ریاضی مهندسی

تهیه و تنظیم:

دکتر شهروز نصیریان

مراجع:

ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

ERWIN KREYSZIG
Professor of Mathematics
Ohio State University
Columbus, Ohio

In collaboration with

HERBERT KREYSZIG
New York, New York

EDWARD J. NORMINTON
Associate Professor of Mathematics
Carleton University
Ottawa, Ontario

WILEY JOHN WILEY & SONS, INC.

WILEY JOHN WILEY & SONS, INC.

Advanced Engineering Mathematics

Alan Jeffrey
University of Newcastle-upon-Tyne

HARCOURT ACADEMIC PRESS
San Diego San Francisco New York Boston
London Toronto Sydney Tokyo

Advanced Modern Engineering Mathematics

Fourth Edition

Glyn James *Coventry University*
and
David Burley *University of Sheffield*
Dick Clements *University of Bristol*
Phil Dyke *University of Plymouth*
John Searl *University of Edinburgh*
Nigel Steele *Coventry University*
Jerry Wright *AT&T*

Prentice Hall
is an imprint of
PEARSON

Visit us on the World Wide Web at:
www.pearsoned.co.uk

First published 1993
Second edition 1999
Third edition 2004
Fourth edition 2011

Dennis G. Zill   Warren S. Wright

Printed in the United States of America
16 15 14 13 12   10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Advanced Mathematics
for Engineers and Scientists

Murray R. Spiegel, Ph.D.

Schaum's Outline Series

McGraw-Hill

New York Chicago San Francisco Lisbon
London Madrid Mexico City Milan New Delhi
San Juan Seoul Singapore Sydney Toronto

قسمت C : آنالیز فوریه ومعادلات با مشتقات جزئی

فصل ۱۰ . سریها، انتگرالها ، و تبدیلات فوریه. . .

فصل ۱۱ . معادلات با مشتقات جزئی

قسمت D : آنالیز مختلط. . . . .

فصل ۱۲ . اعداد مختلط . توابع تحلیلی مختلط .

فصل ۱۶ . نگاشت همدیس.

فصل ۱۳ . انتگرالگیری مختلط

فصل ۱۴ . سریهای توانی، سریهای تیلور، سریهای لوران

فصل ۱۵ . انتگرالگیری به روش مانده ها

یاد آوری:

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^{۲}\alpha = \dfrac{۱ - \cos ۲\alpha}{۲} \\ \cos^{۲}\alpha = \dfrac{۱ + \cos ۲\alpha}{۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin p \pm \sin q = ۲\sin\dfrac{p \pm q}{۲}\cos\dfrac{p \pm q}{۲} \\ \cos p + \cos q = ۲\cos\dfrac{p+q}{۲}\cos\dfrac{p-q}{۲} \\ \cos p - \cos q = -۲\sin\dfrac{p+q}{۲}\sin\dfrac{p-q}{۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin a\cos b = \dfrac{۱}{۲}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos a\cos b = \dfrac{۱}{۲}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a\sin b = -\dfrac{۱}{۲}[\cos(a+b) - \cos(a-b)] \end{cases}$$

انتگرال جزء به جزء:

$$(uv)' = u'v + uv' \rightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int x\sin\alpha x\,dx = \frac{\sin\alpha x}{a^{۲}} - \frac{x\cos\alpha x}{a} + c \\ \displaystyle\int x^{۲}\sin\alpha x\,dx = \frac{۲x}{\alpha^{۲}}\sin\alpha x + \left(\frac{۲}{a^{۳}} - \frac{x^{۲}}{a}\right)\cos ax + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int x\cos ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^{۲}} + \frac{x\sin ax}{a} + c \\ \displaystyle\int x^{۲}\cos ax\,dx = \frac{۲x}{a^{۲}}\cos ax + \left(\frac{x^{۲}}{a} - \frac{۲}{a^{۳}}\right)\sin ax + c \end{cases}$$

توابع زوج و فرد: تابعی را زوج گویند هر گاه

$$\begin{cases} \forall\, x \in D_f \rightarrow -x \in D_f \\ f(x) = f(-x) \end{cases}$$

تابعی را فرد گویند هر گاه

$$\begin{cases} \forall\, x \in D_f \rightarrow -x \in D_f \\ f(x) = -f(-x) \end{cases}$$

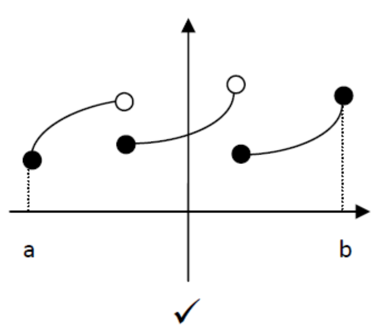
تابع زوج = تابع فرد × تابع فرد

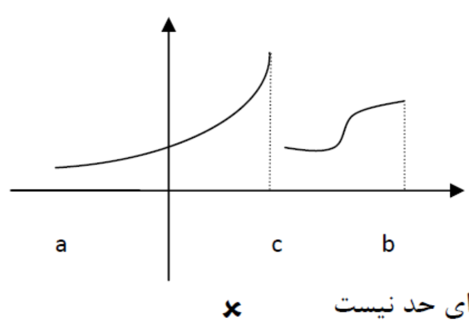
تابع فرد = تابع فرد × تابع زوج

تابع زوج = تابع زوج × تابع زوج

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\frac{T}{٢}}^{\frac{T}{٢}} \text{تابع فرد} = ٠ \\ \displaystyle\int_{-\frac{T}{٢}}^{\frac{T}{٢}} \text{تابع زوج} = ٢\int_{٠}^{\frac{T}{٢}} \text{تابع زوج} \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در بازه $\{a,b\}$ تکه ای هموار گفته می شود هرگاه بتوان این بازه را به تعداد متناهی زیر بازه تقسیم کرد ، بطوری که $f(x)$ در هر یک از آنها پیوسته باشد .





در نقطه c دارای حد نیست

تناوب:

تابع $f(t)$ را متناوب گویند اگر

$$\begin{cases} \forall \ t \in D_f \rightarrow t + t \in D_f \\ f(t+T) = f(t) \end{cases}$$

توابع متناوب :

تابع $f(x)$ را متناوب گوییم هر گاه این تابع به ازای هر عدد حقیقی x تعریف شده باشد و عدد مثبتی مثل T موجود باشد به طوری که

$$\forall x \ : f(x+T) = f(x)$$

عدد T را دوره تناوب تابع $f(x)$ می نامیم . نمودار این تابع از تکرار دوره ای نمودار آن در هر فاصله ای که طول آن T باشد بدست میاید.
دوره تناوب پایه $f(x)$ را T_0 که کوچکترین مقدار غیر صفر T میباشد که در معادله فوق صدق می کند . مقدار $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ را فرکانس پایه مینامند .

نکات :

1 - اگر n عدد صحیح دلخواه باشد آنگاه به ازای هر x داریم : $f(x+nT) = f(x)$

2 - هر گاه $g(x), f(x)$ دارای دوره تناوب T باشند آنگاه $h(x) = af(x) + bg(x)$ دارای دوره تناوب T خواهد بود (a, b ثابت هستند)

3 - تابع ثابت $f(x) = c$ به ازای هر عدد مثبت T تابع متناوب با دوره تناوب T است .

4 - هرگاه $f(x)$ تابعی متناوب از x با دوره تناوب T باشد آنگاه $f(ax)$ متناوب با دوره تناوب $\frac{T}{a}$ است . همچنین $f(\frac{x}{b})$ متناوب با دوره ی تناوب bT است . (b, a مثبت هستند)

$$(3) \qquad 1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \cdots, \quad \cos nx, \quad \sin nx, \cdots.$$

All these functions have the period 2π. They form the so-called **trigonometric system**. Figure 259 shows the first few of them (except for the constant 1, which is periodic with any period).

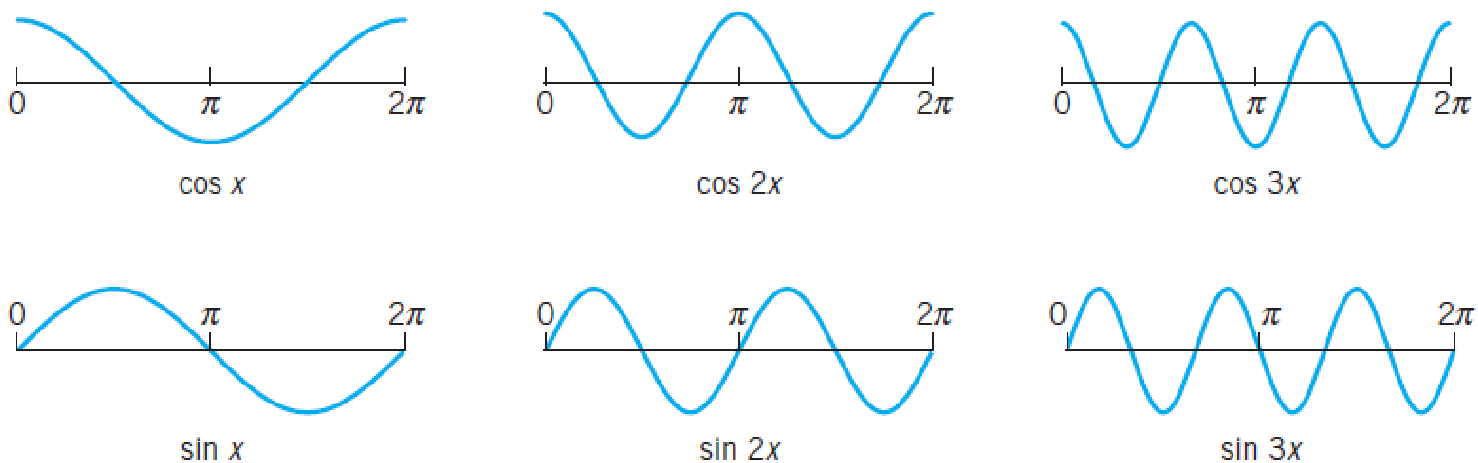


Fig. 259. Cosine and sine functions having the period 2π (the first few members of the trigonometric system (3), except for the constant 1)

توابع متعامد (عمود بر هم):

فرض نمایید با استفاده از روش جداسازی متغییر ها و یا هر روش دیگری معادله دیفرانسیل مرتبه دومی بصورت زیر بدست آوردیم:

$$\frac{d^2}{dr^2}u(r)+\lambda u(r)=0 \;\; ;(r: x, y \text{ or } z)$$

بازای مقداری معلوم برای λ (که می تواند k^2 باشد)، تابعی مانند $u_\lambda(r)$ موجود است که در معادله ی فوق و شرایط مرزی وضع شده صدق نماید. در این صورت λ را ویژه مقدار ، $u_\lambda(r)$ را ویژه تابع و $L=\frac{d^2}{dr^2}$ را عملگر می نامند.

حال چنانچه در یک مساله بازای عملگر L ویژه توابعی بشکل $u_n(r)$ ، $u_m(r)$ داشته باشیم و آنها در رابطه ی زیر صدق نمایند به عملگر L هرمیتی می گویند: (در آن * نشان دهنده ی همیوغ مختلط تابع است).

$$\int_a^b u_n^*(x)\,L\,u_m(x)\,dx=\int_a^b u_n(x)L\,u_m^*(x)\;dx$$

ثابت می شود که :

(۱) ویزه مقدارهای هر عملگر هرمیتی حقیقی اند.

(۲) ویژه تابعهای هر عملگر هرمیتی متعامدند

(۳) ویژه تابع های هر عملگر هرمیتی یک مجموعه کامل تشکیل می دهند.

داشتیم دو بردار A و B را متعامد گویند که داشته باشیم A.B=0. از نقطه نظر فیزیکی می توان فرض نمود که تابع A(x) برداری با بینهایت بعد باشد که در بازه ی (a,b) تعریف شده باشد و با قرار دادن x خاصی در این بازه ، در تابع فوق مقدار آن مشخص می گردد. بنابر این دو تابع فوق را در بازه ی (a, b) متعامد گوییم هرگاه :

$$\int_a^b A(x)\,B(x)\,dx = 0$$

بردار A را یک بردار نرمال شده (یا یکه) می نامیم. هر گاه :

$$\int_a^b \left(A(x)\right)^2 dx = 1$$

بنابر این

$$\int_a^b \varphi_m(x)\ \varphi_n(x)\,dx = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad \text{or} \quad \delta_{mn}$$

که در آن δ_{mn} را دلتای کرونکر گوییم و داریم:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

در چنین حالتی هر عضو این مجموعه بر عضو دیگر آن عمود است و ضمناً نرمال شده نیز است.

چنین مجموعه ای از توابع را یک مجموعه ی متعامد یکه در (a, b) می نامیم.

بنابراین چنانچه شرط تعامد روی تابع $u_n(x)$ بصورت زیر باشد:

$$\int_a^b u_n(x)\, u_m(x)\, dx = \delta_{mn}$$

آنگاه هر تابع دلخواه $f(x)$ را می توان بر حسب توابع متعامد کامل اش بسط داد و نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x)$$

برای محاسبه ی a_n طرفین را در u_n^* ضرب و انتگرال می گیریم و داریم:

$$a_n = \int_a^b f(x)\, u_n^*(x)\, dx$$

حال چنانچه ویژه توابع عملگر هرمیتی موجود باشند با استفاده از شرط تعامد می توان ضرایب آنها را محاسبه نمود.

از توابع مشهور متعامد ، توابع سینوس و کسینوس می باشند.

