(\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}')}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|^3} \right) dV'$$

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{B}}_2(\vec{\mathbf{X}}) = -\mu_0 \nabla \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\mathbf{M}(\vec{\mathbf{X}}') \cdot \frac{(\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}')}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|^3} \right) dV' \Rightarrow \begin{cases} \vec{\mathbf{B}}_2(\vec{\mathbf{X}}) = -\mu_0 \nabla V_m \\ V_m = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\mathbf{M}(\vec{\mathbf{X}}') \cdot \frac{(\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}')}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|^3} \right) dV' \end{cases} \quad (**)$$

کمیت V_m پتانسیل نرده ای مغناطیسی ناشی از ماده ی مغناطیسی می باشد. با قرار دادن (*) و (***) در (P) داریم:

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{X}}) = \vec{\mathbf{B}}_1(\vec{\mathbf{X}}) + \vec{\mathbf{B}}_2(\vec{\mathbf{X}}) = \mu_0 \mathbf{M}(\vec{\mathbf{X}}) - \mu_0 \nabla V_m \quad (\text{II})$$

پس میدان مغناطیسی ناشی از یک توزیع ماده ی مغناطیده را می توان بصورت مجموع دو جمله نوشت: شیب یک میدان نرده ای بعلاوه ی جمله ای متناسب با مغناطش موضعی. در نقطه ی خارجی (مثلاً خلا) \mathbf{M} صفر است پس تنها جمله ی وابسته به شیب یک میدان نرده ای باقی می ماند. مجدد به رابطه ی (***) باز می گردیم:

$$\mathbf{V}_m = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\mathbf{M}(\vec{\mathbf{X}}') \cdot \frac{(\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}')}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|^3} \right) dV' = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\mathbf{M}(\vec{\mathbf{X}}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|} \right) dV' \xrightarrow[\substack{f = \frac{1}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|} \text{ and } G = \mathbf{M}}]{\nabla \cdot (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{G} + f(\nabla \cdot \mathbf{G})}$$

$$\mathbf{V}_m = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\nabla' \cdot \left(\frac{1}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|} \mathbf{M}(\vec{\mathbf{X}}') \right) - \frac{1}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|} (\nabla' \cdot \mathbf{M}(\vec{\mathbf{X}}')) \right) dV' \Rightarrow$$

$$\mathbf{V}_m = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{M}(\vec{\mathbf{X}}')}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|} \right) - \frac{(\nabla' \cdot \mathbf{M}(\vec{\mathbf{X}}'))}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|} \right) dV' \Rightarrow$$

$$\mathbf{V}_m = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{M}(\vec{\mathbf{X}}')}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|} \right) \right) dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\vec{\mathbf{X}}')}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|} \right) dV' \xrightarrow{\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}$$

$$\mathbf{V}_m = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \left(\frac{\mathbf{M}(\vec{\mathbf{X}}') \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|} \right) dS' - \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\vec{\mathbf{X}}')}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}'|} \right) dV'$$

دو کمیت نرده ای زیر را تعریف می نماییم:

$$\rho_M(\vec{X}') \equiv -\nabla' \cdot \mathbf{M}(\vec{X}')$$

چگالی قطب مغناطیسی

$$\sigma_M(\vec{X}') \equiv \mathbf{M}(\vec{X}') \cdot \hat{n}$$

چگالی سطحی قدرت قطب مغناطیسی

$$\Rightarrow V_m = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\rho_M dV'}{|\vec{X} - \vec{X}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{\sigma_M dS'}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \quad \text{حال داریم:}$$

حال \mathbf{B} برابر است با $-\mu_0$ ضرب در شیب این پتانسیل نسبت به مختصات بدون پریم بعلاوه ی جمله ی $\mu_0 \mathbf{M}$.

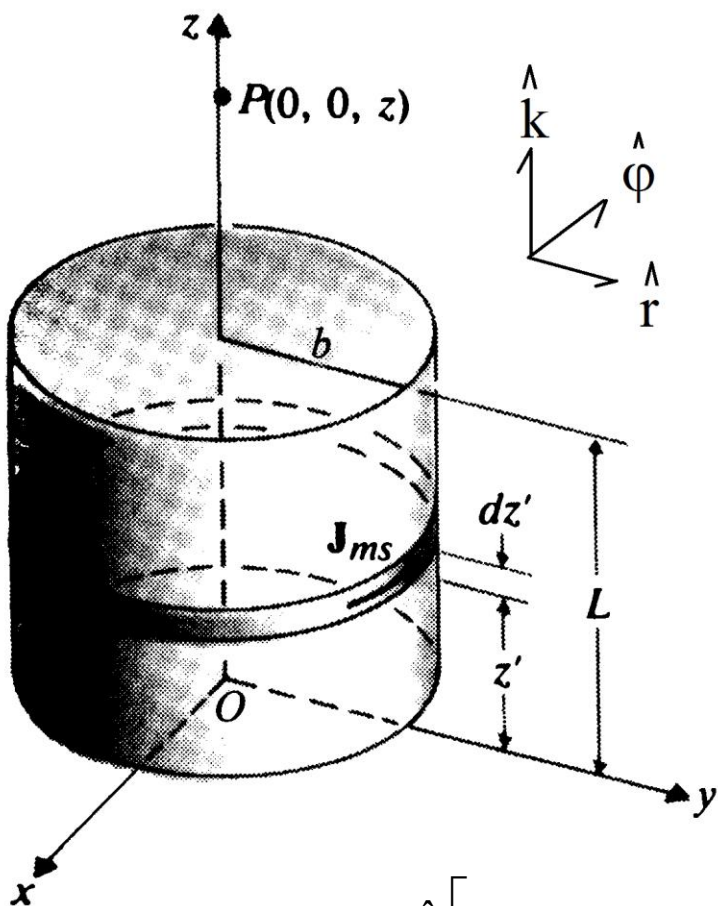
$$(II) : \vec{B}(\vec{X}) = \mu_0 \mathbf{M}(\vec{X}) - \mu_0 \nabla \left[\frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\rho_M dV'}{|\vec{X} - \vec{X}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{\sigma_M dS'}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{X}) = \mu_0 \mathbf{M}(\vec{X}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \rho_M dV' \left(\nabla \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \sigma_M dS' \left(\nabla \frac{1}{|\vec{X} - \vec{X}'|} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{X}) = \mu_0 \mathbf{M}(\vec{X}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\rho_M (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\sigma_M (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} dS'$$

این رابطه سهم جسم مغناطیده در حجم V' را در ایجاد میدان مغناطیسی در $X(x,y,z)$ نشان می دهد.

مثال : چگالی شار مغناطیسی روی محور یک استوانه مدور از یک ماده ی مغناطیسی با مغناطیس شدگی یکنواخت را تعیین نمایید. شعاع استوانه b ، طول آن L و مغناطیس شدگی محوری $\vec{M} = M_0 \hat{k}$ است.



مساله مانند یک آهنربای میله ای استوانه ای است. چون مغناطیس شدگی (\vec{M}) در داخل استوانه ثابت است پس : $\vec{J}_m = \nabla' \times \vec{M} = 0$ و چگالی جریان حجمی معادل نداریم. چگالی جریان مغناطیس شدگی سطحی روی دیواره ی جانبی برابر است با:

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}' = (M_0 \hat{k}) \times \hat{r} = M_0 \hat{\phi}$$

پس ورقه ای استوانه ای با چگالی خطی M_0 روی سطح جانبی داریم و سطح مقطع های بالا و پایین هیچ جریانی ندارند. برای محاسبه ی \vec{B} در P داریم:

$$\xrightarrow{I=J_{ms} S} \vec{B}(z_P) = \int dB = \int_0^L \frac{\mu_0 M_0 b^2 \hat{k} dz'}{2(b^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}(z_P) = \frac{\mu_0 M_0 \hat{k}}{2} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2 + b^2}} \right]$$

شدت میدان مغناطیسی:

در موردی مانند جسم مغناطیسی آهن، ممکن است از طریق الکترون های آزاد خود حامل یک جریان انتقالی باشد، در حالی که یونهای ثابت در شبکه ی بلوری اش دارای جریان های اتمی اند و این جریان ها می توانند جهت خاصی پیدا نمایند و مغناطش شدیدی را سبب گردند. بطور کلی میدان مغناطیسی را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\vec{B}(\vec{X}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J} \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} dV' + \mu_0 \mathbf{M}(\vec{X}) - \mu_0 \nabla V_m \quad (\mathbf{I}) ; \text{that : } V_m = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\rho_M dV'}{|\vec{X} - \vec{X}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{\sigma_M dS'}{|\vec{X} - \vec{X}'|}$$

حجم V' تمام نواحی حامل جریان و تمام ماده را در بر می گیرد، سطح S' نیز شامل تمام سطوح و فصل مشترک های محیط های مختلف است. چگالی جریان \mathbf{J} شامل تنها جریان های انتقالی است در حالی که اثر جریان های اتمی در بردار مغناطش \mathbf{M} و پتانسیل V_M یافت می شود.

چنانچه \mathbf{J} و \mathbf{M} در تمامی نقاط مشخص باشند از رابطه ی بالا می توان \mathbf{B} را بدست آورد. ولی در اکثر موارد \mathbf{J} مشخص است و $\mathbf{M}(x',y',z')$ به $\mathbf{B}(x',y',z')$ بستگی دارد. برای رفع مشکل بردار مغناطیسی کمکی بنام شدت مغناطیسی \mathbf{H} را معرفی می کنیم، که بصورت زیر تعریف می شود:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

با قرار دادن این تعریف در رابطه ی (I) داریم:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{X}) - \mathbf{M}(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J} \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} dV' - \nabla V_m \Rightarrow$$

$$\vec{H}(\vec{X}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J} \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} dV' - \nabla V_m \quad ; \quad \text{that : } V_m = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\rho_M dV'}{|\vec{X} - \vec{X}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{\sigma_M dS'}{|\vec{X} - \vec{X}'|}$$

هنوز \mathbf{H} از طریق ρ_M و σ_M به \mathbf{M} بستگی دارد. نشان خواهیم داد که چگونه \mathbf{H} از طریق یک معادله دیفرانسیل به چگالی جریان \mathbf{J} وابسته است.

معادلات میدان:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{and} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{قبلاً نشان دادیم که:}$$

چون دیورژانس \mathbf{B} صفر است می توان آنرا بصورت کرل تابع برداری \mathbf{A} بنویسیم یعنی: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

پس از رابطه ی اول قانون مداری آمپر بدست آمد. ولی می بایست دقت نمود که در کرل \mathbf{B} می بایست تمامی

جریان هایی که می توانند میدان مغناطیسی ایجاد نمایند را وارد نمود. پس داریم:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_m)$$

که \mathbf{J} جریان انتقالی و \mathbf{J}_m جریان مغناطش است. با ترکیب این رابطه و رابطه ی $\vec{\mathbf{J}}_m = \nabla \times \vec{\mathbf{M}}$ داریم:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M} \Rightarrow \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} \Rightarrow \nabla \times \underbrace{\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right)}_{=\mathbf{H}} = \mathbf{J} \Rightarrow \boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}}$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}}$$

and

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}$$

روابط زیر معادلات اساسی در میدان مغناطیسی اند:

صورت های دیفرانسیلی آنها بصورت زیر است. با استفاده از قضیه ی استوکس داریم:

$$\frac{\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}} \rightarrow \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow \boxed{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I}$$

این رابطه که شکل دیگری از قانون آمپر است بیان می کند که انتگرال خطی مولفه ی مماسی \mathbf{H} دور مسیر بسته ی C برابر است با جمع جبری کل جریان های انتقالی که از سطح محصور توسط منحنی C می گذرند.

با استفاده از قضیه ی دیورژانس داریم:

$$\frac{\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \rightarrow \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dv = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0$$

یعنی برای هر سطح بسته، شار مغناطیسی صفر است.

پذیرفتاری و تراوایی مغناطیسی، پسماند.

برای حل مسائل مربوط به نظریه ی مغناطیسی داشتن رابطه ی میان B و H و یا معادل آن میان M و یکی از بردارهای میدان مغناطیسی ضروری است. این روابط به ماهیت ماده ی مغناطیسی بستگی دارد و غالباً با تجربه بدست می آیند.