مثال 2- آیا توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در بازه $[0$ و $2\pi]$ متعامدند ؟ $(Zn\ \&\ m\in)$

$$\int_0^{2\pi} \sin x . \cos x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\{\sin(n+m)\,x + \sin(n-m)\,x\}\, dx = \frac{1}{2}\{\int_0^{2\pi} \sin(n+m)\,x dx + \int_0^{2\pi} \sin(n-m)\,x\, dx\} = 0$$

فصل ۱۰

سریها و انتگرالها فوریه

الف ـ در سری‌های فوریه

A) محاسبه ضرایب سری فوریه با توجه به نوع سری فوریه خواسته شده (سری فوریه معمولی ـ سینوسی ـ کسینوسی)

B) سری فوریه توابع بیان شده در فرم توان و یا ضرب سینوس‌ها و کسینوس‌ها

C) مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری‌های فوریه برای یافتن سری‌های فوریه جدید

D) استفاده از قضیه دیریکله و تساوی پارسوال برای محاسبه حاصل سری‌های نامتناهی

ب ـ در انتگرال‌های فوریه

A) محاسبه ضرایب انتگرال‌های فوریه

B) حل معادلات انتگرالی

C) استفاده از قضیه دیریکله و تساوی پارسوال برای محاسبه حاصل انتگرال‌های ناسره

سریهای فوریه [1]، که سریهایی با جملات سینوسی وکسینوسی می باشند و درمسائل عملی مهم که با توابع دوره ای سرو کار دارند ظاهر می شوند. این سریها ابزار پرقدرتی برای حل مسائل مختلف، ازجمله معادلات دیفرانسیل معمولی ومعاملات بامشتقات جزئی می باشند.

۱- ژان باپتیست ژوزف فوریه JEAN - BAPTISTE JOSEPH FOURIER (۱۸۳۰-۱۷۶۸) فیزیکدان و ریاضیدان فرانسوی، در پاریس زندگی و تدریس می کرد، همراه ناپلئون به مصر رفت و بعدها فرماندهٔ شد. او از سریهای فوریه دراثر اصلی اش :

The'orie analytique de la chaleur (Analytic Theory of Heat, 1922)

که در آن نظریه هدایت گرما را بسط داد (معادلهٔ گرما ، رك. بخش ۱۱ . ۵) استفاده نمود. این سریهای جدید به صورت مهمترین ابزار در ریاضی فیزیک در امدند ونیز اثر قابل ملاحظه ای بر پیشرفت ریاضیات داشته اند؛ ر.ك. مرجع [۹] درضمیمهٔ ۱.

۱۰ . ۱ توابع دوره ای . سریهای مثلثاتی

تابع $f(x)$ را **دوره ای** نامند اگر این تابع به ازای هرعدد حقیقی x تعریف شده باشد وعدد مثبتی مانند p موجود باشد، به طوری که به ازای هر x داشته باشیم

$$f(x+p)=f(x) \tag{۱}$$

عدد p به **دورهٔ** $f(x)$ موسوم می باشد. نمودارچنین تابعی ازتکرار دوره ای نمودار آن درهر فاصله ای که طول آن p باشد حاصل می شود(شکل ۲۲۹). توابع و پدیده های دوره ای در بیشتر کاربردها ظاهر می شوند.

توابع دوره ای آشنا توابع سینوسی وکسینوسی هستند

$$f(x+2p)=f[(x+p)+p]=f(x+p)=f(x)$$

و درحالت کلی، به ازای هرعدد صحیح n و هر عدد حقیقی x داریم

$$f(x+np)=f(x). \tag{۲}$$

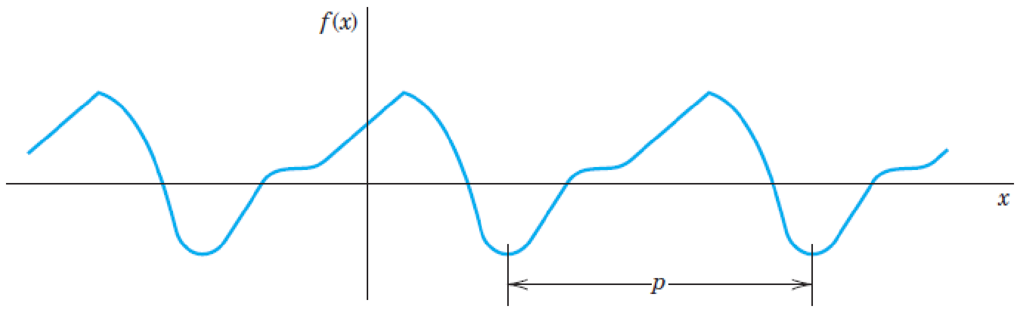


Fig. 258. Periodic function of period p

سریهای مثلثاتی:

The series to be obtained will be a **trigonometric series**, that is, a series of the form

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots \\ (4) \qquad & = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \end{aligned}$$

$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$ are constants, called the **coefficients** of the series. We see that each term has the period 2π. Hence *if the coefficients are such that the series converges, its sum will be a function of period 2π.*

توابع دوره ایی که درمسائل مهندسی مطرح می شوند اغلب اوقات نسبتاً پیچیده هستند، و بدین جهت نمایش این توابع برحسب توابع دوره ای ساده مفید است. چنانچه خواهیم دید تقریباً هرتابع دوره ای f با دورهٔ 2π را که در کاربردها – به عنوان مثال، درارتباط با ارتعاشات ـ مطرح می شود می توان به صورت یک سری مثلثاتی نمایش داد(که آن را آنگاه **سری فوریه** تابع f می نامند).

Now suppose that $f(x)$ is a given function of period 2π and is such that it can be **represented** by a series (4), that is, (4) converges and, moreover, has the sum $f(x)$. Then, using the equality sign, we write

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{5}$$

and call (5) the **Fourier series** of $f(x)$. We shall prove that in this case the coefficients of (5) are the so-called **Fourier coefficients** of $f(x)$, given by the **Euler formulas**

(6)

$$\textbf{(0)} \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$\textbf{(a)} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$$\textbf{(b)} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \qquad n = 1, 2, \cdots .$$

فرمولهای اویلر برای ضرایب فوریه

فرض کنید f تابعی دوره ای با دورهٔ 2π باشد که بتوان آن را به صورت سری مثلثاتی

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

نمایش داد؛ یعنی فرض کنیم که سری همگرا و $f(x)$ برابر حاصل جمع آن باشد، می خواهیم ضرایب a_n و b_n برای چنین تابع مفروض f را ، در سری (۱) متناظر به آن معین کنیم .

ابتدا a_0 را مشخص می کنیم . با انتگرالگیری ازطرفین (۱) از $-\pi$ تا π داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]dx .$$

هرگاه انتگرالگیری جمله به جمله مجاز باشد[۲]، به دست می آوریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right).$$

جمله اول طرف راست برابر $2\pi a_0$ است وبا انتگرالگیری مشاهده می کنیم که سایر انتگرالهای طرف راست صفراند. بنابراین نتیجه اول عبارت است از

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx . \qquad (2)$$

(استفاده از شرط تعامد)

محاسبه a_n ها : با استفاده از شرط تعامد و ضرب (۱) در $\cos mx \quad (m=1,\ 2,\cdots)$ و انتگرالیری از طرفین در یک دوره بهمراه بکار بردن فرمولهای زیر بدست آورد:

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin a\cos b &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)+\sin\left(a-b\right)\right]\\
\cos a\cos b &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(a+b\right)+\cos\left(a-b\right)\right]\\
\sin a\sin b &= -\frac{1}{2}\left[\cos\left(a+b\right)-\cos\left(a-b\right)\right]
\end{aligned}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\,(\mathrm{x})\cos \mathrm{mx}\,\mathrm{dx} = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_\circ \cos mx\; dx}_{=0} + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,\cos mx\; dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\,\cos mx\; dx$$

$$\to \int_{-\pi}^{\pi} f\,(\mathrm{x})\cos \mathrm{mx}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\left[a_n\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\cos \underbrace{(\mathrm{n+m})}_{=0}x\; dx + \int_{-\pi}^{\pi}\cos(\mathrm{n-m})\,\mathrm{x}\,\mathrm{dx}\right\}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[b_n\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\sin \underbrace{(\mathrm{n+m})}_{=0}x\; dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sin \underbrace{(\mathrm{n-m})}_{=0}x\; dx\right\}\right]$$

تنها انتگرال دوم غیر صفر است. به ازای n=m داریم :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\mathrm{n-m})\,\mathrm{x}\,\mathrm{dx}=\frac{1}{n-m}\sin(\mathrm{n-m})x\;\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{n-m}\sin(\mathrm{n-m})\big(\pi-(-\pi)\big)\rightarrow$$

اگر n≠m باشد جواب این انتگرال نیز صفر است. اما اگر n=m باشد، جواب انتگرال 2π خواهد شد.

بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{n=m}\frac{\sin(\mathrm{n-m})}{n-m}\,(2\pi)=\xrightarrow{\underbrace{(2\pi)\,\lim_{(n-m)\to 0}\left(\frac{\sin(\mathrm{n-m})(2\pi)}{(2\pi)n-m}\right)}_{=1}\;=2\pi}=2\pi$$

$$\rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(\mathrm{x})\cos\mathrm{mx}\,\mathrm{dx}=\frac{1}{2}a_n\,[2\pi]$$

$$\xrightarrow{n=m}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\mathrm{x})\cos\mathrm{nx}\,\mathrm{dx}$$

فرمول های مفید در محاسبه ی انتگرال :

$$1.\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=0\qquad\begin{cases}n=m\\ n\neq m\end{cases}$$

$$2.\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=2\int_{0}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=2\left(\frac{\pi}{2}\right)\delta_{nm}=2\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{\pi}{2} & n=m\end{cases}$$

$$3.\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx=2\left(\frac{\pi}{2}\right)\delta_{nm}=2\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{\pi}{2} & n=m\end{cases}$$

فرمول مربوط به b_n ها نیز به همین ترتیب با استفاده از $Sin(mx)\ (m=1, 2,\cdots)$ حاصل می شود.

بنابراین داریم:

(٦)

$$\textbf{(0)}\quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$\textbf{(a)}\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$$\textbf{(b)}\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

مقادیر مفروض در (۶) به **ضرایب فوریه** تابع f موسوم اند. سری مثلثاتی

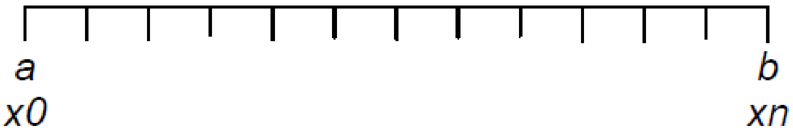
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (۷)$$

با ضرایب داده شده در (۶) را **سری فوریه** تابع f می نامند(بدون توجه به همگرایی که بعداً بررسی می شود).

شرایط دیریکله برای همگرایی سری فوریه

1 - افراز یک بازه :

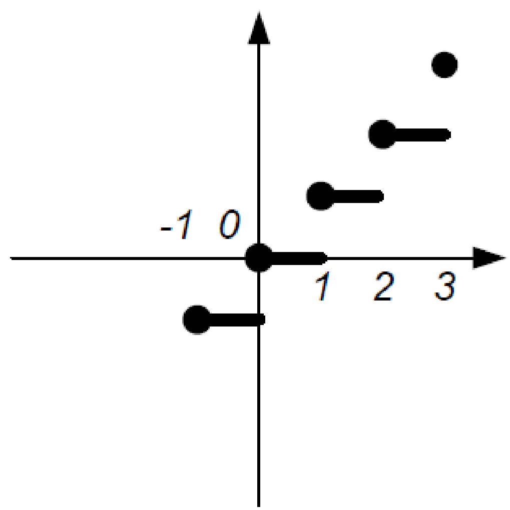
اگر فاصله ی بسته ی $[a, b]$ به وسیله ی نقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ به **n** زیر بازه تقسیم کنیم مجموعه ی $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ را یک افراز یا بخش بندی فاصله ی بسته ی $[a, b]$ می نامیم .



2 - توابع پیوسته ی قطعه ای (تکه ای) :

تابع **f** را روی بازه ی $[a, b]$ پیوسته تکه ای گوییم هر گاه بتوانیم این بازه را با نقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ چنان افراز کنیم که تابع روی هر یک از بازه های $(x_0, x_1), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ پیوسته باشد .

مثلا $f(x) = [x]$ روی بازه $[-1,3]$ پیوسته تکه ای است .



قضیه : اگر f روی بازه $[a,b]$ پیوسته تکه ای و کراندار باشد انگاه f روی این بازه انتگرال پذیر است .

3 - تابع تکه ای هموار :

تابع f(x) را در فاصله ی $[a,b]$ تکه ای هموار گوییم هر گاه بتوان این فاصله را چنان افراز نمود که در هر زیر فاصله f(x) و مشتق آن پیوسته باشند .

مثال : تابع $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ در هر فاصله ای که شامل صفر باشد تکه ای هموار نیست زیرا مشتق در این نقطه تعریف نشده است.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}, x \neq 0$$

قضیه دیریکله :

هر گاه تابع متناوب f(x) با دوره ی تناوب 2π در فاصله $[-\pi,\pi]$ پیوسته تکه ای باشد و در هر نقطه از این فاصله مشتق چپ و راست داشته باشد آنگاه سری فوریه متناظر f(x) همگراست . و مجموع آن در هر نقطه :

الف) برابر f(x) است (اگر x نقطه پیوستگی تابع مورد نظر باشد .)

ب) برابر $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ اگر x نقطه ناپیوستگی تابع مورد نظر باشد.

برای آنکه تابع f(x) دارای سری فوریه باشد

۱- متناوب باشد

۲- انتگرال آن در یک دوره محدود باشد

۳- پیوسته باشد

شرایط دریکله ، شرایط کافی برای داشتن سری فوریه هستند نه شرایط لازم . ممکن است تابعی شرایط دریکله را نداشته باشد ولی سری فوریه داشته باشد .

نکته :

به دلیل دوره ای بودن انتگرال فاصله انتگرال گیری در فرمول های اویلر را می توان با هر فاصله دیگری به طول 2π عوض کرد مثلا
$0 \le x \le 2\pi$

$$[-\pi,\pi] \rightarrow T = 2\pi \quad , L = \frac{T}{2} = \pi$$

یاد اوری :

اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد و f روی بازه ی $[0,T]$ انتگرال پذیر باشد انگاه به ازای هر عدد حقیقی a داریم :

$$f(x) = \int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

سري فوريه از ديدگاه برق : تجزيه يك سيگنال به مجموعه اي از توابع سينوسي و كسينوسي .

مراحل محاسبه سري فوريه :

الف) تشخیص دوره تناوب

ب) تشخیص سیگنال DC

ج) تعيين دوره تناوب

د) محاسبه a_0 و a_n و b_n

ه) قرار دادن a_0 و a_n و b_n در فرمول سري فوريه

توجه ۱ : $\frac{a_0}{2}$ را ثابت سری فوریه تابع می‌گویند و مبین مقدار متوسط $f(x)$ در یک دوره تناوب است و در حقیقت داریم:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\text{سطح خالص زیر نمودار تابع } f \text{ در یک پریود}}{\text{طول بازه یک پریود}}$$

منظور از سطح خالص آن است که مساحت‌های بالای محور xها مثبت و مساحت‌های پایین محور xها منفی به احتساب می‌آید.

به عدد $\frac{a_0}{2}$ اصطلاحا سطح متوسط سيگنال يا سطح DC سيگنال گفته مي شود .

A Basic Example

مثال : موجی مربعی با دوره تناوب $f(x+2\pi) = f(x)$ را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{if} \quad -\pi < x < 0 \\ k & \text{if} \quad 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{and} \qquad f(x+2\pi) = f(x). \tag{7}$$

الف) شکل تابع را حداقل برای چند دوره تناوب رسم کنید.

ب) بسط فوریه تابع را بدست اورید .

ج) به کمک قسمت ب نشان دهید :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

الف)

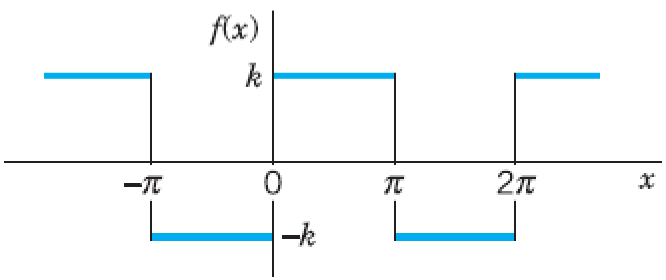


Fig. 260. Given function $f(x)$ (Periodic reactangular wave)

:(ب)

$$\left[p=2L=2\pi \rightarrow L=\pi\right]$$

$$a_{\circ}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} \rightarrow \mathrm{a}_{\circ}=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-kdx+\int_{0}^{\pi}kdx\right]=\frac{1}{2\pi}\left[-kx\,|_{\pi}^{0}\ +kx\,|_{0}^{\pi}\ \right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-k(-(-\mathrm{n}))+\mathrm{k}(\pi-0)\right]=0$$

$$a_{n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{x})\cos \mathrm{nx}\,\mathrm{dx}$$

$$\Rightarrow a_{n}=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\mathrm{k})\cos \mathrm{nx}\,\mathrm{dx}+\int_{0}^{\pi}(\mathrm{k})\cos \mathrm{nx}\,\mathrm{dx}\right] \rightarrow a_{n}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-k}{n}\sin nx\,|_{-\pi}^{0}\ +\frac{k}{n}\sin nx\,|_{0}^{\pi}\right] \rightarrow \quad a_{n}=0$$

$$b_{n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{x})\sin\ \mathrm{nx}\,\mathrm{dx}$$

$$\Rightarrow b_{n}=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\mathrm{k})\sin \mathrm{nx}\,\mathrm{dx}+\int_{0}^{\pi}(\mathrm{k})\sin \mathrm{nx}\,\mathrm{dx}\right]$$

$$\Rightarrow b_{n}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{k}{n}\cos nx\,|_{-\pi}^{0}\ -\frac{k}{n}\cos nx\,|_{o}^{\pi}\right]$$

$$\Rightarrow b_{n}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{k}{n}\left[1-\cos n(-\mathrm{n})\right]-\frac{k}{n}\left[\cos n-1\right]\right]$$

توجه : $\cos n\pi = (-1)^n$

$$b_n = \frac{k}{n\pi}\left[2-2\cos n\pi\right] \rightarrow b_n = \frac{2k}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$b_n = \frac{2k}{n\pi}\begin{cases} 2 & n : odd \\ 0 & n : even \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4k}{n\pi} & if \ : n = odd \\ 0 & if \ : n = even \end{cases}$$

Hence the Fourier coefficients b_n of our function are

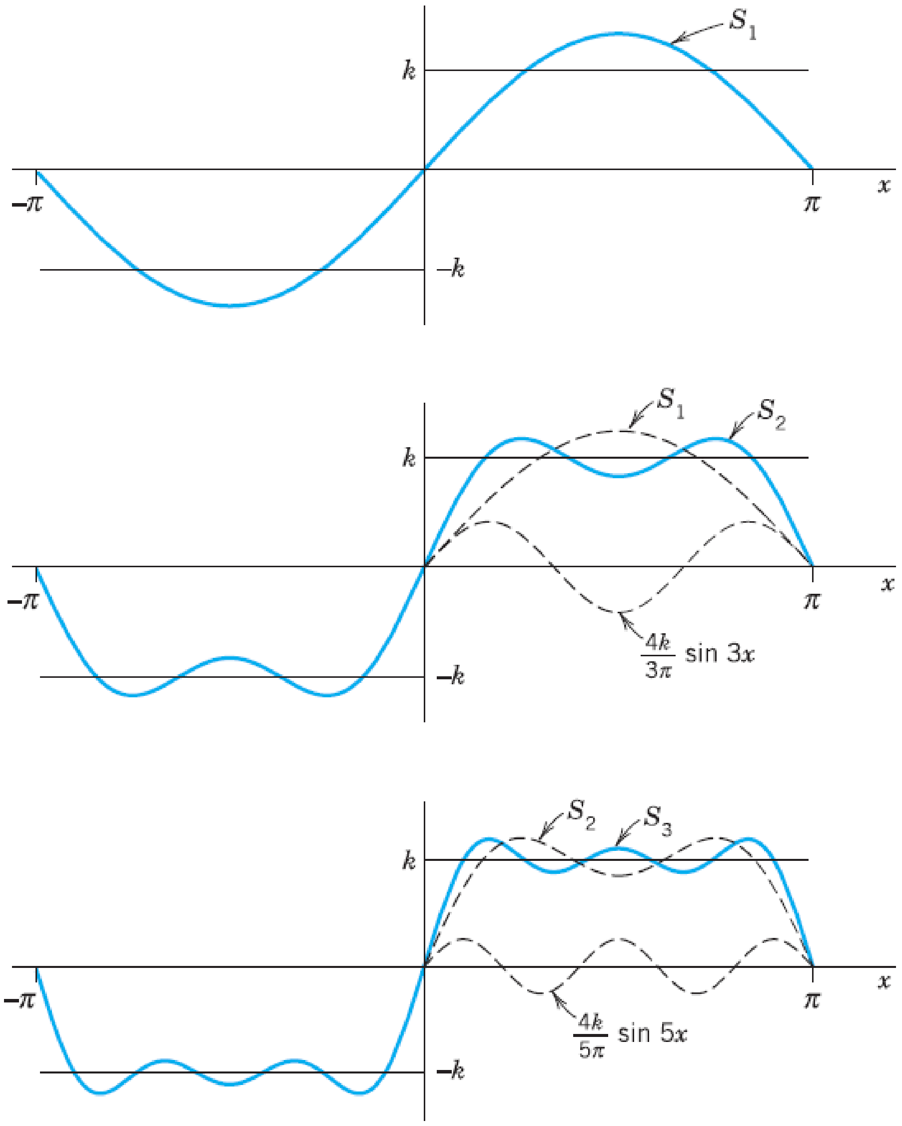
$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \qquad b_4 = 0, \qquad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \cdots .$$

Since the a_n are zero, the Fourier series of $f(x)$ is

$$(8) \qquad \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right).$$

$$f(x) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4k}{n\pi} \boldsymbol{sin} nx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4k}{(2m-1)\pi} \boldsymbol{sin}(2m-1)x$$

$$S_{1:(n=1)} = \frac{4k}{\pi}\sin x \quad , \quad S_{2:(n=3)} = \frac{4k}{3\pi}\sin 3x + S_1 \quad , \quad S_{3:(n=5)} = \frac{4k}{5\pi}\sin 5x + S_1 + S_2 \quad , \ldots$$



$$S_1 = \frac{4k}{\pi}\sin x,$$

$$S_2 = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\right).$$

Fig. 261. First three partial sums of the corresponding Fourier series

$$f_N(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$$

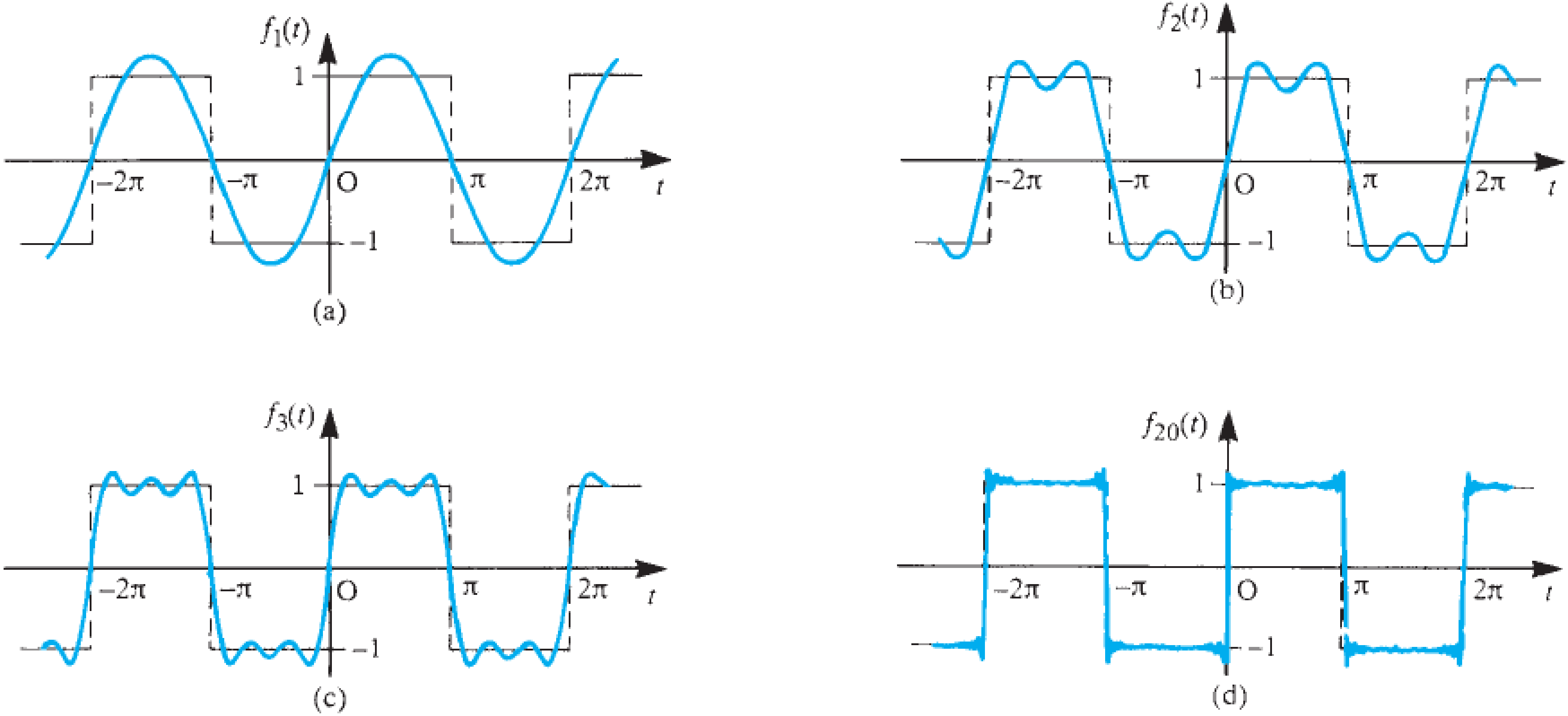


Figure 7.15 Plots of $f_N(t)$ for a square wave: (a) $N = 1$; (b) 2; (c) 3; (d) 20.

EXAMPLE 1 Expansion in a Fourier Series

Expand
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi \end{cases} \tag{12}$$
in a Fourier series.

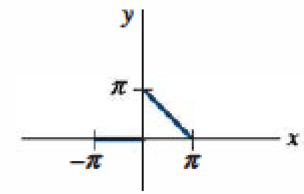


FIGURE 12.2.1 Function f in Example 1

SOLUTION The graph of f is given in **FIGURE 12.2.1**. With $p = \pi$ we have from (9) and (10) that

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right] \\ &= -\frac{1}{n\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big]_0^{\pi} \\ &= \frac{-\cos n\pi + 1}{n^2\pi} \qquad \leftarrow \cos n\pi = (-1)^n \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}. \end{aligned}$$

In like manner we find from (11) that

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x) \sin nx \, dx = \frac{1}{n}.$$

Therefore $$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{1}{n} \sin nx \right\}.$$

Note that

$$1 - (-1)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ even} \\ 2, & n \text{ odd.} \end{cases}$$

نکات سری فوریه :

1 – هر گاه f(x) دارای ضرایب فوریه a_n, b_n و g(x) نیز دارای ضرایب فوریه a^*_n, b^*_n باشد آنگاه f(x)+g(x) دارای ضرایب فوریه $a_n + a^*_n$ و $b_n + b^*_n$ خواهد بود .

2 – هر گاه f(x) دارای ضرایب فوریه a_n, b_n باشد آنگاه kf(x) که در آن k عددی مثبت است دارای ضرایب فوریه ی ka_n, kb_n خواهد بود .