در بسیاری موارد یک رابطه ی تقریباً خطی میان M و H وجود دارد. اگر ماده همسانگرد (همه سو یکسان) و خطی باشد داریم:

$$M = \chi_m H$$

که کمیت نرده ای و بدون بعد χ_m را پذیرفتاری مغناطیسی (حساسیت مغناطیسی) می گوئیم. اگر χ_m مثبت باشد ماده را پارامغناطیس گوئیم و میدان مغناطیسی در اثر حضور ماده تقویت می شود. اگر χ_m منفی باشد، جسم را دیامغناطیس گوئیم و میدان مغناطیسی در اثر حضور چنین ماده ای تضعیف می شود. اگر چه پذیرفتاری مغناطیسی تابعی از دما است و برخی مواقع با تغییر دما بشدت تغییر می نماید ولی در اکثر مواقع با اطمینان می توان گفت که χ_m برای مواد پارا و دیا مغناطیس بسیار کوچک است. ($\chi_m \ll 1$)

$$\frac{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}}{M = \chi_m H} \rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \chi_m \vec{H} \Rightarrow \vec{H} + \chi_m \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \Rightarrow \vec{H} [\mu_0 (1 + \chi_m)] = \vec{B}$$

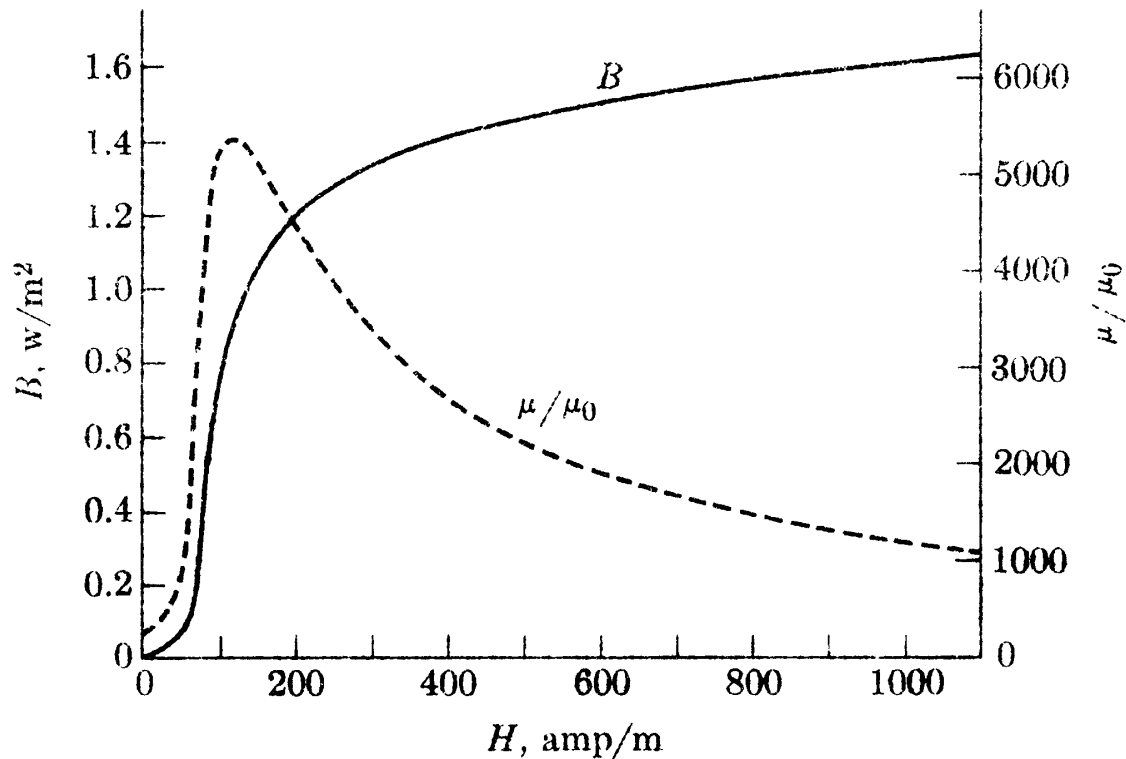
$$\Rightarrow \vec{H} [\mu_0 (1 + \chi_m)] = \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} \mu \vec{H} = \vec{B} \\ \mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \\ \mu_r \text{ or } K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \end{cases}$$

که در آن μ را ضریب تراوایی مغناطیسی و کمیت K_m را تراوایی نسبی می نامند.

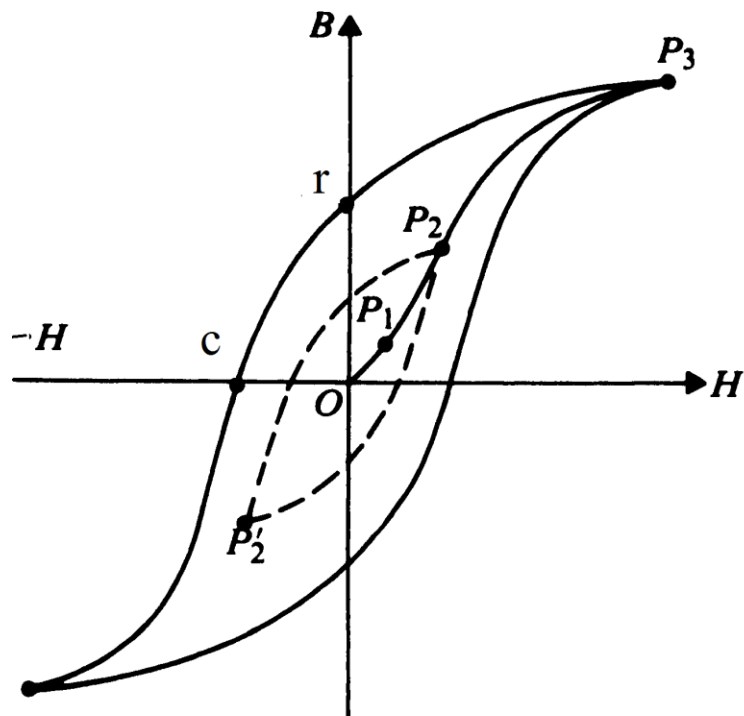
رده ی دیگری از مواد مغناطیسی وجود دارند که به آنها فرو مغناطیس ها می گویند. وجه مشخصه ی این مواد آنست که می توانند مغناطش دائمی داشته باشند. مواد فرو مغناطیس خطی نیستند و روابط $M = \chi_m H$ و $\mu \vec{H} = \vec{B}$ در موردشان صدق نمی کند.

بهترین عملکرد برای مسائل مربوط به فرو مغناطیس ها آن است که نمودار $B-H$ را برای آنها بررسی نماییم و تقریب های مناسبی را برای مساله در ناحیه ی مشخصی از این نمودار بکار ببریم.

ابتدا از ماده ی فرومغناطیس نامغناطیده شروع می کنیم. اگر شدت میدان مغناطیسی که در ابتدا صفر است بطور یکنوا افزایش داده شود، منحنی حاصل از رسم $B-H$ بشکل زیر در می آید.



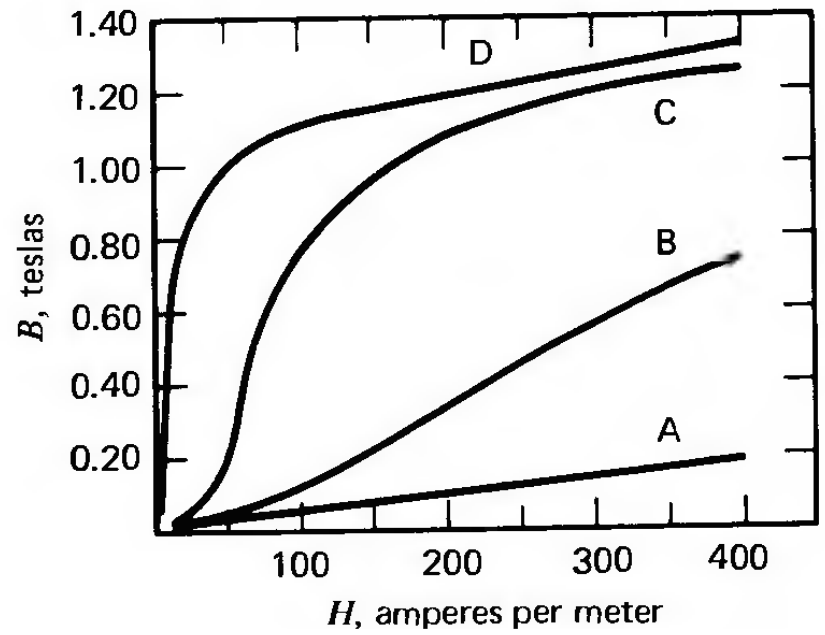
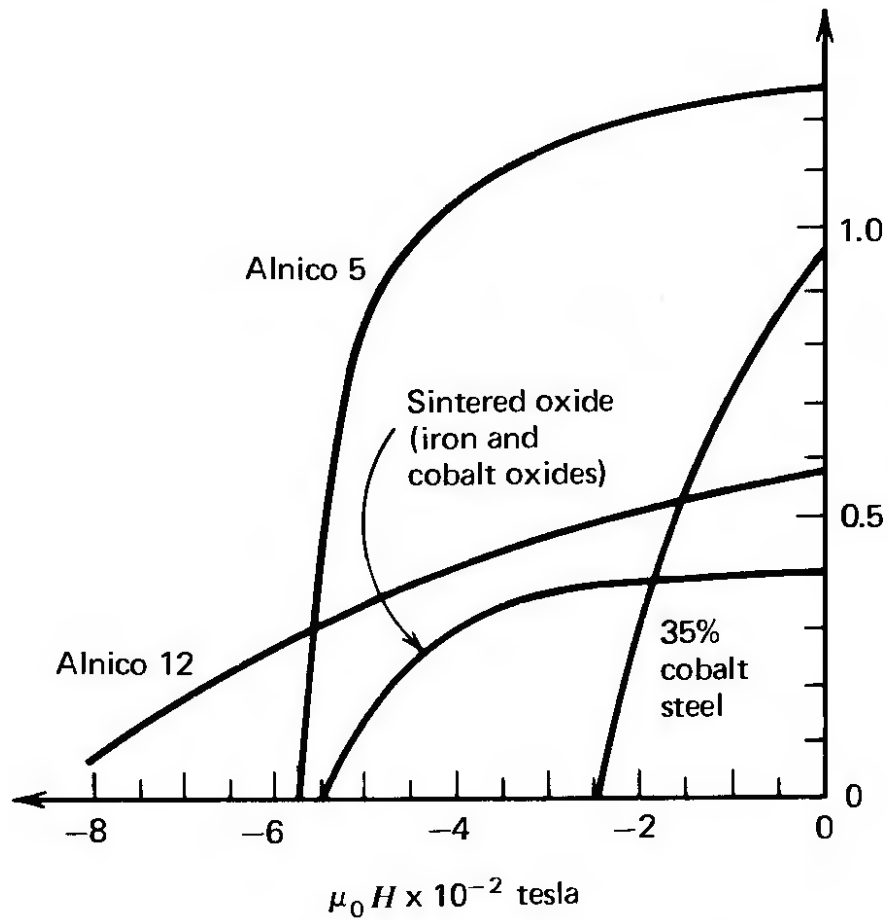
این منحنی را منحنی مغناطش ماده می نامند. می توان با $\mu = \frac{\vec{B}}{\vec{H}}$ ، تراوایی را بدست آورد. بیشترین مقدار تراوایی در زانوی منحنی رخ می دهد و علت وجود زانو آنست که مغناطش \vec{M} در ماده به بیشینه می رسد و برای مقادیر بسیار زیاد H ، افزایش میدان مغناطیسی $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$ بدلیل وجود عبارت $\mu_0 \vec{H}$ ادامه می یابد. حال ماده ی فرو مغناطیسی که بروش بالا مغناطیسی شده است را در نظر می گیریم. اگر شدت میدان H را کاهش دهیم منحنی $B-H$ از روی همان منحنی قبلی باز نمی گردد و منحنی جدیدی را تشکیل می دهد تا به I برسد. یعنی مغناطش پس از برقرار شدن دیگر با حذف H از بین نمی رود.



در واقع بایستی یک شدت مغناطیسی معکوس بکار گرفته شود تا مغناطش به صفر برسد. اگر H کاهش یابد منحنی به پایین ترین بخش می رسد. با افزایش مجدد H منحنی دیگری شکل می گیرد. این پدیده را پسمان گویند که به معنی عقب ماندن است و نشان می دهد که مغناطش از میدان محرک خود عقب تر است. منحنی شکل را منحنی پسماند (منحنی هیستریزیس) گویند.

مقدار B را در r ، پسمانده یا باقیماندگی می نامند. اندازه H در C به نیروی وادارندگی و یا وادارندگی مغناطیسی ماده موسوم است. شکل حلقه ی پسماند نه تنها به ماهیت ماده ی فرو مغناطیس بستگی دارد، بلکه به مقدار بیشینه ی H که بر ماده وارد می شود نیز بستگی دارد. پس در مواد فرومغناطیس χ_m مثبت و بسیار بزرگ است. بعلاوه $K_m \gg 1$.