۳.۱۰ توابع با دورهٔ دلخواه $p = 2L$

توابعی که تاکنون مورد بررسی قرارداده ایم بادورهٔ تناوب 2π بوده اند و حال آنکه درمسائل اغلب اوقات باتوابعی مواجه هستیم که متناوب بوده و دورهٔ تناوب آنها برابر 2π نیست. درهر صورت به سادگی می توان نشان داد که سری فوریه توابع با یک دورهٔ دلخواه $p = 2L$ [9] از روی سری فوریه توابع با دورهٔ تناوب $p = 2\pi$ قابل محاسبه است. درواقع اگر $f(x)$ یک تابع با دورهٔ $p = 2L$ باشد، آنگاه ادعا می کنیم که این تابع دارای یک سری فوریه به صورت زیر است

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad (1)$$

که در آن **ضرایب فوریه** از روی **فرمولهای اویلر** به شرح زیر محاسبه می شوند

$$\textbf{(0)} \qquad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$\textbf{(6)} \qquad \textbf{(a)} \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$$\textbf{(b)} \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

۱۰ . ۴ توابع زوج و فرد

در تعیین ضرایب فوریه یک تابع ، اگر تابع فرد یا زوج باشد می توان از محاسبات غیر ضروری اجتناب کرد و سریعتر به نتیجه رسید . مثالی برای تابع فرد ، تابع مذکور درمثال ۱ بخش قبل می باشد که چنانچه مشاهده شد تنها دارای جملات سینوسی است .

ابتدا متذکر می شویم که تابع $y = g(x)$ ، **زوج** است هرگاه به ازای هر x

$$g(-x) = g(x) .$$

نمودار چنین تابعی نسبت به محور y متقارن است (شکل ۲۳۵) . تابع $h(x)$ را **فرد** نامند، هرگاه به ازای هر x داشته باشیم (ر.ك . شکل ۲۳۶)

$$h(-x) = -h(x) .$$

نمودار چنین تابعی نسبت به مبداء مختصات متقارن است .

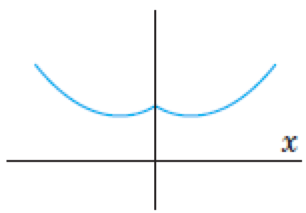


Fig. 266.
Even function

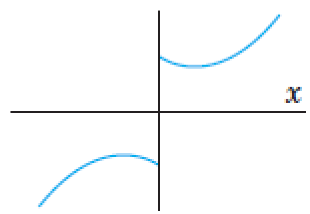


Fig. 267.
Odd function

اگر g تابعی زوج باشد، آنگاه

$$\int_{-L}^{L} g(x)\,dx = ۲\int_{۰}^{L} g(x)\,dx \qquad (\text{زوج } g). \qquad (۱)$$

اگر h تابعی فرد باشد، آنگاه

$$\int_{-L}^{L} h(x)\,dx = ۰ \qquad (\text{فرد } h). \qquad (۲)$$

قضیه ۱ (سری فوریه توابع زوج و فرد)

سری فوریه تابع زوج f با دورهٔ تناوب ۲L یک **« سری فوریه کسینوسی »** است، یعنی

$$f(x) = a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x \qquad (\text{زوج } f)$$

که در آن

$$a_۰ = \frac{۱}{L}\int_{۰}^{L} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{۲}{L}\int_{۰}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = ۱,۲,\dots .$$

$\boxed{b_n = 0}$

سری فوریه تابع فرد f با دورهٔ تناوب ۲L یک **« سری فوریه سینوسی »** است، یعنی

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (\text{فرد } f)$$

که در آن

$$b_n = \frac{۲}{L}\int_{۰}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

$\boxed{a_n = 0}$

حالتی از دورهٔ تناوب 2π . سری فوریه یک تابع زوج f با دورهٔ 2π که یک سری فوریه کسینوسی است عبارت است از

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (\text{f زوج}) \qquad (3^*)$$

که در آن

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx\,, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,,\ n = 1,2,\ldots \qquad (4^*)$$

وهمین طور برای یک تابع فرد f با دورهٔ تناوب 2π که یک سری فوریه سینوسی است داریم

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (\text{f فرد}) \qquad (5^*)$$

که در آن

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\quad n = 1,2,\ldots. \qquad (6^*)$$

نکته :

ضرب دو تابع زوج برابر با یک تابع زوج

ضرب دو تابع فرد برابر با یک تابع زوج

ضرب یک تابع فرد در یک تابع زوج یک تابع فرد

قضیه ۲ (مجموع توابع)

ضرایب فوریه مجموع $f_1 + f_2$ برابر مجموع ضرایب فوریه متناظر توابع f_1 و f_2 است . ضرایب فوریه cf ، به ازای هر عدد ثابت c ، c برابر ضرایب فوریه تابع f می باشد .

4. (*a*) Find the Fourier coefficients corresponding to the function

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases} \qquad \text{Period} = 10$$

(*b*) Write the corresponding Fourier series.

(*c*) How should $F(x)$ be defined at $x = -5$, $x = 0$ and $x = 5$ in order that the Fourier series will converge to $F(x)$ for $-5 \leqq x \leqq 5$?

The graph of $F(x)$ is shown in Fig. 6-4 below.

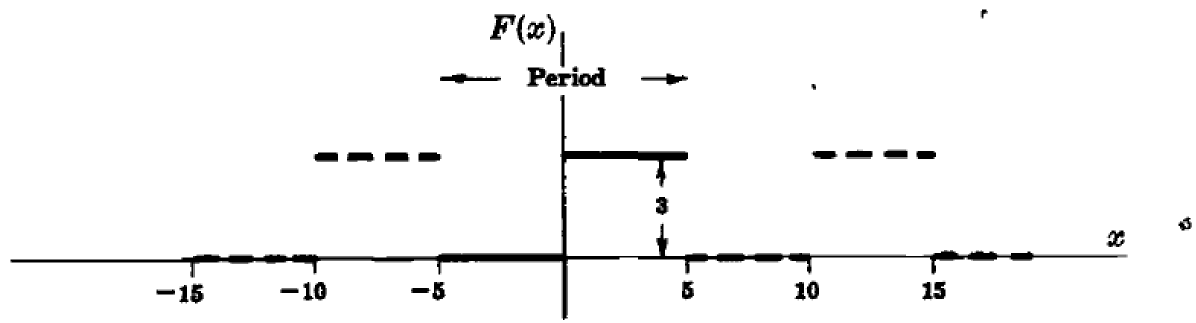


Fig. 6-4

(*a*) Period $= 2l = 10$ and $l = 5$. Choose the interval c to $c + 2l$ as -5 to 5, so that $c = -5$. Then

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} F(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_{0}^{5}(3)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx\right\} = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_0^5 = 0 \qquad \text{if } n \neq 0$$

If $n = 0$, $a_n = a_0 = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{0\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_0^5 dx = 3.$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} F(x)\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_0^5 (3)\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx\right\} = \frac{3}{5}\int_0^5 \sin\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

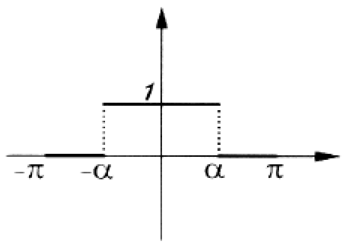
$$= \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_0^5 = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

(*b*) The corresponding Fourier series is

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \cdots\right)$$

مثال : باتوجه به سری فوریه تابع نشان داده شده در شکل مقابل، حاصل سری $I=\sum_{n=1} \frac{\sin n\alpha}{n}$ را به‌دست آورید.



حل:

$$P=2\pi \quad \to \quad L=\pi$$

تابع زوج است. پس:

$$b_n=0$$

و البته داریم:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\alpha} 1\times\cos nx\,dx+\int_{\alpha}^{\pi}(0)\cos nx\,dx\right\}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\alpha}=\frac{2}{n\pi}\sin n\alpha$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}(1)dx+\frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi}(0)dx=\frac{2\alpha}{\pi} \quad \to \quad \frac{a_0}{2}=\frac{\alpha}{\pi}$$

$$f(x)=\frac{\alpha}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n\alpha}{n\pi}\cos nx$$

$x=0$ نقطه پیوستگی تابع $f(x)$ است، طبق قضیه دیریکله داریم:

$$f(0)=\frac{\alpha}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n\alpha}{n\pi}\cos 0 \quad \to \quad 1=\frac{\alpha}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n} \quad \to \quad I=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)$$

PARSEVAL'S IDENTITY FOR FOURIER SERIES

8. Assuming that the Fourier series corresponding to $F(x)$ converges uniformly to $f(x)$ in $(-l, l)$, prove Parseval's identity

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \{F(x)\}^2\,dx \;=\; \frac{a_0^2}{2} + \sum (a_n^2 + b_n^2)$$

where the integral is assumed to exist.

If $F(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\dfrac{n\pi x}{l} + b_n \sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)$, then multiplying by $F(x)$ and integrating term by term from $-l$ to l (which is justified since the series is uniformly convergent) we obtain

$$\begin{aligned}\int_{-l}^{l} \{F(x)\}^2\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}\\ &= \frac{a_0^2}{2}l + l\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \qquad (1)\end{aligned}$$

where we have used the results

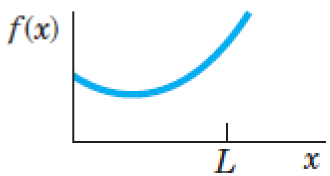
$$\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = la_n, \qquad \int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = lb_n, \qquad \int_{-l}^{l} F(x)\,dx = la_0 \qquad (2)$$

obtained from the Fourier coefficients.

The required result follows on dividing both sides of (*1*) by l. Parseval's identity is valid under less restrictive conditions than that imposed here.

بسطهای نیم دامنه ای

در کاربردهای متنوع عملی نیاز به استفاده سری فوریه برای تابع $f(x)$ ای است که بر یک فاصله مثلاً بر فاصله $0 \le x \le L$ همانطور که شکل نشان می دهد، تعریف می شود.



(0) The given function $f(x)$

گسترش $f(x)$ متناوب با دورهٔ تناوب L و دراین صورت نمایش تابع گسترش یافته را با یک سری فوریه، که در حالت کلی با جملات کسینوس و سینوس ظاهر می شوند می یابیم. برای این منظور ازتوابع کمکی می توان استفاده نمود، مثلاً توابعی که از گسترش زوج یا فرد $f(x);\ 0 \le x \le L$ حاصل می شوند. تابع

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le L \\ f(-x) & -L \le x \le 0 \end{cases}$$

و $f_1(x+2L) = f_1(x)$، یک گسترش زوج تابع $f(x)$ است (شکل 270 ب). همین طور گسترش فرد تابع را می توان به صورت زیر تعریف نمود

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le L \\ -f(-x) & -L \le x \le 0 \end{cases}$$

و $f_2(x+2L) = f_2(x)$ (شکل 270 ج). باتوجه به قضیه ۱ بخش ۱۰ .۴ تابع $f_1(x)$ دارای سری فوریه کسینوسی و تابع $f_2(x)$ دارای سری فوریه سینوسی است که در فاصلهٔ $0 \le x \le L$ با $f(x)$ برابرهستند.

برابرهستند. بدین جهت این سریهای فوریه به **بسط نیم دامنه ای** تابع $f(x)\ ;\ 0 \le x \le L$ موسوم می باشند. بنابراین بسط نیم دامنه ای کسینوسی عبارت است از

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x \qquad (1)$$

که در آن

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx,$$

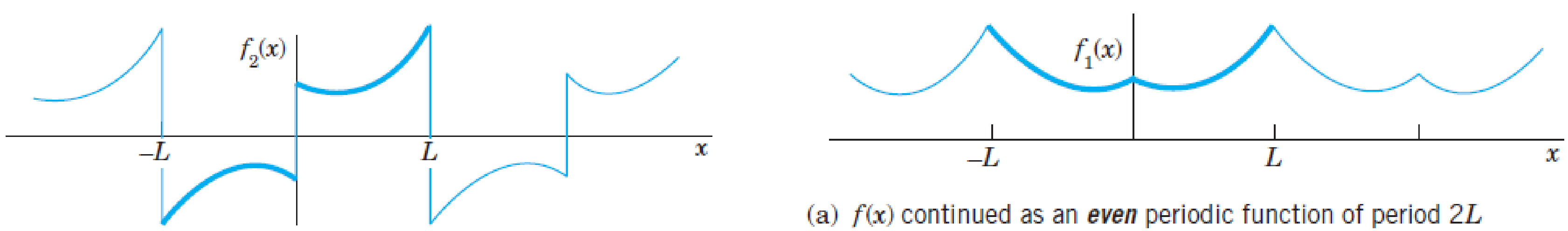
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1,2,\dots \qquad (2)$$

همین طور بسط نیم دامنه ای سینوسی به صورت زیر است

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (3)$$

که در آن

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\ ;n = 1,2,\dots \qquad (4)$$



(a) $f(x)$ continued as an ***even*** periodic function of period $2L$

(b) $f(x)$ continued as an ***odd*** periodic function of period $2L$

Fig. 270. Even and odd extensions of period $2L$

تپهٔ مثلثی و بسطهای نیم دامنه ای آن

EXAMPLE 6 “Triangle” and Its Half-Range Expansions

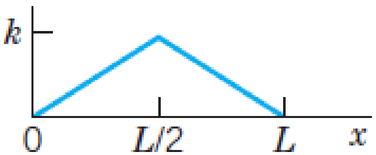


Fig. 271. The given function in Example 6

Find the two half-range expansions of the function (Fig. 271)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2k}{L}x & \text{if} \quad 0 < x < \dfrac{L}{2} \\[2ex] \dfrac{2k}{L}(L-x) & \text{if} \quad \dfrac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

Solution. (a) *Even periodic extension.* From (6*) we obtain (الف) گسترش زوج دوره ای.

$$(6^*) \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} x\,dx + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)\,dx\right] = \frac{k}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_L^{L/2} x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right].$$

We consider a_n. For the first integral we obtain by integration by parts

$$\int_0^{L/2} x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{Lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\,\Bigg|_0^{L/2} - \frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2}\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$= \frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right).$$

Similarly, for the second integral we obtain

$$\int_{L/2}^{L} (L - x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{L}{n\pi}(L - x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\Big|_{L/2}^{L} + \frac{L}{n\pi}\int_{L/2}^{L}\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$= \left(0 - \frac{L}{n\pi}\left(L - \frac{L}{2}\right)\sin\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos\ n\pi - \cos\ \frac{n\pi}{2}\right).$$

We insert these two results into the formula for a_n. The sine terms cancel and so does a factor L^2. This gives

$$a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2}\left(2\cos\ \frac{n\pi}{2} - \cos\ n\pi - 1\right).$$

Thus,

$$a_2 = -16k/(2^2\pi^2), \qquad a_6 = -16k/(6^2\pi^2), \qquad a_{10} = -16k/(10^2\pi^2), \cdots$$

and $a_n = 0$ if $n \neq 2, 6, 10, 14, \cdots$. Hence the first half-range expansion of $f(x)$ is (Fig. 272a)

$$f(x) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{L}x + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi}{L}x + \cdots\right).$$

This Fourier cosine series represents the even periodic extension of the given function $f(x)$, of period $2L$.