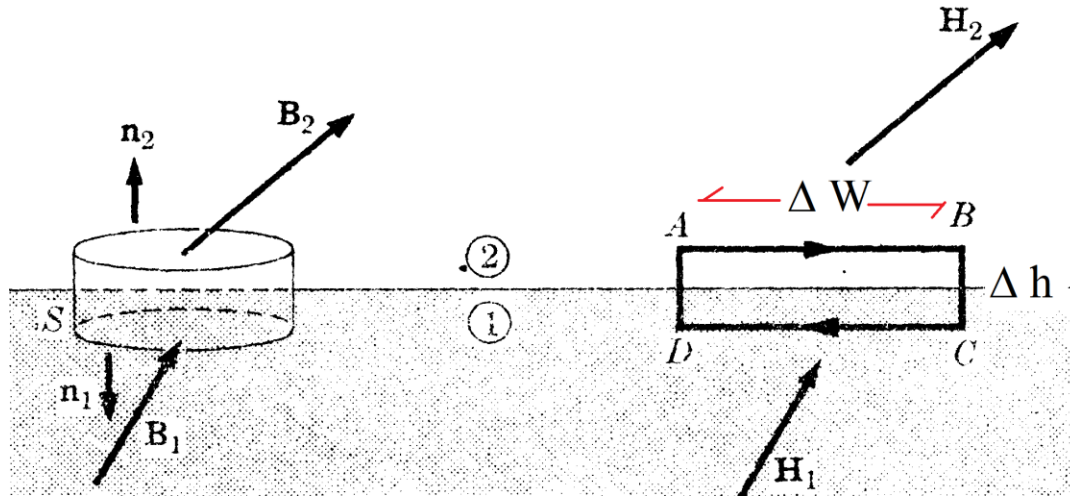
مواد فرو مغناطیس را به دو منظور بکار می برند: (۱) افزایش شار مغناطیسی یک مدار جریان، (۲) بعنوان منابع میدان مغناطیسی (آهنربای دائم).



- A: Cast iron
- B: Cast steel
- C: Silicon steel
- D: Nickel-iron alloy

شرایط مرزی برای بردارهای میدان مغناطیسی

پیش از حل مسائل میدان مغناطیسی می بایست بدانیم که \mathbf{H} و \mathbf{B} در عبور از فصل مشترک دو محیط چگونه تغییر می نمایند.



$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0 \rightarrow \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \Delta S + \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \Delta S = 0 \xrightarrow{\hat{\mathbf{n}}_2 = -\hat{\mathbf{n}}_1} (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = 0 \Rightarrow \boxed{B_{2n} = B_{1n}}$$

$$\xrightarrow[\Delta h \rightarrow 0]{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = I} \oint_{ABCD} \mathbf{H} \cdot d\ell = H_2 \Delta W + H_1 (-\Delta W) = J_{Sn} \Delta W \Rightarrow H_{2t} - H_{1t} = J_{Sn}$$

که در آن J_{Sn} چگالی جریان سطحی روی فصل مشترک، عمود بر مسیر C است. (جریان انتقالی در واحد طول در لایه ی سطحی). پس مولفه ی مماسی شدت میدان مغناطیسی در عبور از فصل مشترک پیوسته است، مگر آنکه یک جریان واقعی سطحی موجود باشد.

اگر رابطه ی $\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{J}_{Sn}$ را در $\hat{\mathbf{n}}_2$ ضرب برداری نماییم داریم:

$$\hat{\mathbf{n}}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}$$

رد اینجا می خواهیم روش حل رده ی خاصی از مسائل را انجام دهیم، یعنی محاسبه ی میدان های مغناطیسی بدون جریان انتقالی. وقتی \mathbf{J} صفر باشد داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{and} \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0$$

پس می توان \mathbf{H} را بصورت شیب یک میدان نرده ای نوشت. یعنی: $\mathbf{H} = -\nabla V_m$

که V_m پتانسیل نرده ای ناشی از تمامی چشمه های میدان مغناطیسی است.

دو نوع ماده ی مغناطیسی موجود است که در آنها محاسبه ی میدان به حل مساله ی مقادیر مرزی تبدیل می شود:

(۱) ماده ی مغناطیسی خطی و یا تقریباً خطی که در آن $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ است و (۲) یک قطعه از یک ماده که بطور

یکنواخت مغناطیده شده است و در آن $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ است. هر دو حالت معادله ی $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0$ به

$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ تبدیل می شود. حال داریم:

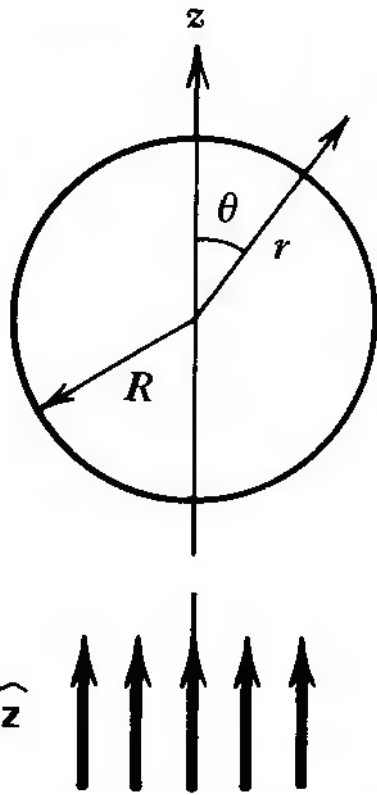
$$\frac{\mathbf{H} = -\nabla V_m}{\nabla \cdot \mathbf{H} = 0} \rightarrow \boxed{\nabla^2 V_m = 0}$$

که همان معادله ی لاپلاس است. پس مساله تبدیل می شود به حل معادله ی لاپلاسی که در شرایط مرزی صدق

نماید. آنگاه \mathbf{H} را می توان با محاسبه ی شیب پتانسیل مغناطیسی محاسبه نمود و \mathbf{B} نیز با رابطه ی $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ و یا

$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ (بسته به آنکه کدام مناسب است) بدست می آید.

مثال: کره ای از یک ماده ی مغناطیسی خطی به شعاع a و تراوایی μ داریم. این کره در ناحیه ای از فضا قرار دارد که حاوی یک میدان مغناطیسی یکنواخت آغازین \mathbf{B}_0 است. می خواهیم بدانیم چگونه میدان مغناطیسی در اثر وجود کره در بیرون کره تغییر می کند و مقدار میدان مغناطیسی را در کره بدست آوریم.



$$\nabla^2 V_m = 0 \Rightarrow V_m(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + C_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_m(r, \theta) = \begin{cases} A_0 + \frac{C_0}{r} + A_1 r \cos \theta + \frac{C_1}{r^2} \cos \theta & r \geq a \\ A_{00} + \frac{C_{00}}{r} + A_2 r \cos \theta + \frac{C_2}{r^2} \cos \theta & r \leq a \end{cases}$$

چون در داخل کره پتانسیل نمی تواند بینهایت باشد ($r=0$) پس $C_{00} = C_2 = 0$.
 ثابتهای A_{00} و A_0 نیز هر عددی می توانند باشند حذف می نماییم. وقتی در خارج کره هستیم و بسیار دور می شویم بدلیل \mathbf{B} اولیه پتانسیل یکنواختی موجود است پس ثابت C_0 نیز صفر است ، پس داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{1m}(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + \frac{C_1}{r^2} \cos \theta & r \geq a \quad (*) \\ V_{2m}(r, \theta) = A_2 r \cos \theta & r \leq a \quad (**) \end{cases}$$

در فواصل بسیار دور از کره شدت میدان مغناطیسی یکنواخت است $(H_o \hat{z})$ پس داریم:

$$v_{1m} = -\int H \cdot dr \Rightarrow H_o \hat{k} = -H_o r \cos \theta$$

فلذا پتانسیل مغناطیسی می شود:

$$\xrightarrow{B=\mu H} v_{1m} = -\frac{B_o}{\mu_o} r \cos \theta$$

$$A_1 = -\frac{B_o}{\mu_o} \quad \text{با توجه به رابطه ی (*) داریم که:}$$

حال در فصل مشترک دو محیط داریم:

$$\begin{cases} H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow H_{1\theta} = H_{2\theta} \\ B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow B_{1r} = B_{2r} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{1m}(r, \theta) = -\left(\frac{B_o}{\mu_o}\right) r \cos \theta + \frac{C_1}{r^2} \cos \theta \quad r \geq a \quad (*) \\ V_{2m}(r, \theta) = A_2 r \cos \theta \quad r \leq a \quad (**) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{1\theta} = H_{2\theta} \xrightarrow[\text{in } r=a]{H=-\nabla V_m} -\left(\frac{B_o}{\mu_o}\right) a \sin \theta + \frac{C_1}{a^2} \sin \theta = A_2 a \sin \theta \Rightarrow \\ -\left(\frac{B_o}{\mu_o}\right) \sin \theta + \frac{C_1}{a^3} \sin \theta = A_2 \sin \theta \quad (\text{I}) \\ B_{1r} = B_{2r} \xrightarrow[\Rightarrow B=\mu(-\nabla V_m) \text{ and } r=a]{B=\mu H \text{ and } H=-\nabla V_m} \\ -\mu_o \left[\left(-\frac{B_o}{\mu_o}\right) \cos \theta - \frac{2C_1}{a^3} \cos \theta \right] = -\mu (A_2 \cos \theta) \Rightarrow \\ \left[B_o \cos \theta + \frac{2\mu_o C_1}{a^3} \cos \theta \right] = -\mu A_2 \cos \theta \quad (\text{II}) \end{array} \right.$$

با حل همزمان معادلات (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} -\left(\frac{B_o}{\mu_o}\right) \sin \theta + \frac{C_1}{a^3} \sin \theta = A_2 \sin \theta \\ \left[B_o \cos \theta + \frac{2\mu_o C_1}{a^3} \cos \theta \right] = -\mu A_2 \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\left(\frac{B_o}{\mu_o}\right) + \frac{C_1}{a^3} = A_2 \\ \left[B_o + \frac{2\mu_o C_1}{a^3} \right] = -\mu A_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A_2 = \frac{-3B_o}{(\mu + 2\mu_o)} \quad \text{and} \quad C_1 = \frac{\left[\left(\frac{\mu}{\mu_o} - 1 \right) \right] B_o a^3}{(\mu + 2\mu_o)}$$

پس جواب پتانسیل مغناطیسی می شود:

$$\begin{cases} V_{1m}(r, \theta) = -\left(\frac{B_o}{\mu_o}\right) r \cos \theta + \frac{\left[\left(\frac{\mu}{\mu_o} - 1 \right) \right] B_o a^3}{(\mu + 2\mu_o)} \frac{\cos \theta}{r^2} & r \geq a \quad (*) \\ V_{2m}(r, \theta) = \left[\frac{-3B_o}{(\mu + 2\mu_o)} \right] r \cos \theta & r \leq a \quad (**) \end{cases}$$

حال جواب میدان مغناطیسی برای داخل و خارج کره می شود:

$$\frac{B = \mu H \quad \text{and} \quad H = -\nabla V_m}{\nabla V_m = \frac{\partial V_m}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_m}{\partial \phi} \hat{\phi}} \rightarrow \begin{cases} H = -\frac{\partial V_m}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial \theta} \hat{\theta} \\ B = \mu \left(-\frac{\partial V_m}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial \theta} \hat{\theta} \right) \end{cases}$$

(1) for $r \geq a$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\mu_o \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left(\frac{-B_o}{\mu_o} \right) r \cos \theta + \frac{\left[\left(\frac{\mu}{\mu_o} - 1 \right) \right] B_o a^3}{(\mu + 2\mu_o)} \frac{\cos \theta}{r^2} \right\} \hat{r} \\ -\mu_o \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left(\frac{-B_o}{\mu_o} \right) r \cos \theta + \frac{\left[\left(\frac{\mu}{\mu_o} - 1 \right) \right] B_o a^3}{(\mu + 2\mu_o)} \frac{\cos \theta}{r^2} \right\} \hat{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_o \hat{\mathbf{k}} + \frac{\left[\left(\frac{\mu}{\mu_o} - 1 \right) \right]}{\left(\frac{\mu}{\mu_o} + 2 \right)} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \mathbf{B}_o (2\hat{\mathbf{r}} \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta) \quad r \geq a$$

(2) for $r \leq a$

$$\mathbf{B}_2 = -\mu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left[\frac{-3\mathbf{B}_o}{(\mu + 2\mu_o)} \right] r \cos \theta \right\} \hat{\mathbf{r}} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left[\frac{-3\mathbf{B}_o}{(\mu + 2\mu_o)} \right] r \cos \theta \right\} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}_2 = \frac{3\mathbf{B}_o \hat{\mathbf{k}}}{1 + 2 \left(\frac{\mu_o}{\mu} \right)} \quad r \leq a$$

مثال: کره ای مغناطیده ی یکنواخت با بردار مغناطش \mathbf{M} ، شعاع a و تراوایی μ داریم. می خواهیم میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط این کره را وقتی هیچ میدان مغناطیسی دیگری وجود ندارد در داخل و خارج کره حساب نماییم. بردار مغناطش را در جهت محور Z ها می گیریم و مبداء مختصات را در مرکز کره می گیریم. جواب معادله ی لاپلاس را می توان بر حسب هماهنگ های منطقه ای بسط داد. پس می توان نوشت:

$$\nabla^2 V_m = 0 \Rightarrow V_m(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + C_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{1m}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) & r \geq a \\ V_{2m}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^n P_n(\cos \theta) & r \leq a \end{cases}$$