(ب) گسترش فرد دوره ای

$$\boxed{(6^{**}) \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.}$$

(b) ***Odd periodic extension.*** Similarly, from (6**) we obtain

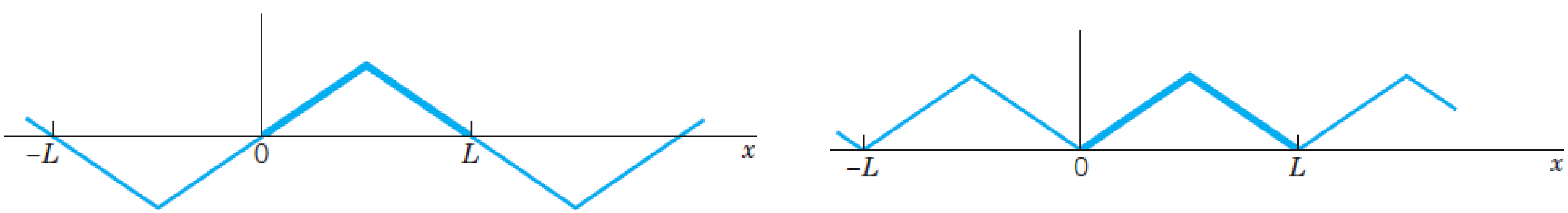
$$b_n = \frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}. \tag{5}$$

Hence the other half-range expansion of $f(x)$ is (Fig. 272b)

$$f(x) = \frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{L}x - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{L}x - + \cdots\right).$$

The series represents the odd periodic extension of $f(x)$, of period $2L$.

Basic applications of these results will be shown in Secs. 12.3 and 12.5.



(b) Odd extension

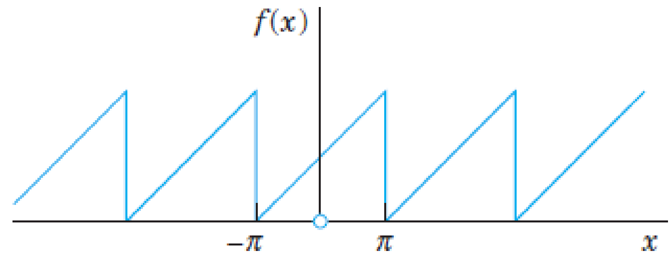
(a) Even extension

Fig. 272. Periodic extensions of $f(x)$ in Example 6

EXAMPLE 5 Sawtooth Wave

Find the Fourier series of the function (Fig. 268)

$$f(x) = x + \pi \quad \text{if} \quad -\pi < x < \pi \qquad \text{and} \qquad f(x + 2\pi) = f(x).$$



حل. با فرض $f_1(x) = x$ و $f_2(x) = \pi$ می یابیم $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. ضرایب فوریه $f_2(x)$، به غیر از ضریب جمله اول (جمله ثابت) که π برابر است، صفر می باشند. ازاین رو بنابر قضیه ۲، ضرایب فوریه a_n، b_n به جز a_0 که برابر π است، همان ضرایب فوریه $f_1(x)$ است. چون $f_1(x)$ فرد است، به ازای $n = 1, 2, \ldots$ داریم $a_n = 0$ و

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(x)\sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx \, dx .$$

با انتگرالگیری به روش جزء به جزء به دست می آوریم

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx \, dx\right] = -\frac{2}{n}\cos n\pi .$$

لذا $b_1 = 2$، $b_2 = -\frac{2}{2}$، $b_3 = \frac{2}{3}$، $b_4 = -\frac{2}{4}$، . . . ، نمایش سری فوریه $f(x)$ عبارت است از

$$f(x) = \pi + 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - + \ldots\right).$$

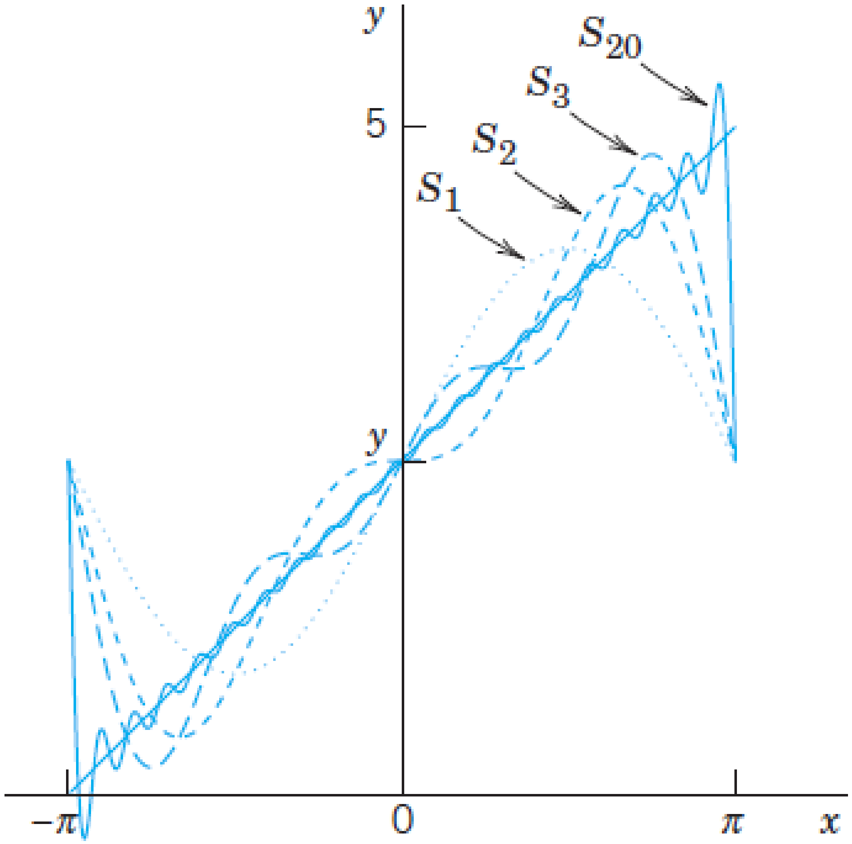


Fig. 269. Partial sums S_1, S_2, S_3, S_{20} in Example

EXAMPLE 3 Expansion in Three Series

Expand $f(x) = x^2, 0 < x < L$, **(a)** in a cosine series, **(b)** in a sine series, **(c)** in a Fourier series.

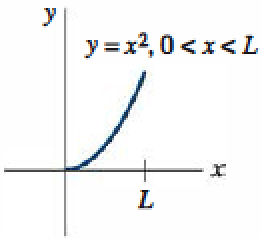


FIGURE 12.3.10 Function f in Example 3

SOLUTION The graph of the function is given in **FIGURE 12.3.10**.

(a) We have

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{2}{3}L^2, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{4L^2(-1)^n}{n^2\pi^2},$$

where integration by parts was used twice in the evaluation of a_n. Thus

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{L}x. \tag{8}$$

(b) In this case we must again integrate by parts twice:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2L^2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4L^2}{n^3\pi^3}[(-1)^n - 1].$$

Hence
$$f(x) = \frac{2L^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n - 1]\right\}\sin\frac{n\pi}{L}x. \tag{9}$$

(c) With $p = L/2$, $1/p = 2/L$, and $n\pi/p = 2n\pi/L$, we have

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{2}{3}L^2, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx = \frac{L^2}{n^2\pi^2}$$

and
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \sin\frac{2n\pi}{L}x\,dx = -\frac{L^2}{n\pi}.$$

Therefore
$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{L^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}\cos\frac{2n\pi}{L}x - \frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x\right\}. \tag{10}$$

The series (8), (9), and (10) converge to the $2L$-periodic even extension of f, the $2L$-periodic odd extension of f, and the L-periodic extension of f, respectively. The graphs of these periodic extensions are shown in **FIGURE 12.3.11**.

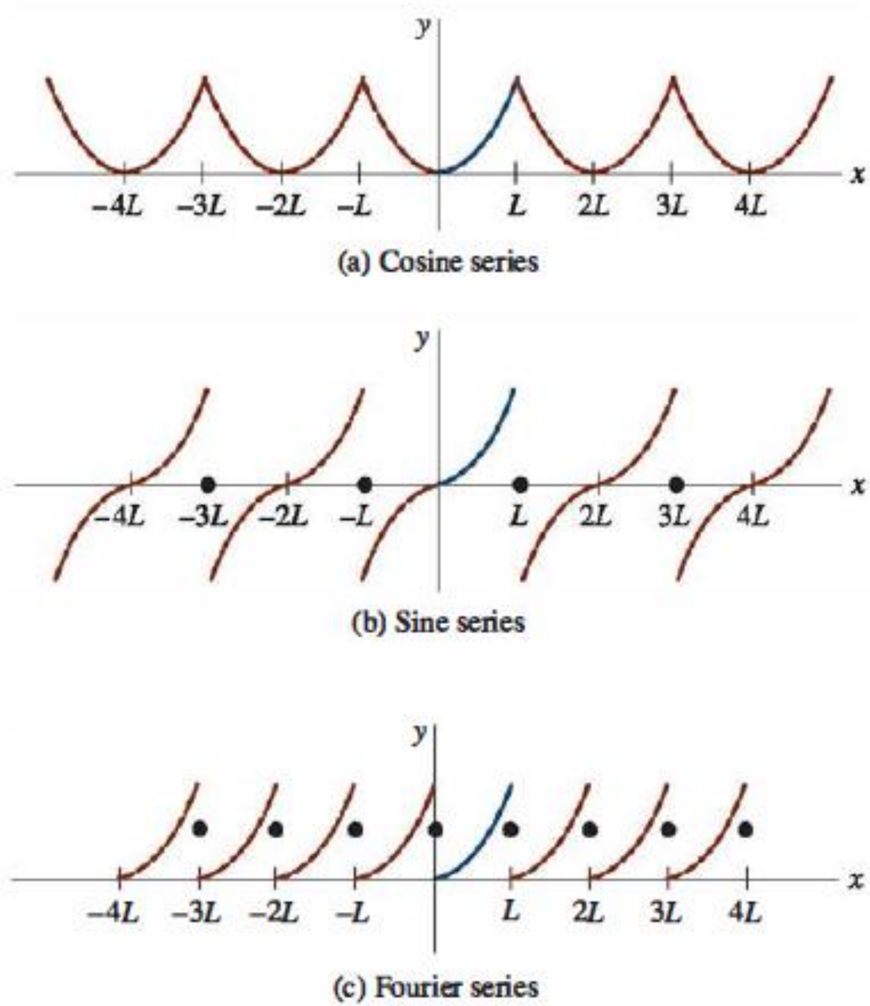


FIGURE 12.3.11 Different periodic extensions of the function f in Example 3

Complex Analysis

فصل ۱۲

اعداد مختلط . توابع تحلیلی مختلط

۱۲ . ۱ اعداد مختلط . صفحه مختلط

در زمانهای گذشته ریاضیدانان با معادلاتی به صورت $x^2 = -1$ یا $x^2 - 10x + 40 = 0$ مواجه شدند که دارای هیچ ریشه حقیقی نبودند، بررسی چگونگی حل معادلاتی که دارای ریشه های حقیقی نیستند سبب پیدایش اعداد مختلط[1] گردید.

بنا به تعریف، یک **عدد مختلط** z یک زوج مرتب (x,y) از دوعدد حقیقی x و y است.

$$z = (x,y).$$

x را **قسمت حقیقی** و y را **قسمت موهومی** z می نامند و می نویسند

$$\operatorname{Re} z = x, \operatorname{Im} z = y.$$

دو عدد مختلط **مساوی** هستند هر گاه قسمتهای حقیقی وموهومی آنها به ترتیب باهم برابر باشند.

$(0,1)$ را **یکه موهومی** می نامند و چنین قرار می دهند

$$i = (0,1). \qquad (1)$$

جمع و ضرب

چنانچه $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ تعریف می کنیم

Addition of two complex numbers $z_1 = (x_1, y_1)$ and $z_2 = (x_2, y_2)$ is defined by

$$(2) \qquad z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \quad y_1 + y_2).$$

Multiplication is defined by

$$(3) \qquad z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, \quad x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

In practice, complex numbers $z = (x, y)$ are written

$$i^2 = -1$$

$$(4) \qquad z = x + iy$$

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).\end{aligned}$$

EXAMPLE 1 **Real Part, Imaginary Part, Sum and Product of Complex Numbers**

Let $z_1 = 8 + 3i$ and $z_2 = 9 - 2i$. Then $\operatorname{Re} z_1 = 8$, $\operatorname{Im} z_1 = 3$, $\operatorname{Re} z_2 = 9$, $\operatorname{Im} z_2 = -2$ and

$$z_1 + z_2 = (8 + 3i) + (9 - 2i) = 17 + i,$$

$$z_1 z_2 = (8 + 3i)(9 - 2i) = 72 + 6 + i(-16 + 27) = 78 + 11i.$$

تفریق وتقسیم به عنوان اپراتورهای معکوس جمع و ضرب تعریف می شوند.