برای نقاط خارج کره عمداً توان های مثبت r از بسط کنار گذاشته شده چون در فواصل دور بزرگ می شوند. برای نقاط داخل آهنربای دائمی نیز توان های منفی r را کنار گذاشتیم، چون آنها در مبداء مختصات بینهایت می شوند.

$$\left[\begin{array}{l} V_{1m}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad r \geq a \\ V_{2m}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^n P_n(\cos \theta) \quad r \leq a \end{array} \right] \text{ and } \{H_{1\theta} = H_{2\theta} \quad \text{and} \quad B_{1r} = B_{2r} \quad \text{in} \quad r = a\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{1\theta} = H_{2\theta} \xrightarrow[\text{in } r=a]{H=-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V_m} - \left(\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} a^{-(n+1)} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \right) - \left(-\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} a^n \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \right) = 0 \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (C_{1n} a^{-(n+1)} - A_{2n} a^n) a^{-1} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) = 0 \quad \text{(I)} \\ B_{1r} = B_{2r} \xrightarrow[\Rightarrow B=\mu_0(-\nabla V_m) \text{ and } r=a]{B=\mu_0 H \text{ and } H=-\frac{\partial}{\partial r} V_m} \mu_0 \frac{\partial V_{1m}}{\partial r} + \mu_0 M \cos \theta = \mu_0 \frac{\partial V_{2m}}{\partial r} \Rightarrow \\ \mu_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_{1n} [-(n+1)] a^{-(n+2)} P_n(\cos \theta) \right] + \mu_0 M \cos \theta - \mu_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} n a^{n-1} P_n(\cos \theta) \right] = 0 \\ \xrightarrow{C_{10} = A_{20} = 0} \left[\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} [(n+1)] a^{-(n+2)} P_n(\cos \theta) \right] \\ + \left[\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} n a^{n-1} P_n(\cos \theta) \right] - \mu_0 M \cos \theta = 0 \Rightarrow \\ \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [C_{1n} (n+1) a^{-(n+2)} + A_{2n} n a^{n-1}] P_n(\cos \theta) - \mu_0 M \cos \theta = 0 \quad \text{(II)} \end{array} \right.$$

جمله ی $-\mu_0 M \cos \theta$ بدلیل ایجاد میدان توسط مغناطش دائمی کره در سطحش، وارد شده است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(I): } \sum_{n=0}^{\infty} (C_{1n} a^{-(n+1)} - A_{2n} a^n) a^{-1} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) = 0 \\ \text{(II): } \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} [C_{1n} (n+1) a^{-(n+2)} + A_{2n} n a^{n-1}] P_n(\cos \theta) - \mu_0 M \cos \theta = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{For } n=1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_{11}}{a^3} - A_{21} = 0 \\ \frac{2C_{11}}{a^3} - A_{21} - M = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{11} = \frac{Ma^3}{3} \\ A_{21} = \frac{M}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_{1m}(r, \theta) = \frac{Ma^3}{3r^2} \cos \theta \quad r \geq a \\ V_{2m}(r, \theta) = \frac{Mr}{3} \cos \theta \quad r \leq a \end{array} \right.$$

$$\frac{B = \mu_0 H \quad \text{and} \quad H = -\nabla V_m}{\nabla V_m = \frac{\partial V_m}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_m}{\partial \phi} \hat{\phi}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H = -\frac{\partial V_m}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial \theta} \hat{\theta} \\ B = \mu \left(-\frac{\partial V_m}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial \theta} \hat{\theta} \right) \end{array} \right.$$

(1) for $r \geq a$

$$\mathbf{H}_{1m} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{M a^3}{3 r^2} \cos \theta \right) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{M a^3}{3 r^2} \cos \theta \right) \hat{\theta} = \left(\frac{2M a^3}{3 r^3} \cos \theta \right) \hat{r} + \left(\frac{M a^3}{3 r^3} \sin \theta \right) \hat{\theta} \Rightarrow$$

$$\mathbf{H}_{1m} = \frac{M a^3}{3 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad r \geq a$$

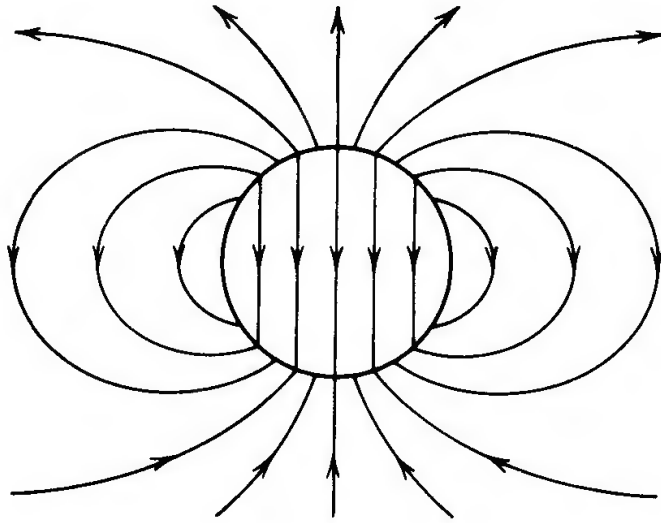
(2) for $r \leq a$

$$\mathbf{H}_{2m} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{M r}{3} \cos \theta \right) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{M r}{3} \cos \theta \right) \hat{\theta} = \left(-\frac{M}{3} \cos \theta \right) \hat{r} + \left(\frac{M}{3} \sin \theta \hat{\theta} \right) \Rightarrow$$

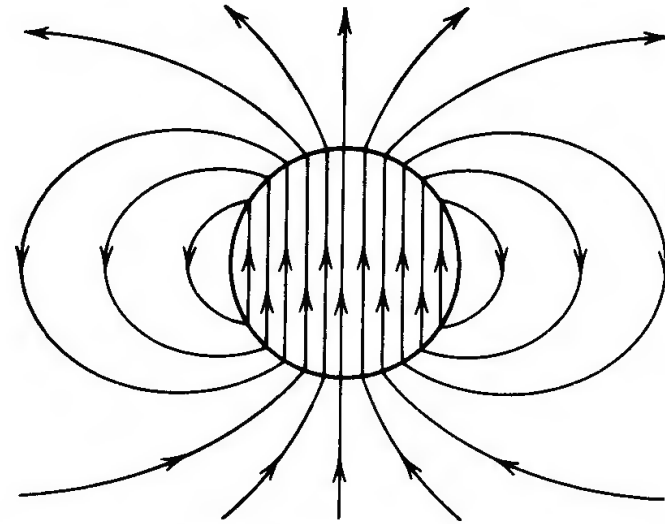
$$\mathbf{H}_{2m} = -\frac{M}{3} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) = -\frac{M}{3} \hat{k} \quad r \leq a$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_o \mathbf{H}_{1m} \Rightarrow \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o M a^3}{3 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad r \geq a$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_o \mathbf{H}_{2m} \Rightarrow \mathbf{B}_2 = \frac{2\mu_o M}{3} \hat{k} \quad r \leq a$$



H



B

مدارهای مغناطیسی:

تحلیل مدارهای مغناطیسی بر اساس دو معادله ی اساسی مغناطیس انجام می شود.

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}} \quad \text{and} \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}$$

با استفاده از قضیه ی استوکس و دیورژانس شکل دیفرانسیلی آنها را بدست آوردیم.

با استفاده از قضیه ی استوکس و معادله ی اول داشتیم:

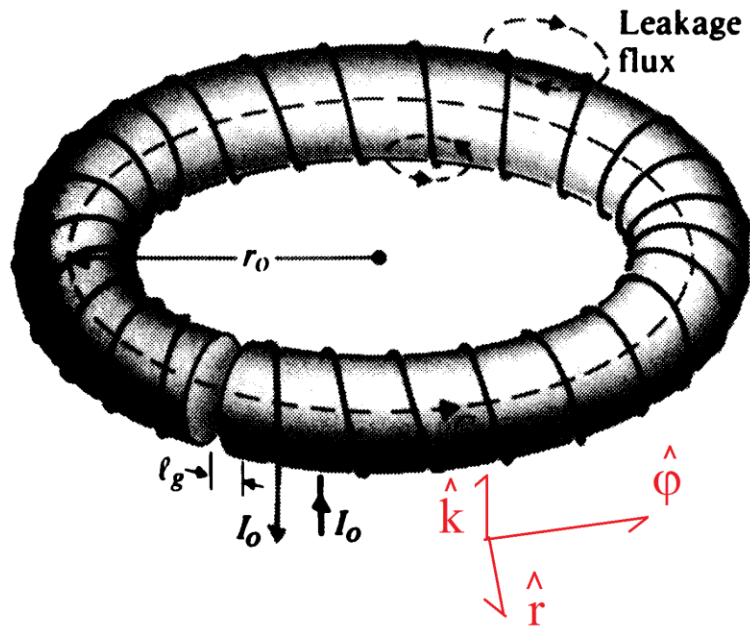
$$\frac{\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}} \rightarrow \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow \boxed{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I}$$

این رابطه که شکل دیگری از قانون آمپر است بیان می کند که انتگرال خطی مولفه ی مماسی \mathbf{H} دور مسیر بسته ی C برابر است با جمع جبری کل جریان های انتقالی که از سطح محصور توسط منحنی C می گذرند. می توان نوشت:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI = v_m$$

که در اینجا $NI = v_m$ نیروی محرکه ی مغناطیسی (mmf : Magnetomotive force) نامیده می شود.

مثال: فرض کنید N دور سیم بدور یک هسته ی چنبره ای از ماده ای فرو مغناطیس با نفوذ پذیری μ پیچیده شده است. هسته دارای شعاع متوسط r_0 ، سطح مقطع دایره ای با شعاع a ($a \ll r_0$) و شکاف هوایی باریکی به ضخامت l_g است. جریان دائمی I_0 از سیم می گذرد. مطلوبست محاسبه ی (الف) چگالی شار مغناطیسی (B_f) در هسته ی فرو مغناطیس، (ب) شدت میدان مغناطیسی (H_f) در هسته و (پ) شدت میدان مغناطیسی (H_g) در شکاف هوایی.



با اعمال قانون مداری آمپر حول مسیر دایره ای (C) داریم:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI_0 \quad (6-85)$$

از شار نشتی و اثرات لبه ای صرف نظر می کنیم پس چگالی شار مغناطیسی (B) در هسته و شکاف برابر است. اما بدلیل μ های متفاوت، شدت میدان مغناطیسی در شکاف

$$B_f = B_g = B_f \hat{\phi} \quad (6-86)$$

و هسته متفاوت است. داریم:

که زیر نویس های f و g برای فرو مغناطیس و شکاف

$$H_f = \frac{B_f}{\mu} \hat{\phi} \quad (6-87)$$

هستند. در هسته داریم:

$$H_g = \frac{B_g}{\mu_0} \hat{\phi} \quad (6-88)$$

و در فاصله ی هوایی داریم:

با قرار دادن (۸۷-۶) و (۸۸-۶) در (۸۵-۶) داریم:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI_0 \xrightarrow[\begin{matrix} H_f = \frac{B_f}{\mu} \hat{\phi} \\ H_g = \frac{B_g}{\mu_0} \hat{\phi} \end{matrix}]{(2\pi r_0 - l_g)} \int_0^{(2\pi r_0 - l_g)} \frac{B_f}{\mu} \hat{\phi} \cdot d\ell \hat{\phi} + \int_0^{l_g} \frac{B_g}{\mu_0} \hat{\phi} \cdot d\ell \hat{\phi} = NI_0 \Rightarrow$$

$$\frac{B_f}{\mu} (2\pi r_0 - l_g) + \frac{B_g}{\mu_0} (l_g) = NI_0 \xrightarrow{B_f = B_g = B_f \hat{\phi}} B_f = \hat{\phi} \frac{\mu \mu_0 NI_0}{\mu_0 (2\pi r_0 - l_g) + \mu (l_g)} \quad (6-89)$$

(ب) با قرار دادن (۸۹-۶) در (۸۷-۶) داریم:

$$\frac{B_f = \hat{\phi} \frac{\mu \mu_0 NI_0}{\mu_0 (2\pi r_0 - l_g) + \mu (l_g)}}{H_f = \frac{B_f}{\mu} \hat{\phi}} \rightarrow H_f = \hat{\phi} \frac{\mu_0 NI_0}{\mu_0 (2\pi r_0 - l_g) + \mu (l_g)} \quad (6-90)$$

(پ) با قرار دادن (۸۹-۶) در (۸۸-۶) داریم:

$$\frac{B_f = \hat{\phi} \frac{\mu \mu_0 NI_0}{\mu_0 (2\pi r_0 - l_g) + \mu (l_g)}}{H_g = \frac{B_g}{\mu_0} \hat{\phi}} \rightarrow H_f = \hat{\phi} \frac{\mu NI_0}{\mu_0 (2\pi r_0 - l_g) + \mu (l_g)} \quad (6-91)$$

چون $\frac{H_g}{H_f} = \frac{\mu}{\mu_0}$ ، شدت میدان مغناطیسی در شکاف هوایی بسیار قوی تر از هسته ی فرو مغناطیس است.

اگر شعاع سطح مقطع هسته بسیار کوچک تر از متوسط شعاع چنبره باشد، چگالی شار مغناطیسی در هسته تقریباً ثابت است و می شود: $\Phi = B S$ ، که در آن S سطح مقطع هسته است. داریم:

$$\frac{B_f = \hat{\phi} \frac{\mu \mu_0 N I_0}{\mu_0 (2\pi r_o - l_g) + \mu (l_g)}}{\Phi = B_f S} \rightarrow \Phi = \frac{\mu \mu_0 N I_0 S}{\mu_0 (2\pi r_o - l_g) + \mu (l_g)} \Rightarrow \Phi = \frac{N I_0}{\frac{(2\pi r_o - l_g)}{\mu S} + \frac{(l_g)}{\mu_0 S}} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \frac{V_m}{\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_g} \quad (6-94) \\ \mathcal{R}_f = \frac{(2\pi r_o - l_g)}{\mu S} = \frac{l_f}{\mu S} \\ \mathcal{R}_g = \frac{(l_g)}{\mu_0 S} \end{array} \right.$$

در آن $(2\pi r_o - l_g) = l_f$ طول هسته ی فرو مغناطیس است.

\mathcal{R}_f را رلوکتانس هسته ی فرو مغناطیس و \mathcal{R}_g را رلوکتانس

شکاف هوایی می نامند.

معادله ی (6-94) مشابه انست که دو مقاومت سری در

مدار ساده ی اهمی قرار دارند

Magnetic Circuits	Electric Circuits
mmf, $\mathcal{V}_m (= NI)$	emf, \mathcal{V}
magnetic flux, Φ	electric current, I
reluctance, \mathcal{R}	resistance, R
permeability, μ	conductivity, σ

حال برای حل معادلات مداری مشابه با قوانین کیرشهف می توانیم در مورد هر مسیر بسته در یک مدار مغناطیسی

بنویسیم:

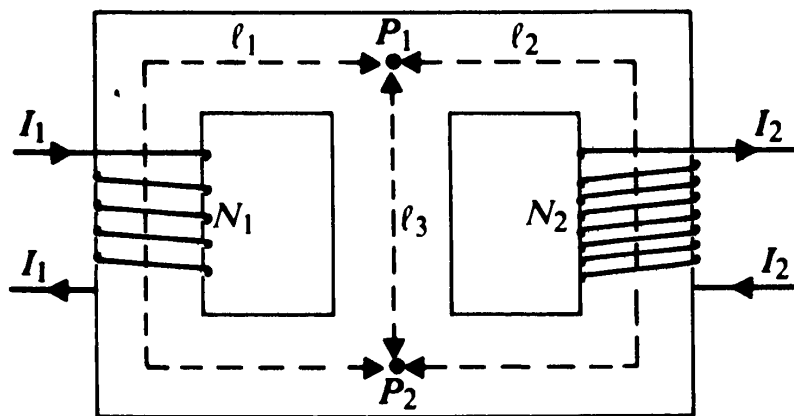
$$\sum_{j=1}^n N_j I_j = \sum_{k=1}^n \mathcal{R}_k \Phi_k \quad (6-101)$$

و نیز مشابه قانون گره ها می توان برای جمع جبری شارهای مغناطیسی خارج شونده از یک گره در هر مدار مغناطیسی

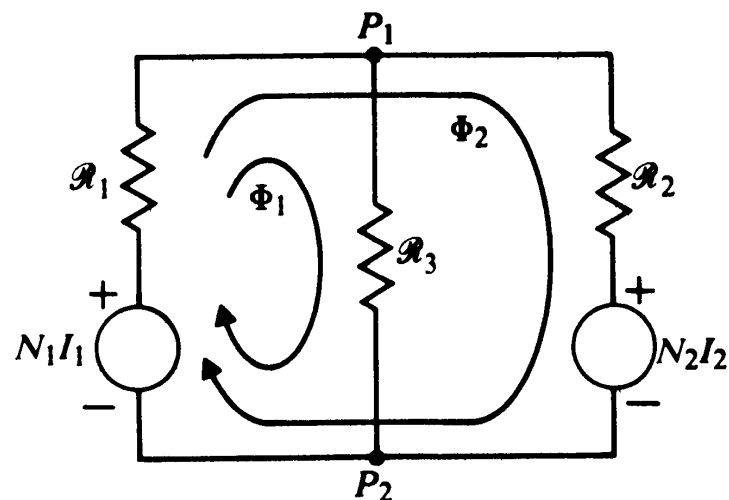
نوشت که عبارت است از:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = 0 \quad (6-102)$$

مثال: مدار شکل را در نظر بگیرید که جریان های دائم I_1 و I_2 از سیم پیچ های N_1 و N_2 ، روی دو بازوی خارجی هسته ی فرو مغناطیس میگذرند. هسته دارای سطح مقطع عرضی S_c و نفوذپذیری μ است. شار مغناطیسی را در بازوی وسطی تعیین کنید.

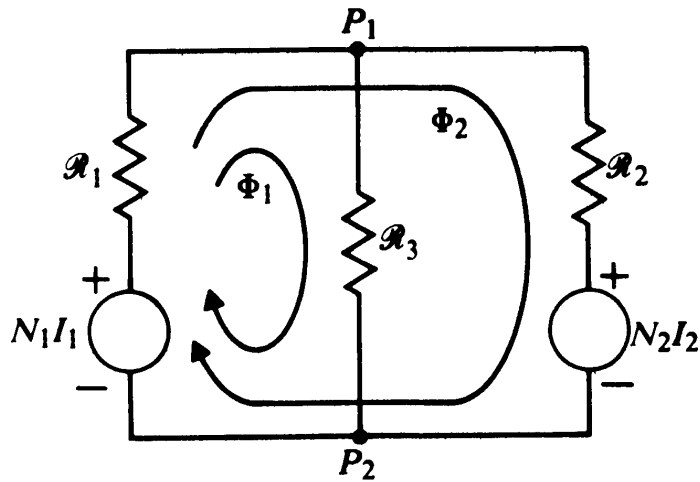


(a) Magnetic core with current-carrying windings.



(b) Magnetic circuit for loop analysis.

مدار معادل سمت راست را برای حل در نظر می گیریم. این مدار دو حلقه برای Φ ها دارد. مناسب است دو حلقه را بصورتی بگیریم تا تنها یک Φ از بازوی وسطی بگذرد. داریم:



$$\mathcal{R}_1 = \frac{\ell_1}{\mu S_c}, \quad (6-103a)$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{\ell_2}{\mu S_c}, \quad (6-103b)$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{\ell_3}{\mu S_c}. \quad (6-103c)$$

The two loop equations are, from Eq. (6-101),

$$\text{Loop 1:} \quad N_1 I_1 = (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3) \Phi_1 + \mathcal{R}_1 \Phi_2; \quad (6-104)$$

$$\text{Loop 2:} \quad N_1 I_1 - N_2 I_2 = \mathcal{R}_1 \Phi_1 + (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) \Phi_2. \quad (6-105)$$

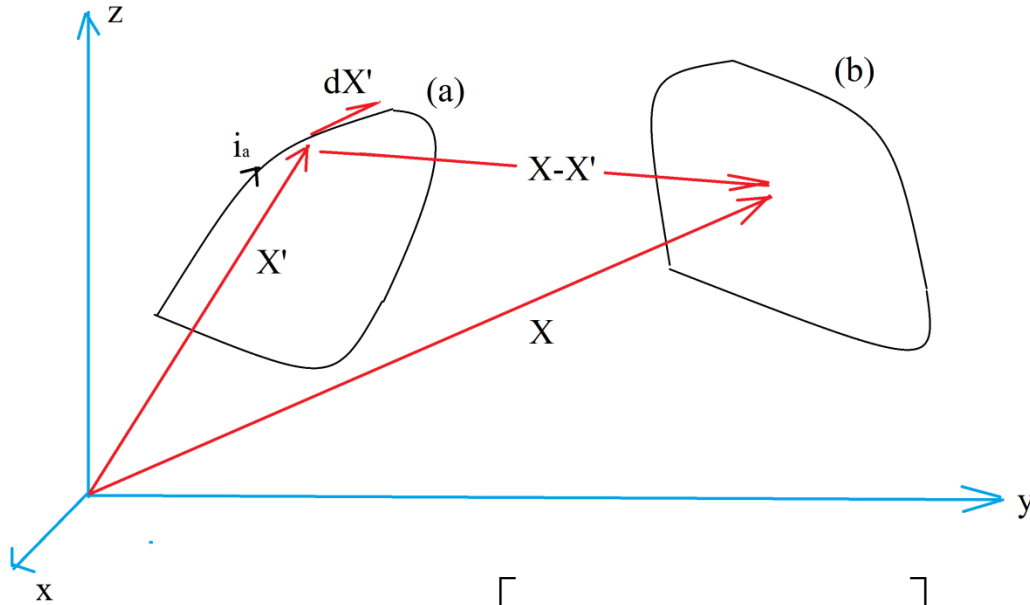
Solving these simultaneous equations, we obtain

$$\Phi_1 = \frac{\mathcal{R}_2 N_1 I_1 + \mathcal{R}_1 N_2 I_2}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3}, \quad (6-106)$$

which is the desired answer. ■

القائیدگی - القاء متقابل - خودالقاء

فرض کنید مطابق شکل دو حلقه در فضا داریم که حلقه‌ی (a) دارای جریان i_a است. میدان مغناطیسی حاصل از حلقه‌ی a در مکان حلقه‌ی b توسط قانون بیوساوار محاسبه می‌شود و جواب خواهد شد:



$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 i_a}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3}$$

این میدان در حلقه‌ی b شار مغناطیسی ایجاد می‌نماید و مقدارش عبارت است از:

$$\varphi_{ab} = \int \vec{B}_a \cdot d\vec{S}_b \Rightarrow \varphi_{ab} = \int \left[\frac{\mu_0 i_a}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right] \cdot d\vec{S}_b \Rightarrow \varphi_{ab} = i_a \underbrace{\int \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right] \cdot d\vec{S}_b}_{=M_{ab}}$$

که در آن M_{ab} ضریب القای متقابل (اندوکتانس متقابل) بین a و b می‌باشد.

$$\boxed{\varphi_{ab} = M_{ab} i_a \quad \text{or} \quad d\varphi_{ab} = M_{ab} di_a} \quad \text{بنابر این داریم:}$$

اگر بر عکس حساب می شد، یعنی حلقه ی **b** جریان i_b داشت و می خواستیم شار ناشی از آن را در مکان حلقه ی **a** حساب نماییم، داشتیم:

$$\varphi_{ba} = \int \vec{B}_b \cdot d\vec{S}_a \Rightarrow \varphi_{ba} = \int \left[\frac{\mu_0 i_b}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right] \cdot d\vec{S}_a \Rightarrow$$

$$\varphi_{ba} = i_b \int \underbrace{\left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right]}_{=M_{ba}} \cdot d\vec{S}_a$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{ba} = M_{ba} i_b \quad \text{or} \quad d\varphi_{ba} = M_{ba} di_b}$$

که در آن M_{ba} ضریب القای متقابل (اندوکتانس متقابل) بین **a** و **b** می باشد.

همواره داریم:

$$M_{ab} = M_{ba} = M$$

ضرب خود القا:

فرض نمایید حلقه ای با جریان i_a داریم، بردارهای میدان مغناطیسی حاصل از حلقه مجدداً به خود حلقه باز می گردد

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 i_a}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3}$$

بنابراین میدان مغناطیسی حاصل از حلقه در مکان خودش می شود:

حال شار ناشی از میدان مغناطیسی حلقه و عبوری از سطح خود حلقه

می شود:

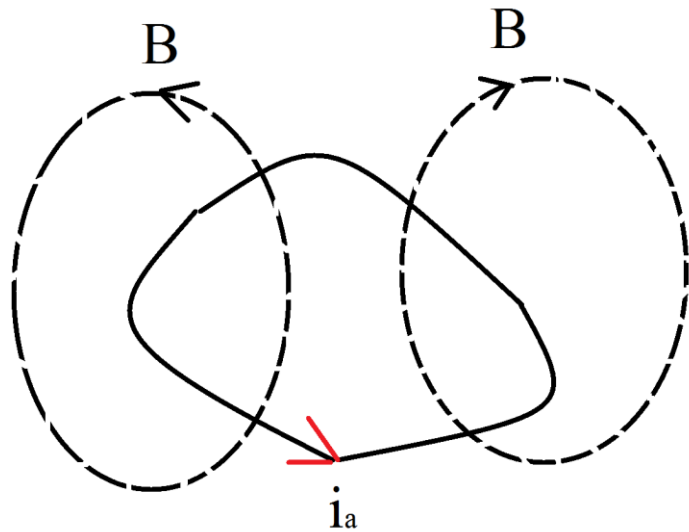
$$\phi_{aa} = \int \vec{B}_a \cdot d\vec{S}_a \Rightarrow$$

$$\phi_{aa} = \int \left[\frac{\mu_0 i_a}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right] \cdot d\vec{S}_a \Rightarrow$$

$$\phi_{aa} = i_a \underbrace{\int \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{X}' \times (\vec{X} - \vec{X}')}{|\vec{X} - \vec{X}'|^3} \right] \cdot d\vec{S}_a}_{=L_a} \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi_{aa} = L_a i_a \quad \text{or} \quad d\phi_{aa} = L_a di_a}$$

که در آن L_a را ضریب خود القای (اندوکتانس خودی) حلقه ی a می نامند.