Subtraction, Division

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

The **quotient** $z = z_1/z_2$ $(z_2 \neq 0)$ is the complex number z for which $z_1 = zz_2$. If we equate the real and the imaginary parts on both sides of this equation, setting $z = x + iy$, we obtain $x_1 = x_2x - y_2y$, $y_1 = y_2x + x_2y$. The solution is

$$\text{(7*)} \qquad z = \frac{z_1}{z_2} = x + iy, \qquad x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

The *practical rule* used to get this is by multiplying numerator and denominator of z_1/z_2 by $x_2 - iy_2$ and simplifying:

$$\text{(7)} \qquad z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

EXAMPLE 2 **Difference and Quotient of Complex Numbers**

For $z_1 = 8 + 3i$ and $z_2 = 9 - 2i$ we get $z_1 - z_2 = (8 + 3i) - (9 - 2i) = -1 + 5i$ and

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8 + 3i}{9 - 2i} = \frac{(8 + 3i)(9 + 2i)}{(9 - 2i)(9 + 2i)} = \frac{66 + 43i}{81 + 4} = \frac{66}{85} + \frac{43}{85}i.$$

خواص جمع و ضرب اعداد مختلط همانند جمع و ضرب اعداد حقیقی می باشد، برای اعداد مختلط دلخواه z_1 ، z_2 و z_3 نتایج زیر را داریم (دراینجا $-z = -x - iy$ و $0 = (0,0)$):

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 = z_2 z_1 \end{cases}$$ (قوانین جابجایی)

$$\begin{cases} (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \end{cases}$$ (قوانین شرکت پذیری)

(۸)

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$ (قانون توزیع پذیری)

$$z + 0 = 0 + z = z$$

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

$$z.1 = z$$

مزدوج اعداد مختلط . مزدوج عدد مختلط $z = x + iy$ را به صورت نمایش $\bar{z}$ می دهند و به صورت زیر تعریف می کنند

$$\bar{z} = x - iy .$$

ازنظرهندسی $\bar{z}$ منعکس z نسبت به محور حقیقی می باشد.

Complex Plane صفحة مختلط

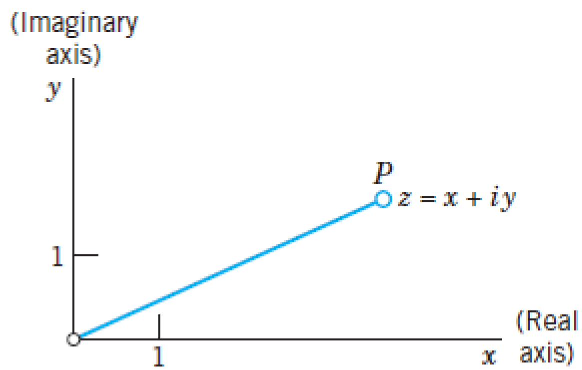


Fig. 318. The complex plane

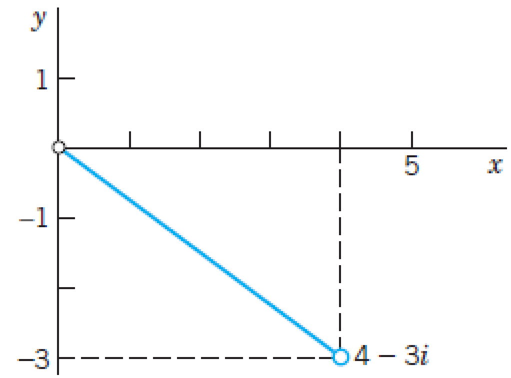


Fig. 319. The number $4 - 3i$ in the complex plane

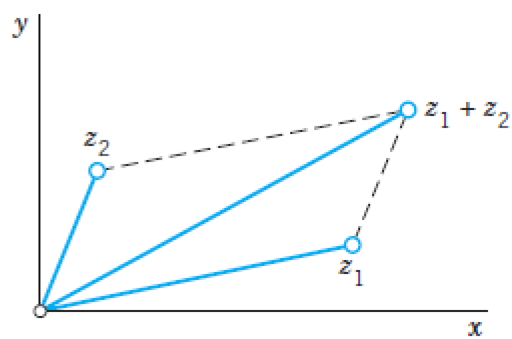


Fig. 320. Addition of complex numbers

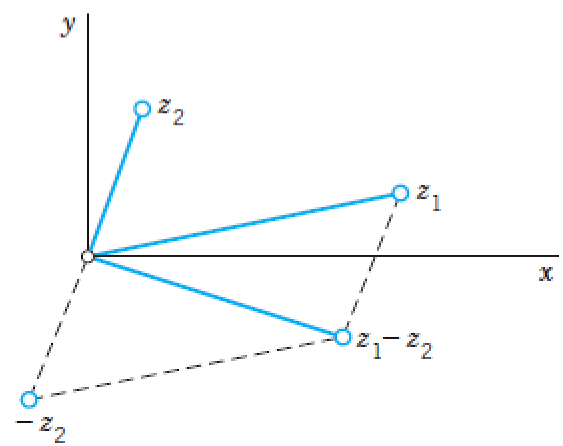


Fig. 321. Subtraction of complex numbers

با توجه به تعریف مزدوج یک عدد مختلط داریم $z\bar{z} = x^2 + y^2$ که یک عدد حقیقی است، این خاصیت در بسیاری اوقات مثلاً در تقسیم اعداد مختلط کاربرد دارد. به علاوه، با جمع وتفریق z و $\bar{z}$ می یابیم $z+\bar{z} = 2x$ و $z-\bar{z} = 2iy$. بنابراین می توان نوشت

$$\operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}). \tag{۹}$$

هرگاه z یک عدد حقیقی باشد، یعنی $z = x$ ، آنگاه بنا به (۹)، $\bar{z} = z$ و برعکس. کار کردن با مزدوج آسان است، مثلاً داریم

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$
$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \tag{۱۰}$$

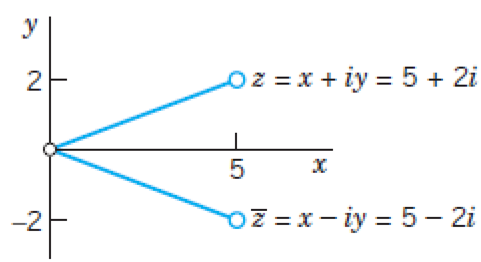


Fig. 322. Complex conjugate numbers

EXAMPLE 3 Illustration of (8) and (9)

Let $z_1 = 4 + 3i$ and $z_2 = 2 + 5i$. Then by (8),

$$\operatorname{Im} z_1 = \frac{1}{2i}[(4 + 3i) - (4 - 3i)] = \frac{3i + 3i}{2i} = 3.$$

Also, the multiplication formula in (9) is verified by

$$\overline{(z_1 z_2)} = \overline{(4 + 3i)(2 + 5i)} = \overline{(-7 + 26i)} = -7 - 26i,$$

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (4 - 3i)(2 - 5i) = -7 - 26i.$$

Polar Form of Complex Numbers. Powers and Roots

۲.۱۲ شکل قطبی اعدادمختلط . توانها و ریشه ها

(1) $$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

We see that then $z = x + iy$ takes the so-called **polar form**

(2) $$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

r is called the **absolute value** or **modulus** of z and is denoted by $|z|$. Hence

(3) $$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

از نظر هندسی، $|z|$ فاصله z از مبداء مختصات می باشد

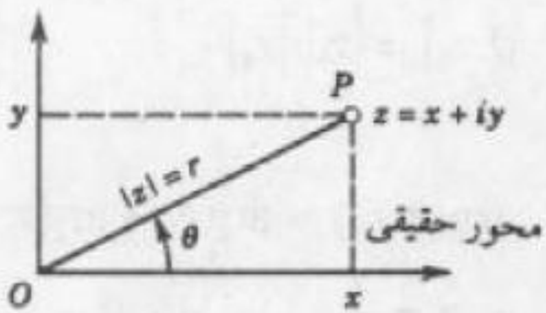
$|z_1 - z_2|$ فاصله بین z_1 و z_2 است

θ را **آرگومان** z می نامند و بانماد $\arg$ نمایش می دهند.

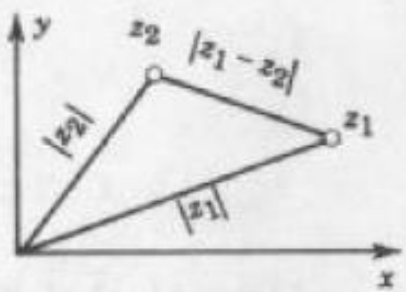
$$\theta = \arg z = \arctan\frac{y}{x}\ ;\ z \neq 0.$$

ازنظرهندسی، θ زاویهٔ جهت دار بین محور x مثبت و OP درشکل ۲۸۷ می باشد.

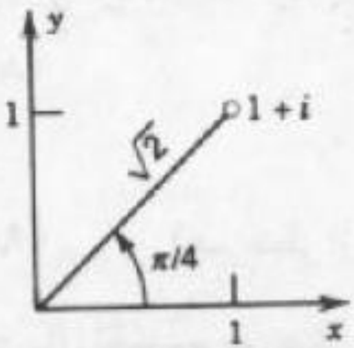
$$-\pi < \operatorname{Arg} z \leqq \pi.$$



شکل ۲۸۷ . صفحه مختلط، شکل قطبی یک عدد مختلط



شکل ۲۸۸ . فاصله بین دو عدد مختلط در صفحه مختلط



شکل ۲۸۹ . مثال ۱

مثال ۱ . شکل قطبی اعداد مختلط . مقدار اصلی

فرض کنید $z = ۱ + i$ (ر. ك. شکل ۲۸۹)، آنگاه

$$z = \sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴});\ |z| = \sqrt{۲}, \arg z = \frac{\pi}{۴} \pm ۲n\pi, n = ۰, ۱, \ldots .$$

مقدار اصلی آرگومان برابر است با $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{۴}$. مقادیر دیگر عبارت اند از $\frac{-۷\pi}{۴}$ ، $\frac{۹\pi}{۴}$ ونظایر آن .

OPERATIONS IN POLAR FORM. DE MOIVRE'S THEOREM

If $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ and $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, we can show that

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \tag{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\} \tag{4}$$

$$z^n = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{5}$$

where n is any real number. Equation (5) is often called *De Moivre's theorem.*

In terms of *Euler's formula*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

we can write (3), (4) and (5) in the suggestive forms

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{6}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{7}$$

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \tag{8}$$

مثال۵ . فرمول دموآور

به ازای $|z| = r = 1$ ، فرمول (۱۳) به فرمول زیر معروف به **فرمول دموآور**[۷]

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \mathrm{con}\, n\theta + i\sin n\theta \qquad (۱۳^*)$$

منجر می گردد. این فرمول برای بسط $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ برحسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ مفید می باشد. برای مثال، اگر $n = 2$ و قسمتهای حقیقی و قسمتهای موهومی از دو طرف رابطه (۱۳*) را نظیر به نظیر باهم مساوی قرار دهیم، نتایج زیر حاصل می شوند

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \ , \qquad \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta,$$

3. Solve $z^3 - 2z - 4 = 0$.

The possible rational roots are $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. By trial we find $z = 2$ is a root. Then the given equation can be written $(z-2)(z^2 + 2z + 2) = 0$. The solutions to the *quadratic equation* $az^2 + bz + c = 0$ are $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. For $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ this gives $z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$.

The set of solutions is $2, -1 + i, -1 - i$.

ضرب وتقسیم درمختصات قطبی

شکل قطبی اعداد مختلط در ضرب وتقسیم مفید می باشد. فرض کنید

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{و} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

حال **ضرب** اعداد فوق را مورد مطالعه قرارمی دهیم. بنا به (۳)، بخش ۱۲ . ۱ حاصلضرب عبارت است از

$$z_1z_2 = r_1r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

و ازآنجا داریم

$$z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]. \qquad (۷)$$

با گرفتن قدر مطلق و آرگومان از دو طرف رابطه (۷)، نتایج مهم زیر حاصل می شوند

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2| \qquad (۸)$$

و

$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad \text{(صرفنظر از مضرب } 2\pi\text{)}. \qquad (۹)$$

حال **تقسیم** دو عدد مختلط فوق را مورد بررسی قرارمی دهیم. عدد مختلط $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ در تساوی $zz_2 = z_1$ صدق می کند. از اینرو $|z_1| = |z|\,|z_2| = |zz_2|$، $\arg(zz_2) = \arg z + \arg z_2 = \arg z_1$. لذا می یابیم

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0) \qquad (۱۰)$$

مفاهیم مربوط به مجموعه ها در صفحهٔ مختلط

نواحی در صفحه مختلط:

فاصله بین دو نقطه z و $z_.$ عبارت است از $|z - z_.|$,بنابراین دایره به شعاع ε و مرکز $z_.$ را به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$\{z; z \in \mathbb{C}, |z - z_.| = \varepsilon\}$$

و نامساوی $\varepsilon > |z - z_.|$,نقاط درونی دایره فوق رانشان می دهد. چنین ناحیه ای را قرص دایره ای باز و نامساوی $\varepsilon \geq |z - z_.|$که شامل نقاط درونی و خود دایره است را قرص دایره ای بسته می نامیم.قرص باز یک εهمسایگی از $z_.$ نیز نامیده می شود وآنرا با $N_\varepsilon(Z_.)$نشان می دهیم.

$$N_\varepsilon(Z_.)=\{Z; Z\epsilon\mathbb{C}, |z - z_.| < \varepsilon\}$$

نامساوی $\varepsilon < |z - z_.|$ نقاط بیرونی دایره و $\varepsilon_1 < |z - z_.| < \varepsilon_2$ ناحیه بین دو دایره متحدالمرکز به شعاع های ε_1 و ε_2 را نشان میدهد که به آن طوق باز می گوییم.

8. Express each function in the form $u(x, y) + i\,v(x, y)$, where u and v are real:

(a) z^3, (b) $1/(1-z)$, (c) e^{3z}, (d) $\ln z$.

(a) $w = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$

$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

Then $u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3.$

(b) $$w = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(x+iy)} = \frac{1}{1-x-iy}\cdot\frac{1-x+iy}{1-x+iy} = \frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}$$

Then $$u(x, y) = \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}, \quad v(x, y) = \frac{y}{(1-x)^2+y^2}.$$

(c) $e^{3z} = e^{3(x+iy)} = e^{3x}e^{3iy} = e^{3x}(\cos 3y + i \sin 3y)$ and $u = e^{3x}\cos 3y$, $v = e^{3x}\sin 3y$

(d) $\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\tan^{-1} y/x$ and

$$u = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \qquad v = \tan^{-1} y/x$$

Note that $\ln z$ is a multiple-valued function (in this case it is *infinitely* many-valued) since θ can be increased by any multiple of 2π. The *principal value* of the logarithm is defined as that value for which $0 \leq \theta < 2\pi$ and is called the *principal branch* of $\ln z$.

تابع مختلط

درآغاز از حساب دیفرانسیل وانتگرال یادآور می شویم که یک تابع **حقیقی** f که بر مجموعه S ازاعداد حقیقی (معمولاً یک بازه) تعریف شده، قاعده ای است که به هر x در S یک عدد حقیقی $f(x)$ نسبت می دهد. $f(x)$ رامقدار تابع f در x می نامند.

می نویسیم

$$w = f(z).$$

اینجا z در S تغییر می کند ومتغیر مختلط نامیده می شود. مجموعه S را **دامنه تعریف** f[۹] می نامند.

مجموعهٔ همهٔ مقادیر تابع f را **برد** f می نامند.

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

مثال۱ . تابع یک متغیرمختلط

هرگاه $w = f(z) = z^۲ + ۳z$ ، آنگاه u و v را طوری بیابید که $w = u + iv$ ومقدار w را به ازای $z = ۱ + ۳i$ محاسبه کنید.

حل. $u = \text{Re } f(z) = x^۲ - y^۲ + ۳x$ و $v = ۲xy + ۳y$. همچنین،

$$f(۱+۳i) = (۱+۳i)^۲ + ۳(۱+۳i) = ۱ - ۹ + ۶i + ۳ + ۹i = -۵ + ۱۵i.$$

این مطلب نشان می دهد که $u(۱,۳) = -۵$ و $v(۱,۳) = ۱۵$.

سری فوریه مختلط

دراین بخش نشان می دهیم که سری فوریه

$$f(x) = a_\circ + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (۱)$$

با انجام برخی محاسبات ساده قابل بیان به صورت مختلط می باشد(مثال ۱ در ذیل ملاحظه کنید). این عمل به کمک فرمول اویلر(۸)، بخش ۲ . ۳.

$$e^{it} = \cos t + i\sin t$$

ومزدوج آن

$$e^{-it} = \cos t - i\sin t$$

صورت می گیرد. با قرار دادن $t = nx$ داریم

$$e^{inx} = \cos nx + i\sin nx, \qquad (۲)$$

$$e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx\,. \qquad (۳)$$

با جمع دو رابطه وتقسیم بر ۲ داریم

$$\cos nx = \frac{۱}{۲}(e^{inx} + e^{-inx}). \qquad (۴)$$

با تفریق دو رابطه و تقسیم بر $۲i$ و باتوجه به تساوی $\frac{۱}{i} = -i$ می یابیم

$$\sin nx = \frac{۱}{۲i}(e^{inx} - e^{-inx}) = -\frac{i}{۲}(e^{inx} - e^{-inx}). \qquad (۵)$$

باتوجه به (۴) و (۵) می توان نوشت

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{۱}{۲} a_n (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{۱}{۲i} b_n (e^{inx} - e^{-inx})$$

$$= \frac{۱}{۲}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{۱}{۲}(a_n + ib_n)e^{-inx}.$$

وازآنجا، (۱) به صورت زیر درمی آید

$$f(x) = c_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty}(c_n e^{inx} + k_n e^{-inx}) \qquad (۶)$$

کـه در آن $c_۰ = a_۰$ ، $c_n = \frac{۱}{۲}(a_n - ib_n)$ ، و $k_n = \frac{۱}{۲}(a_n + ib_n)$ ، و ازآنجــا بنـا به (۶)، بخش ۲.۱۰ داریم

$$c_n = \frac{۱}{۲}(a_n - ib_n) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,$$

$$n = ۱,۲,.... \qquad (۷)$$

$$k_n = \frac{۱}{۲}(a_n + ib_n) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx,$$

با فرض $k_n = c_{-n}$ فرمولهای (۶) و (۷) به صورت زیر خلاصه می شوند

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},}$$

$$n = ۰,\pm۱,\pm۲,.... \qquad (۸)$$

$$\boxed{c_n = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,}$$

این سری را **صورت مختلط سری فوریه** یا به اختصار **سری فوریه مختلط** و c_n ها را **ضرایب مختلط فوریه** $f(x)$ می نامند.

EXAMPLE 1 Complex Fourier Series

Expand $f(x) = e^{-x}$, $-\pi < x < \pi$, in a complex Fourier series.

SOLUTION With $p = \pi$, (8) gives

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(in+1)x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi(in+1)}\left[e^{-(in+1)\pi} - e^{(in+1)\pi}\right].$$

We can simplify the coefficients c_n somewhat using Euler's formula:

$$e^{-(in+1)\pi} = e^{-\pi}(\cos n\pi - i\sin n\pi) = (-1)^n e^{-\pi}$$

and

$$e^{(in+1)\pi} = e^{\pi}(\cos n\pi + i\sin n\pi) = (-1)^n e^{\pi},$$

since $\cos n\pi = (-1)^n$ and $\sin n\pi = 0$. Hence

$$c_n = (-1)^n \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2(in+1)\pi} = (-1)^n \frac{\sinh \pi}{\pi}\frac{1-in}{n^2+1}. \tag{9}$$

The complex Fourier series is then

$$f(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1-in}{n^2+1} e^{inx}. \tag{10}$$ ≡

The series (10) converges to the 2π-periodic extension of f.

۹۰۱۰ انتگرالهای فوریه

سریهای فوریه ابزار پرقدرتی برای حل مسائل گوناگونی است که شامل توابع دوره ای هستند.

بیان کلی و در یک نگاه انتگرال فوریه:

رفتار یک تابع غیر تناوبی که در فاصله $(-\infty, +\infty)$ تعریف شده است را نمی توان از طریق یک سری فوریه توصیف نموده. اما اگر $f(x)$ در فاصله $(-\infty, +\infty)$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد یعنی $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$، آنگاه $f(x)$ را می توان در قالب یک بیان انتگرالی از جملات سینوسی و کسینوسی که به انتگرال فوریه تابع مرسوم است به فرم زیر نوشت :

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]\, dw. \tag{5}$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\, dv, \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv\, dv \tag{4}$$

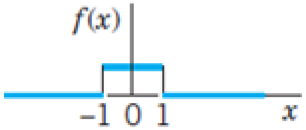
نظر به اینکه بسیاری از مسائل علمی شامل توابع متناوب نیستند ، بجاست که روش های سری فوریه را طوری تعمیم دهیم که توابع نامتناوب را نیز در بر بگیرند .

به عبارت ساده اگر تابع $f_T(x)$ با دوره ی تناوب T را داشته باشیم و T را به سمت بی نهایت میل دهیم آنگاه تابع $f(x)$ حاصل متناوب نخواهد بود . این مطلب را با ارائه مثال زیر روشن می کنیم .

EXAMPLE 1 **Rectangular Wave**

Consider the periodic rectangular wave $f_L(x)$ of period $2L > 2$ given by

$$f_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad -L < x < -1 \\ 1 & \text{if} \quad -1 < x < \quad 1 \\ 0 & \text{if} \quad \quad 1 < x < L. \end{cases}$$



The left part of Fig. 280 shows this function for $2L = 4, 8, 16$ as well as the nonperiodic function $f(x)$, which we obtain from f_L if we let $L \to \infty$,

$$f(x) = \lim_{L \to \infty} f_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We now explore what happens to the Fourier coefficients of f_L as L increases. Since f_L is even, $b_n = 0$ for all n. For a_n the Euler formulas (6), Sec. 11.2, give

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\,\frac{\sin(n\pi/L)}{n\pi/L}.$$

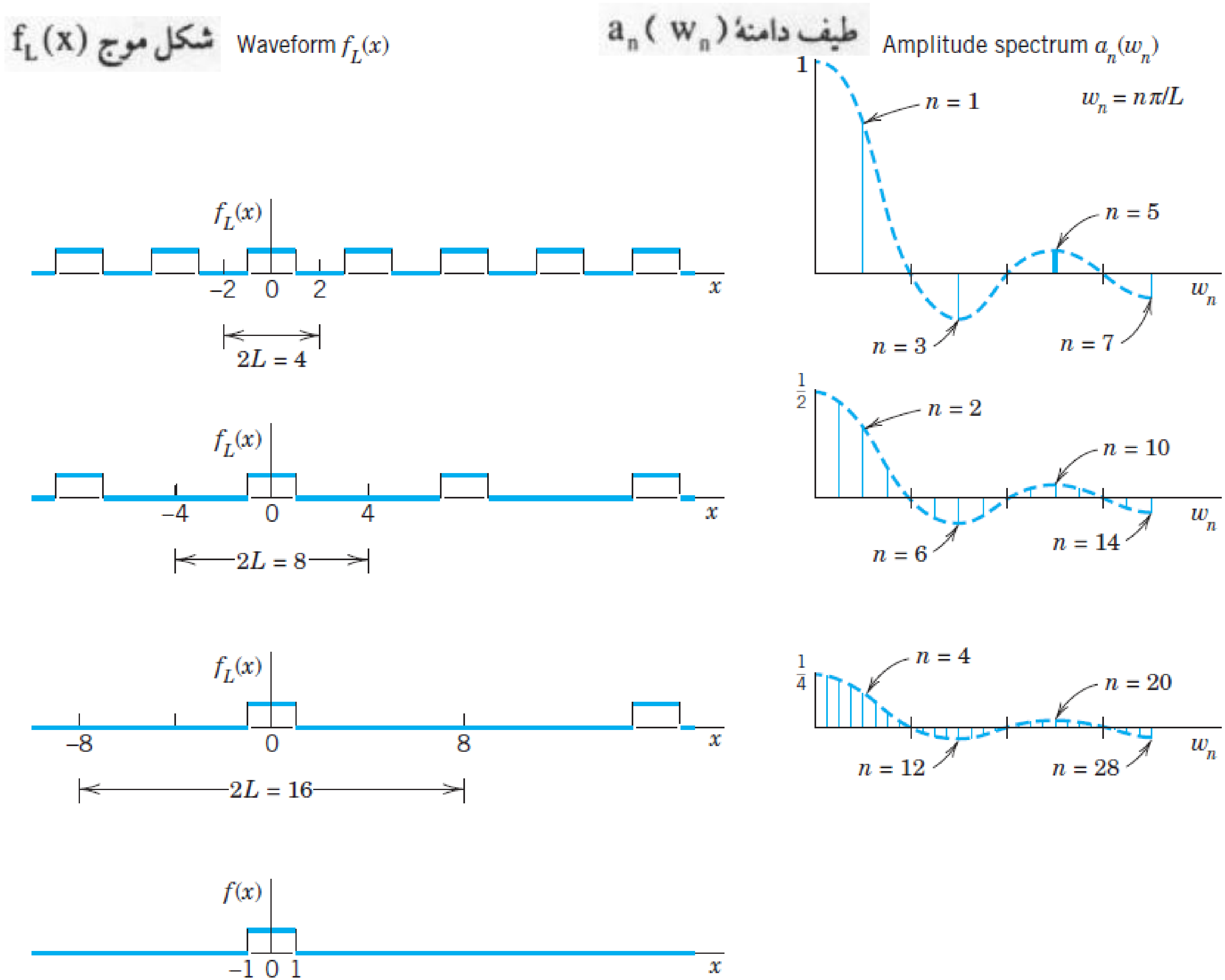


Fig. 280. Waveforms and amplitude spectra in Example 1

From Fourier Series to Fourier Integral

We now consider any periodic function $f_L(x)$ of period $2L$ that can be represented by a Fourier series

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x), \qquad w_n = \frac{n\pi}{L}$$

با قرار دادن ضرایب داریم :

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(v)\,\mathrm{d}v + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(v)\cos\omega_n v\,dv\right)\cos\omega_n x + \left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(v)\sin\omega_n v\,dv\right)\sin\omega_n x\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(\mathrm{n}+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \\ &\rightarrow \frac{1}{L} = \frac{\Delta\omega_n}{\pi} \qquad (*) \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow f(\mathrm{x}) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(v)dv + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta\omega_n}{\pi}\int_{-L}^{L} f(v)\cos\omega_n v\,dv\right)\cos\omega_n x + \left(\frac{\Delta\omega_n}{\pi}\int_{-L}^{L} f(v)\sin\omega_n v\,dv\right)\sin\omega_n x$$

حال چنانچه داشته باشیم :

$$L \to \infty \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{1}{L} \to 0 \\ \Delta\omega_n \to 0 \end{array} \right.$$

بنابراین می توان نوشت :

$$f(\mathrm{x}) = 0 + \lim_{\Delta\omega_n \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} f(v) \cos \omega_n v \, dv \right) \cos \omega_n x \, \Delta\omega_n + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} f(v) \sin \omega_n v \, dv \right) \sin \omega_n x \, \Delta\omega_n \right]$$

$$\to f(\mathrm{x}) = \int_0^{\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \cos \omega_n v \, dv \right)}_{=A(\omega)} \cos \omega_n x \, d\omega_n + \underbrace{\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \sin \omega_n v \, dv \right)}_{=B(\omega)} \sin \omega_n x \, d\omega_n \right]$$

$$\boxed{\to \begin{cases} 1. f(\mathrm{x}) = \int_0^{\infty} (\mathrm{A}(\omega) \cos \omega_n \, \mathrm{x} + B(\omega) \sin \omega_n \, \mathrm{x}) \, \mathrm{d}\omega_n \\ 2. \mathrm{A}(\omega) = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \cos \omega_n v \, dv \\ 3. B(\omega) = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \sin \omega_n v \, dv \end{cases}}$$

این نمایشی از f(x) است که انتگرال فوریه نامیده می شود .