مثال : حلقه ی به شعاع a دارای n_a دور سیم پیچ حامل جریان i_a است. این حلقه بطور افقی روی سطح زمین قرار دارد. حلقه ای دیگر با شعاع b ($b < a$) دارای n_b دور سیم پیچ است و در فاصله ی L از سطح حلقه ی a قرار دارد، بنحوی که سطوح دو حلقه موازی اند. مطلوبست محاسبه ی ضریب القای متقابل بین دو حلقه و ضریب خود القای حلقه ی a . قبلاً محاسبه شده که میدان حاصل از حلقه ی به شعاع a در فاصله ی L از مرکزش می شود:

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a a^2}{2(a^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{\text{with } n_a} B_a = \frac{\mu_0 i_a n_a a^2}{2(a^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (*)$$

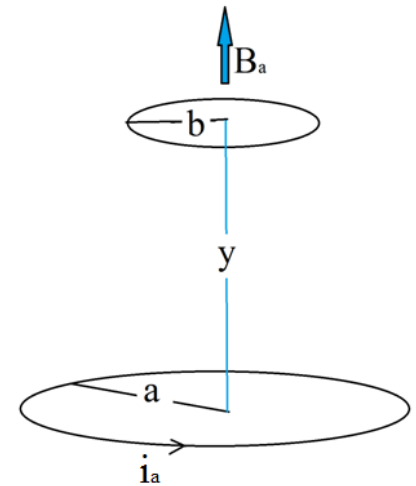
حال داریم:

$$\Phi_{ab} = \vec{B}_a \cdot \vec{S}_b = B_a S_b \xrightarrow{(*)} \Phi_{ab} = \frac{\mu_0 i_a n_a a^2}{2(a^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} (\pi n_b b^2) \xrightarrow{\Phi_{ab} = M_{ab} i_a}$$

$$M_{ab} = \frac{\mu_0 \pi n_a n_b a^2 b^2}{2(a^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{and}$$

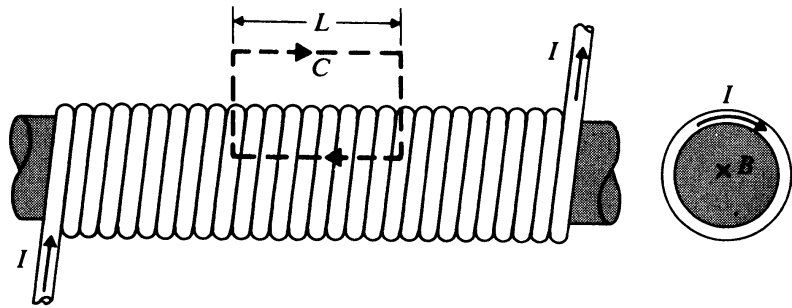
$$\Phi_{aa} = \vec{B}_a \cdot \vec{S}_a = B_a S_a \longrightarrow \left(B_a = \frac{\mu_0 i_a n_a a^2}{2(a^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{\text{if } L=0} B_a = \frac{\mu_0 i_a n_a a^2}{2(a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 i_a n_a}{2a} \right) \longrightarrow$$

$$\Phi_{aa} = \frac{\mu_0 i_a n_a}{2a} (\pi n_a a^2) \xrightarrow{\Phi_{aa} = L_a i_a} L_a = \frac{\mu_0 \pi i_a n_a^2 a}{2}$$

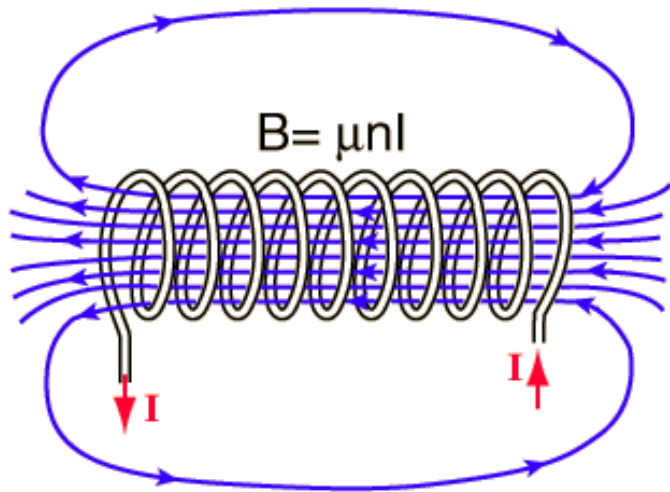


مثال: سیم لوله‌ای (سلفی) به طول L_1 ، دارای N_1 دور سیم در طول سیم لوله حاوی جریان I است. شعاع سطح مقطع سیم لوله r_1 می‌باشد. مطلوبست محاسبه‌ی (الف) ضریب خودالقای سیم لوله. (ب) اگر سیم لوله‌ای دیگر با شعاع سطح مقطع r_2 ($r_2 < r_1$) و تعداد N_2 دور در طول L_2 ، در داخل این سلف قرار گیرد نحوی که دو سلف هم محور باشند مطلوبست محاسبه‌ی ضریب القاء متقابل دو سلف چقدر است؟

(الف) داشتیم:



$$B_1 = \mu_0 n_a I = \mu_0 \frac{N_1}{L_1} I$$



$$\Phi_{11} = \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_1 = B_1 S_1 \xrightarrow{B_1 = \mu_0 n_a I = \mu_0 \frac{N_1}{L_1} I} \rightarrow$$

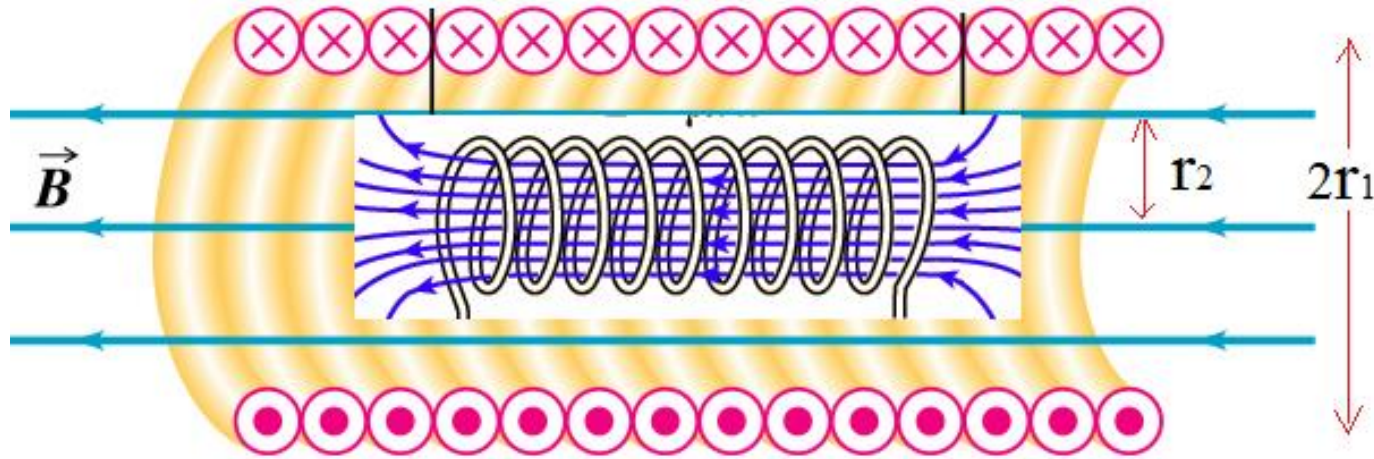
$$\Phi_{11} = \mu_0 \frac{N_1}{L_1} I \left[(\pi r_1^2) N_1 \right] = \frac{\mu_0 \pi r_1^2 N_1^2}{L_1} I$$

$$\xrightarrow{\Phi_{11} = L_1 I} L_1 = \frac{\mu_0 \pi r_1^2 N_1^2}{L_1}$$

(ب) داریم:

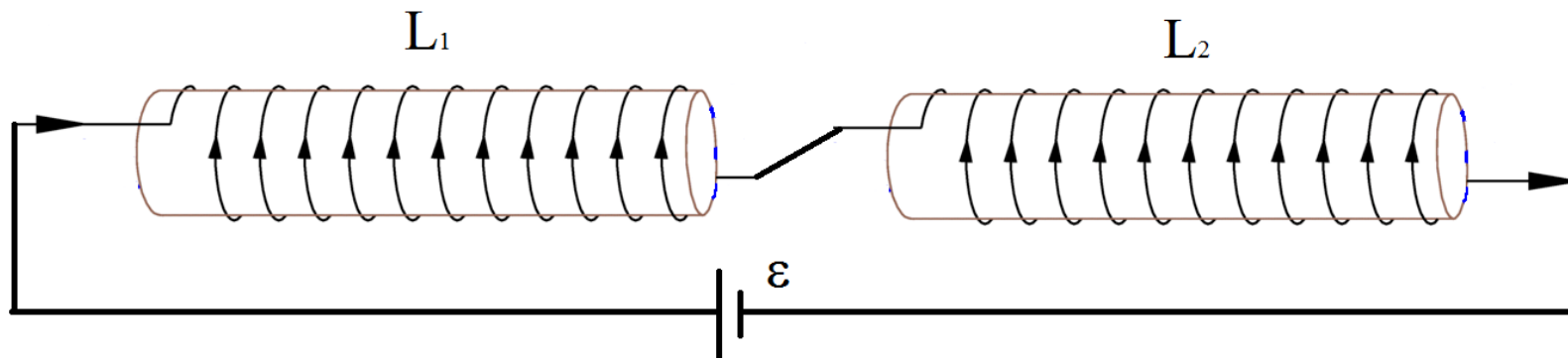
$$B_1 = \mu_0 n_a I = \mu_0 \frac{N_1}{L_1} I$$

حال اگر این B از سلونوئید دوم عبور نماید داریم:



$$\Phi_{12} = \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 = B_1 S_2 \xrightarrow{B_1 = \mu_0 n_a I = \mu_0 \frac{N_1}{L_1} I} \Phi_{12} = \mu_0 \frac{N_1}{L_1} I \left[(\pi r_2^2) N_2 \right] = \frac{\mu_0 \pi r_2^2 N_1 N_2}{L_1} I$$
$$\xrightarrow{\Phi_{12} = M_{12} I} M_{12} = \frac{\mu_0 \pi r_2^2 N_1 N_2}{L_1}$$

مثال: در شکل زیر مطلوبست محاسبه ی ضریب خودالقای (اندوکتانس خودی) سلف هم ارز.



$$\Phi_{11} = L_1 i_1 \xrightarrow{(\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt})} \varepsilon_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} \quad \text{and} \quad \Phi_{12} = M_{12} i_1 \xrightarrow{(\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt})} \varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

$$\varepsilon_{11} = -L_1 \frac{di_1}{dt} \quad ; \quad \varepsilon_{22} = -L_2 \frac{di_2}{dt} \quad ; \quad \varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{di_1}{dt} \quad ; \quad \varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{di_2}{dt}$$

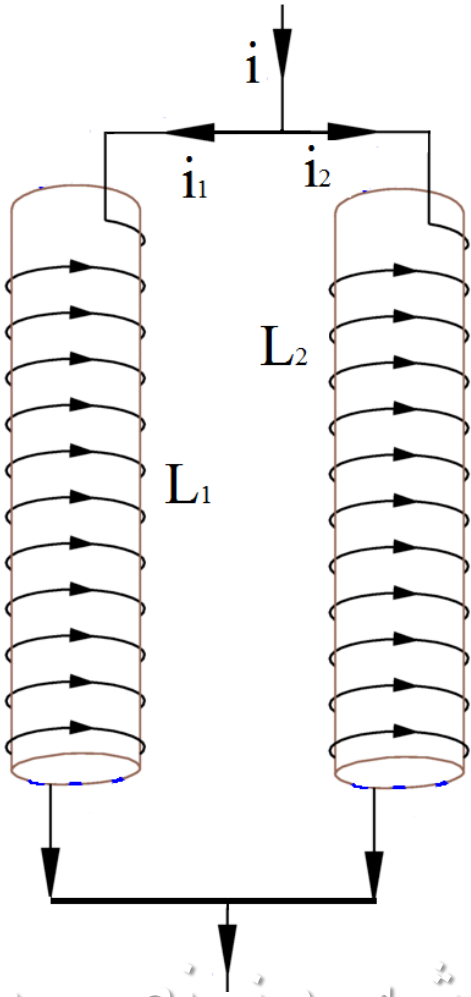
$$\left[\begin{array}{l} i_1 = i_2 = i \Rightarrow \\ \left\{ \frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} = \frac{di}{dt} \right\} \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \text{and} \quad M_{12} = M_{21} \end{array} \right] \Rightarrow \varepsilon_{\text{total}} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{\text{total}} = (-L_1 - L_2 - 2M) \frac{di}{dt} \xrightarrow{\varepsilon_{\text{total}} = (-L_{\text{total}}) \frac{di}{dt}} L_{\text{total}} = L_1 + L_2 + 2M$$

$$L_{\text{total}} = L_1 + L_2 - 2M$$

توجه: در صورتی که جریان ها هم سو نبودند داشتیم:

مثال: در شکل زیر مطلوبست محاسبه ی ضریب خودالقای (اندوکتانس خودی) سلف هم ارز.



$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{21} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{21} \frac{di_2}{dt} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} + \varepsilon_{12} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{21} \frac{di_1}{dt} \end{cases} \xrightarrow[\substack{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \\ M_{21} = M_{12} = M}]{}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & (1) \\ -\varepsilon = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} & (2) \end{cases} \begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix} \begin{matrix} -M \\ L_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} M\varepsilon = -ML_1 \frac{di_1}{dt} - M^2 \frac{di_2}{dt} \\ -L_1\varepsilon = L_1L_2 \frac{di_2}{dt} + L_1M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\varepsilon - L_1\varepsilon = L_1L_2 \frac{di_2}{dt} - M^2 \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \frac{di_2}{dt} = \frac{\varepsilon(M - L_1)}{(L_1L_2 - M^2)} (*)$$

با قرار دادن (*) در (۱) داریم:

$$\begin{cases} -\varepsilon = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & (1) \\ \frac{di_2}{dt} = (*) \end{cases} \Rightarrow -\varepsilon = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \left[\frac{\varepsilon(M-L_1)}{(L_1L_2-M^2)} \right] \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{\varepsilon(M-L_2)}{(L_1L_2-M^2)} (**)$$

$$\left\{ i = i_1 + i_2 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right\} \quad \text{اما در مدار موازی داریم:}$$

حال با قرار دادن روابط (*) و (**) در رابطه ی اخیر داریم:

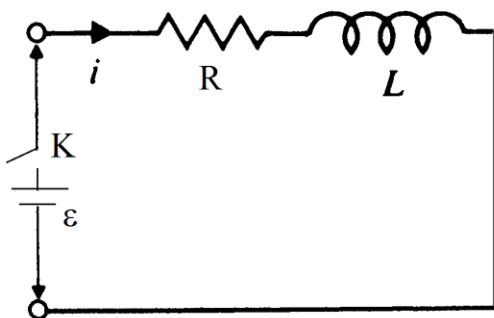
$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon(M-L_2)}{(L_1L_2-M^2)} + \frac{\varepsilon(M-L_1)}{(L_1L_2-M^2)} \Rightarrow \varepsilon_{\text{total}} = -\frac{(L_1L_2-M^2)}{(L_1+L_2-2M)} \frac{di}{dt} \xrightarrow{\varepsilon_{\text{total}} = (-L_{\text{total}}) \frac{di}{dt}}$$

$$L_{\text{total}} = \frac{(L_1L_2-M^2)}{(L_1+L_2-2M)}$$

توجه: اگر جهت دو جریان خلاف یکدیگر باشد داریم:

$$L_{\text{total}} = \frac{(L_1L_2-M^2)}{(L_1+L_2+2M)}$$

مثال: در شکل زیر اگر کلید k بسته شود مطلوبست محاسبه‌ی جریان مدار برحسب زمان و نیز محاسبه نیرو محرکه‌ی القایی در سلف.



KVL برای مدار نوشته شود:

$$\varepsilon - iR - L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \varepsilon - iR = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{L} - \frac{R}{L} i = \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{-R}{L} \left(i - \frac{\varepsilon}{R} \right) = \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{i - \frac{\varepsilon}{R}} = \frac{-R}{L} dt \Rightarrow$$

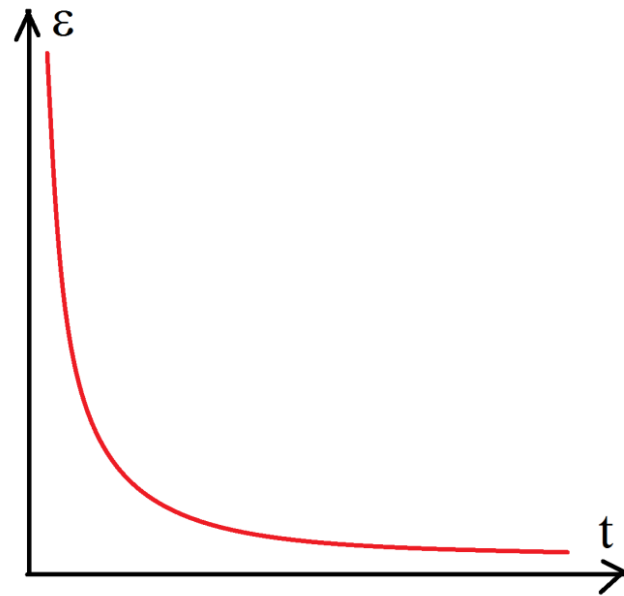
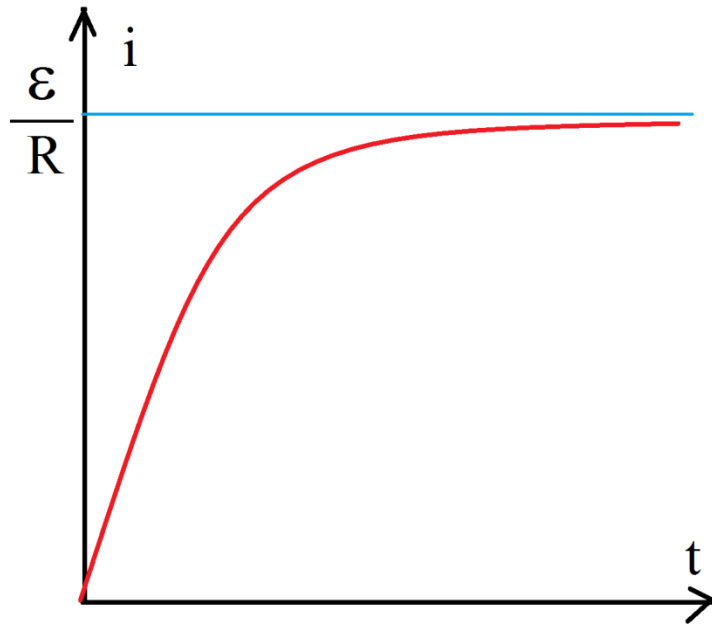
$$\int_{i_0}^i \frac{di}{i - \frac{\varepsilon}{R}} = \int_{t_0}^t \frac{-R}{L} dt \Rightarrow \text{Ln} \left(i - \frac{\varepsilon}{R} \right) = \frac{-R}{L} t + k_0 \xrightarrow{\text{in } t=0 \rightarrow i=0} \text{Ln} \left(-\frac{\varepsilon}{R} \right) = k_0 \Rightarrow$$

$$\text{Ln} \left(i - \frac{\varepsilon}{R} \right) = \frac{-R}{L} t + \text{Ln} \left(\frac{-\varepsilon}{R} \right) \Rightarrow \text{Ln} \left(i - \frac{\varepsilon}{R} \right) - \text{Ln} \left(\frac{-\varepsilon}{R} \right) = -\frac{R}{L} t \rightarrow \text{Ln} \left[\frac{i - \frac{\varepsilon}{R}}{\frac{-\varepsilon}{R}} \right] = -\frac{R}{L} t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ln} \left(\frac{\frac{i}{-\varepsilon} + 1}{\frac{R}{R}} \right) = \frac{-R}{L} t \Rightarrow \frac{\frac{i}{-\varepsilon} + 1}{-\frac{\varepsilon}{R}} = e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow \boxed{i = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})}$$

برای نیرو محرکه القایی داریم:

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow \varepsilon = -L \frac{d}{dt} \left[\frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \right] \Rightarrow \varepsilon = \left[-L \times \frac{\varepsilon}{R} \times \frac{-R}{L} \left[-e^{-\frac{R}{L}t} \right] \right] \rightarrow \varepsilon = \varepsilon e^{-\frac{R}{L}t}$$



انرژی در میدان مغناطیسی:

در مدار قبل داشتیم:

$$\varepsilon - iR - L \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \varepsilon = L \frac{di}{dt} + iR \xrightarrow{\times i} \varepsilon i = L i \frac{di}{dt} + i^2 R$$

که در آن $\varepsilon_0 i$ توان تحویلی منبع است. Ri^2 مقدار توان مصرف شده در مقاومت است و $Li \frac{di}{dt}$ آهنگ انرژی

ذخیره شده در سلف می باشد. اگر انرژی ذخیره شده در خود القا را با W_m نمایش دهیم، آهنگ تغییرات آن بر

حسب زمان می شود: $\frac{dW_m}{dt}$ لذا:

$$\frac{dW_m}{dt} = Li di \Rightarrow W_m = \int dW_m = \int_0^i Li di \Rightarrow \boxed{W_m = \frac{1}{2} Li^2}$$

که نشان دهنده ی انرژی ذخیره شده در سلفی که دارای جریان i است می باشد.

مثال: یک خط انتقال هم محور هوایی دارای هادی داخلی توپری به شعاع a و هادی بیرونی نازکی به شعاع b است. اندوکتانس در واحد طول خط را تعیین نمایید.

فرض می کنیم جریان I که بطور یکنواخت در سطح مقطع هادی داخلی توزیع شده از طریق هادی داخلی می گذرد و از طریق هادی خارجی در جهت معکوس باز می گردد. بدلیل تقارن استوانه ای، \mathbf{B} تنها در جهت زاویه ای (ϕ) مولفه دارد و در درون هادی داخلی و بین دو هادی مقادیر متفاوتی دارد.

(الف) در درون هادی داخلی با استفاده از قانون آمپر داریم:

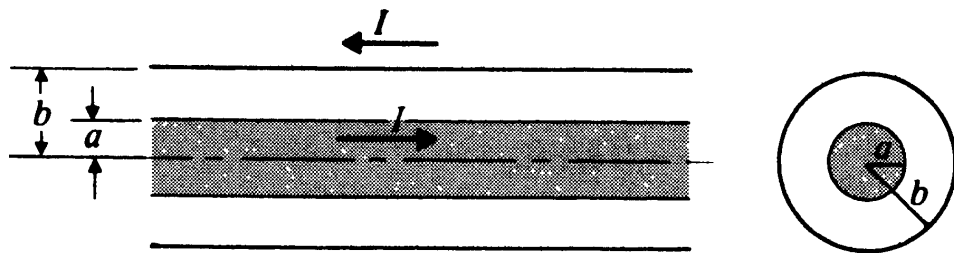
$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{a}_\phi B_{\phi 1} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2}. \quad 0 \leq r \leq a. \quad (6-136)$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{a}_\phi B_{\phi 2} = \mathbf{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad a \leq r \leq b. \quad (6-137)$$

(ب) بین هادی ها داریم:

اکنون یک حلقه ی دایره ای می گیریم و شار کل می شود:

$$\begin{aligned} d\Phi' &= \int_r^a B_{\phi 1} dr + \int_a^b B_{\phi 2} dr \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \int_r^a r dr + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} (a^2 - r^2) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \end{aligned} \quad (6-138)$$



اما جریان در حلقه ی دایره ای (در هادی داخلی بین شعاع های r و $r + dr$) تنها کسری از جریان کل I است.

$$(2\pi r dr / \pi a^2 = 2r dr / a^2)$$

پس برای محاسبه ی اندوکتانس می بایست ابتدا شار در حلقه حساب شود. از پیوند شار در حلقه ی دایره ای داریم:

$$d\Lambda' = \frac{2r dr}{a^2} d\Phi'. \quad (6-139)$$

حال کل شار در واحد طول می شود:

$$\begin{aligned} \Lambda' &= \int_{r=0}^{r=a} d\Lambda' \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \left[\frac{1}{2a^2} \int_0^a (a^2 - r^2)r dr + \left(\ln \frac{b}{a} \right) \int_0^a r dr \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

پس اندوکتانس خط انتقال هم محور در واحد طول می شود:

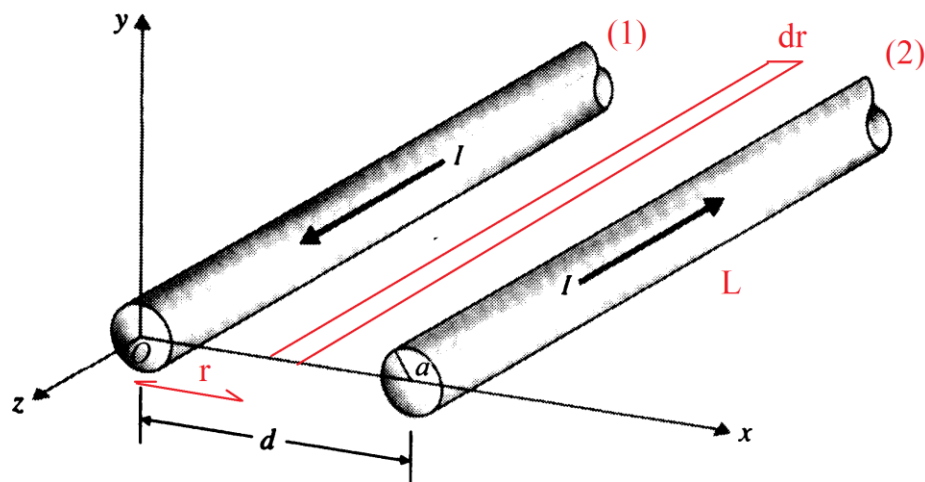
$$L' = \frac{\Lambda'}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{H/m}). \quad (6-140)$$

جمله ی اول از پیوند شار داخل هادی توپر ناشی می شود

و به اندوکتانس داخلی در واحد طول هادی داخلی معروف است. جمله ی دوم از پیوند شار بین هادی داخلی و

بیرونی نتیجه می گردد که به اندوکتانس خارجی در واحد طول خط هم محور معروف است.

مثال: یک خط انتقال شامل دو سیم مسی موازی و بلند به قطر $2R$ حامل جریان های i در جهات مختلف اند.
 (الف) با فرض آنکه فاصله ی بین محورهای مرکزی آنها d باشد، شار مغناطیسی بازای هر متر سیم را که در فضای بین دو محور سیم ها وجود دارد محاسبه نمایید. (ب) اندوکتانس های داخلی و خارجی در واحد طول را محاسبه نمایید. (ج) چه کسری از این شار در داخل سیم ها قرار دارد. (د) اگر جریان ها هم سو باشند نتایج چه می شود.



(الف): بنا بر قانون آمپر میدان حاصل از سیم (۱) در فضای بین دو سیم تا محور سیم (۲) می شود:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

حال شار این میدان که از عنصر سطح dr می گذرد عبارت است از:

$$d\Phi_1 = B_1 dA = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} L dr = \frac{\mu_0 L i}{2\pi} \frac{dr}{r} \Rightarrow \Phi_1 = \int d\Phi_1 = \frac{\mu_0 L i}{2\pi} \left[\int_a^{d-a} \frac{dr}{r} + \int_{d-a}^d \frac{dr}{r} \right] \Rightarrow$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 L i}{2\pi} \left[\left(\text{Ln} \frac{d-a}{a} \right) - \left(\text{Ln} \frac{d}{d-a} \right) \right]$$

میدان سیم (۲) و جهت آن همجهت با میدان سیم (۱) و بسمت داخل صفحه است بنابراین شار کل می شود:

$$\Phi_{\text{total}} = 2\Phi_1 = \frac{\mu_0 Li}{\pi} \left[\left(\text{Ln} \frac{d-a}{a} \right) + \left(\text{Ln} \frac{d}{d-a} \right) \right] \quad (\text{I})$$

جمله ی اول شار عبوری در بین سطوح خارجی دو سیم است و جمله ی دوم مربوط به شار میدان یک سیم است که از درون سیم دیگر می گذرد. حال می بایست شار هر سیم را که از درون خودش می گذرد حساب نمود. برای میدان هر سیم در درون خودش (که قبلاً با قانون آمپر بدست آمده) داریم:

$$B_1^* = \frac{\mu_0 Li}{2\pi a^2} r' \quad ; \quad r' < a$$

حال شار خود القایی میشود:

$$d\Phi_1^* = B_1^* dA = \frac{\mu_0 i L}{2\pi a^2} r' dr' = \frac{\mu_0 Li}{2\pi a^2} r' dr' \Rightarrow \Phi_1^* = \int d\Phi_1^* = \frac{\mu_0 Li}{2\pi a^2} \left[\int_0^a r' dr' \right] \Rightarrow$$

$$\Phi_1^* = \frac{\mu_0 Li}{2\pi a^2} \left[\frac{a^2}{2} \right] = \frac{\mu_0 Li}{4\pi} \Rightarrow \Phi_{\text{two wire}}^* = 2\Phi_1^* = \frac{\mu_0 Li}{2\pi} \quad (\text{II})$$

روابط (I) و (II) برای طول کل سیم ها است . برای شار در واحد طول داریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} : \frac{\Phi_{\text{total}}}{L} &= \frac{\mu_0 i}{\pi} \left[\left(\text{Ln} \frac{d-a}{a} \right) + \left(\text{Ln} \frac{d}{d-a} \right) \right] \\ \text{(II)} : \frac{\Phi_{\text{two wire}}^*}{L} &= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Phi_{\text{total}}^*}{L} = \frac{\Phi_{\text{total}}}{L} + \frac{\Phi_{\text{two wire}}^*}{L} = \frac{\mu_0 i}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \text{Ln} \frac{d}{a} \right] \quad \text{(III)}$$

(ب): با استفاده از (I) و (II) برای اندوکتانس خودی دو سیم داریم:

(در محاسبه ی اندوکتانس خودی کل داخل سیم ها می بایست اثر سیم دیگر نیز محاسبه شود)

$$\xrightarrow[\text{(I)}]{\text{(II)}} : \Phi_{\text{total two wire}}^* = 2 \underbrace{\left(\frac{\mu_0 L i}{4\pi} + \frac{\mu_0 L i}{2\pi} \left(\text{Ln} \frac{d}{d-a} \right) \right)}_{= \Phi_{\text{total one wire}}^*} \xrightarrow{L_{\Phi} = \frac{\Phi_{\text{total two wire}}^*}{i}}$$

$$L_{\Phi} = \frac{\mu_0 L}{2\pi} + \frac{\mu_0 L}{\pi} \left(\text{Ln} \frac{d}{d-a} \right) \xrightarrow{\text{if } d \gg a} L_{\Phi} = \frac{\mu_0 L}{2\pi}$$

برای اندوکتانس کل از (III) داریم:

$$\text{(III)} : \frac{\Phi_{\text{total}}}{L} = \frac{\mu_0 i}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \text{Ln} \frac{d}{a} \right] \xrightarrow{L_{\Phi} = \left(\frac{\Phi_{\text{total}}}{i} \right)} L_{\Phi (\text{total})} = \frac{\mu_0}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \text{Ln} \frac{d}{a} \right]$$

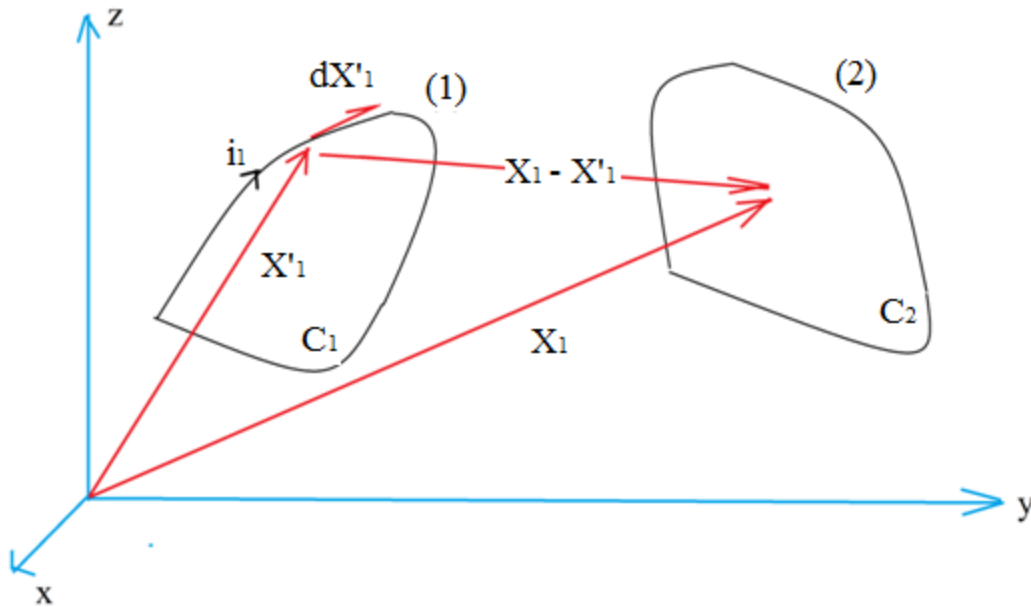
(ج) کسری از شار که داخل سیم ها است:

$$\frac{\Phi_{\text{internal}}}{\Phi_{\text{total}}} = \frac{\frac{\mu_0 i}{2\pi} + \frac{\mu_0 i}{\pi} \text{Ln} \frac{d}{d-a}}{\frac{\mu_0 i}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \text{Ln} \frac{d}{a} \right]} = \frac{\left[1 + \text{Ln} \frac{d}{d-a} \right]}{\left[\frac{1}{2} + \text{Ln} \frac{d}{a} \right]}$$

(د) اگر جریان ها یکسویه بودند، جهت میدان ها بر خلاف یکدیگر می شد و با توجه به تقارن مساله یکدیگر را خنثی می کردند و شار کل صفر می شد.

فرمول نویسن:

داشتیم که اگر در حلقه ی (۱) جریان i_1 جاری بود میدان حاصل از آن در مکان حلقه ی (۲) ، شار عبوری از حلقه ی (۲) ناشی از حلقه ی (۱) و ضرب القای متقابل بین دو حلقه با روابط زیر بدست می آمدند:



$$\vec{B}_1(\vec{X}) = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{X}'_1 \times (\vec{X}_1 - \vec{X}'_1)}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|^3} \quad (*)$$

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \hat{n}_2 dS_2 \quad (**)$$

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} \quad (***)$$

با قرار دادن (*) در (**) داریم:

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \int_{S_2} \left[\oint_{C_1} \frac{d\vec{X}'_1 \times (\vec{X}_1 - \vec{X}'_1)}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|^3} \right] \cdot \hat{n}_2 dS_2$$

اما می توان نوشت:

$$\oint_{C_1} \frac{d\vec{X}'_1 \times (\vec{X}_1 - \vec{X}'_1)}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|^3} = \nabla \times \oint_{C_1} \frac{d\vec{X}'_1}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|}$$

$$\left[\begin{aligned} \oint_{C_1} d\vec{X}'_1 \times \left[\frac{(\vec{X}_1 - \vec{X}'_1)}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|^3} \right] &= \oint_{C_1} d\vec{X}'_1 \times \left[-\nabla \frac{1}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|} \right] \xrightarrow{\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times (f \vec{G}) = f \nabla \times \vec{G} + (\nabla f) \times \vec{G} \\ f = \frac{1}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|} ; \vec{G} = d\vec{X}'_1 \end{array} \right\}} \\ -\oint_{C_1} d\vec{X}'_1 \times \left[\nabla \frac{1}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|} \right] &= \oint_{C_1} \nabla \times \frac{1}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|} - \underbrace{\oint_{C_1} \frac{1}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|} (\nabla \times d\vec{X}'_1)}_{=0} \Rightarrow \\ \oint_{C_1} d\vec{X}'_1 \times \left[\frac{(\vec{X}_1 - \vec{X}'_1)}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|^3} \right] &= -\oint_{C_1} d\vec{X}'_1 \times \left[\nabla \frac{1}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|} \right] = \nabla \times \oint_{C_1} \frac{d\vec{X}'_1}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|} \end{aligned} \right]$$

پس داریم:

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \int_{S_2} \left[\nabla \times \oint_{C_1} \frac{d\vec{X}'_1}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|} \right] \cdot \hat{n}_2 dS_2$$

برای محاسبه ی ضریب القای متقابل داریم:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \left[\nabla \times \oint_{C_1} \frac{d\vec{X}'_1}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|} \right] \cdot \hat{n}_2 dS_2 \xrightarrow{\int_S (\nabla \times A) \cdot \hat{n} ds = \oint_C A \cdot dl}$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{X}'_1}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|} \cdot d\vec{X}'_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{X}'_1 \cdot d\vec{X}'_2}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|}} \xrightarrow[\text{if : } d\vec{X}'_2 = d\vec{l}_2]{\text{if : } d\vec{X}'_1 = d\vec{l}_1} \boxed{M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|}}$$

که فرمول نویمن برای القای متقابل است.

فرمول نویمن برای خود القا نیز بکار می رود که عبارت است از:

$$\boxed{L_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}'_1}{|\vec{X}_1 - \vec{X}'_1|}}$$