تپه منفرد، انتگرال سینوسی، فاکتور انفصال دیریکله. دیده گیبس:

EXAMPLE 2 **Single Pulse, Sine Integral. Dirichlet's Discontinuous Factor. Gibbs Phenomenon**

Find the Fourier integral representation of the function

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{if} \quad |x| > 1 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 281)}$$

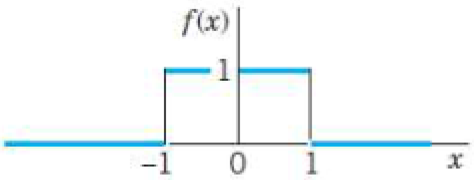


Fig. 281. Example 2

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\cos\omega v\, dv = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(v)\cos\omega v\, dv + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-1} 0\times\cos\omega v d v + \frac{1}{\pi}\int_{1}^{\infty} 0\times\cos\omega v d v$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\omega v d v = \frac{1}{\omega\pi}\sin\omega v \,|_{-1}^{1}$$

$$A(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\sin\omega v\,\mathrm{d}v+\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-1} 0\times\sin\omega v dv}_{=0}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} 1\times\sin\omega v dv+\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{1}^{\infty} 0\times\sin\omega v dv}_{=0}$$

$$=\frac{-1}{\omega\pi}\cos\omega v\,|_{-1}^{1}=0$$

$$\therefore \qquad f(\mathrm{x})=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega\mathrm{x}+\mathrm{B}(\omega)\sin\omega\mathrm{x}\mathrm{d}\omega \Rightarrow$$

$$* f(\mathrm{x})=\int_0^\infty \frac{2\sin\omega\cos\omega}{\pi\omega}d\omega$$

میانگین حدود چپ و راست f(x) در ۱ = x برابر $\frac{۱}{۲}(۱+۰)$ یا مساوی $\frac{۱}{۲}$ است.

Furthermore, from (6) and Theorem 1 we obtain (multiply by $\pi/2$)

$$\text{(7)} \qquad \int_0^\infty \frac{\cos wx \sin w}{w}dw=\begin{cases}\pi/2 & \text{if} \quad 0\leqq x<1,\\ \pi/4 & \text{if} \quad x=1,\\ 0 & \text{if} \quad x>1.\end{cases}$$

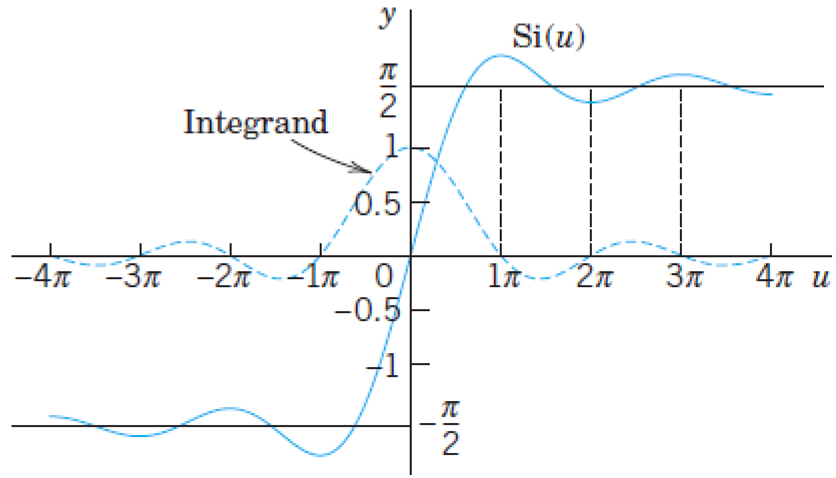


Fig. 282. Sine integral Si(*u*) and integrand

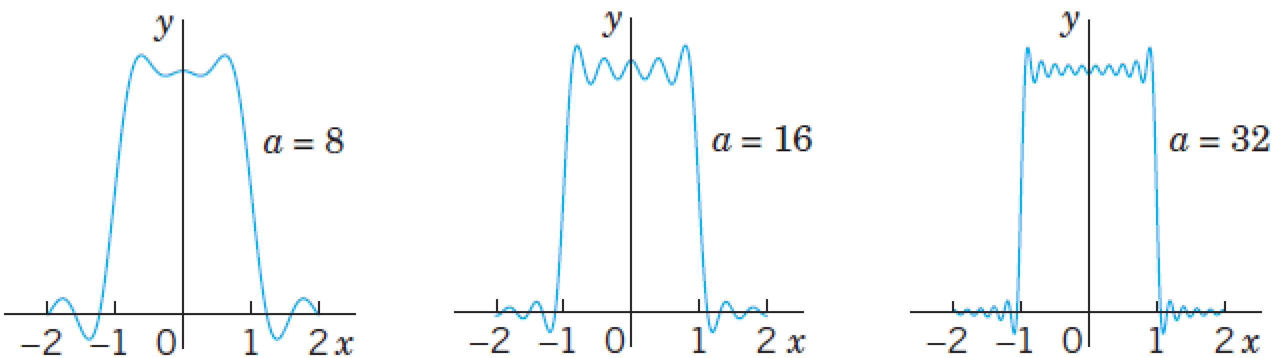


Fig. 283. The integral (9) for $a = 8, 16$, and 32, illustrating the development of the Gibbs phenomenon

انتگرالهای سینوسی وکسینوسی فوریه

برای هرتابع زوج یا فرد انتگرال فوریه ساده تر می شود. دقیقاً دراین حالت نیز مانند سریهای فوریه (Sec. 11.2) محاسبات کاهش می یابد. در واقع اگر f(x) یک تابع زوج باشد، آنگاه $B(w) = 0$ و در(۴) داریم

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos wv\,dv. \qquad (۱۰)$$

وانتگرال فوریه (۵) به صورت زیر درمی آید که به **انتگرال کسینوسی فوریه** موسوم است.

$$f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw \qquad (\text{زوج } f). \qquad (۱۰)$$

به طریق مشابه، اگر f(x) فرد باشد، آنگاه $A(w) = 0$ و در(۴) داریم

$$B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin wv\,dv. \qquad (۱۱)$$

وانتگرال فوریه (۵) به شکل زیر درمی آید که آن را **انتگرال سینوسی فوریه** می نامند

$$f(x) = \int_0^\infty B(w)\sin wx\,dw \qquad (\text{فرد } f). \qquad (۱۱)$$

مطابق تساوی پارسوال در انتگرالهای فوریه داریم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx = \int_0^{\infty}\left(A^2(\omega)+B^2(\omega)\right)d\omega$$

محاسبه انتگرالها

ازنمایش انتگرال فوریه برای محاسبه برخی انتگرالها استفاده می کنیم. چگونگی انجام این کار را با ارائه مثال زیر روشن می کنیم.

EXAMPLE 3

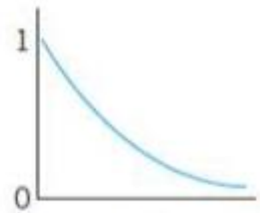


Fig. 284. $f(x)$ in Example 3

Laplace Integrals

We shall derive the Fourier cosine and Fourier sine integrals of $f(x) = e^{-kx}$, where $x > 0$ and $k > 0$ (Fig. 284). The result will be used to evaluate the so-called Laplace integrals.

Solution. (a) From (10) we have $A(w) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty e^{-kv}\cos wv\,dv$. Now, by integration by parts,

$$f(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{-kx}\ ; k > 0\ , x > 0$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)\cos\omega v\,\mathrm{d}v = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-kv}\left[\frac{e^{i\omega v} + e^{-i\omega v}}{2}\right]dv = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\infty} e^{-(\mathrm{k}-\mathrm{i}\omega)v}dv + \int_0^{\infty} e^{-(\mathrm{k}+\mathrm{i}\omega)v}dv\right]$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{-(\mathrm{k}-\mathrm{i}\,\omega)}e^{-(\mathrm{k}-\mathrm{i}\omega)v}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{-(\mathrm{k}+\mathrm{i}\,\omega)}e^{-(\mathrm{k}+\mathrm{i}\omega)v}\Big|_0^{\infty}\right]$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{1}{\pi}\left[\left(0 - \frac{1}{-k - i\omega}e^{\circ}\right) + \left(0 - \frac{1}{-(\mathrm{k}+\mathrm{i}\,\omega)}e^{\circ}\right)\right]$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{k + i\omega + k - i\omega}{k^2 + \omega^2}\right] \ \Rightarrow\ A(\omega) = \frac{\frac{2k}{\pi}}{k^2 + \omega^2}$$

Then :

$$f(\mathrm{x}) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega\mathrm{x}\,\mathrm{d}\,\omega = \int_0^{\infty}\frac{\frac{2k}{\pi}}{\omega^2 + k^2}\cos\omega x\,d\omega$$

$$\frac{f(\mathrm{x}) = e^{-kx}}{\frac{2k}{\pi}} = \int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\,d\omega}{k^2 + \omega^2} \rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x\,d\omega}{k^2 + \omega^2} = \frac{\pi e^{-kx}}{2k}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos wx}{k^2 + w^2}dw = \frac{\pi}{2k}e^{-kx} \qquad (x > 0,\quad k > 0). \qquad \textbf{(13)}$$

به همین ترتیب می توان نوشت :

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)\sin\omega v\,dv=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-kv}\left(\frac{e^{i\omega v}-e^{-i\omega v}}{2i}\right)dv$$

$$=\frac{1}{\pi i}\left[\int_0^{\infty} e^{-(\mathrm{k}-\mathrm{i}\omega)v}dv-\int_0^{\infty} e^{-(\mathrm{k}-\mathrm{i}\omega)v}dv\right]$$

$$=\frac{1}{\pi i}\left[\frac{1}{-(\mathrm{k}-\mathrm{i}\,\omega)}e^{-(\mathrm{k}-\mathrm{i}\omega)v}\Big|_0^{\infty}-\frac{1}{-(\mathrm{k}+\mathrm{i}\,\omega)}e^{-(\mathrm{k}+\mathrm{i}\omega)v}\Big|_0^{\infty}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi i}\left[\frac{1}{k-i\omega}-\frac{1}{k+i\omega}\right]=\frac{1}{\pi i}\left[\frac{2i\omega}{k^2+\omega^2}\right]$$

Then :

$$f(\mathrm{x})=e^{-kx}=\int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega\,\mathrm{x}\,\mathrm{d}\,\omega$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\sin\omega x\,d\omega\;\Rightarrow\;\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{k^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi\,e^{-kx}}{2}$$

$$\boxed{\int_0^{\infty}\frac{w\sin wx}{k^2+w^2}dw=\frac{\pi}{2}e^{-kx}\qquad (x>0,\quad k>0).\qquad (15)}$$

The integrals (13) and (15) are called the **Laplace integrals.**

شروع مسائل تکمیلی

EXAMPLE 1 Periodic Rectangular Wave

Find the Fourier series of the function

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad -2 < x < -1 \\ k & \text{if} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{if} \quad 1 < x < 2 \end{cases} \qquad p = 2L = 4, \quad L = 2.$$

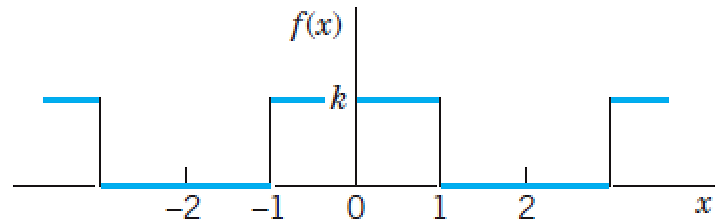


Fig. 263. Example 1

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} k\,dx = \frac{k}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \Longrightarrow \quad a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Thus $a_n = 0$ if n is even and

$$a_n = 2k/n\pi \quad \text{if} \quad n = 1, 5, 9, \cdots, \qquad a_n = -2k/n\pi \quad \text{if} \quad n = 3, 7, 11, \cdots.$$

From (6b) we find that $b_n = 0$ for $n = 1, 2, \cdots$. Hence the Fourier series is a **Fourier cosine series** (that is, it has no sine terms)

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x - + \cdots\right). \qquad \blacksquare$$

مثال۲ . یکسو کننده نیم موج

یک ولتاژ سینوسی $E\sin\omega t$ ، که در آن t به معنی زمان است، ازیکسو کنندهٔ نیم موجی که قسمت منفی موج را حذف می کند می گذرد . سری فوریه تابع متناوب حاصل

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad -L < t < 0, \\ E\sin\omega t & \text{if} \quad 0 < t < L \end{cases} \qquad p = 2L = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad L = \frac{\pi}{\omega}.$$

را بیابید .

Solution. Since $u = 0$ when $-L < t < 0$, we obtain from (6.0), with t instead of x,

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \longrightarrow a_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\sin\omega t\,dt = \frac{E}{\pi}$$

and from (6a), by using formula (11) in App. A3.1 with $x = \omega t$ and $y = n\omega t$,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \longrightarrow$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\sin\omega t\cos n\omega t\,dt = \frac{\omega E}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega} [\sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t]\,dt.$$

If $n = 1$, the integral on the right is zero, and if $n = 2, 3, \cdots$, we readily obtain

$$a_n = \frac{\omega E}{2\pi}\left[-\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega} - \frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega}\right]_0^{\pi/\omega}$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left(\frac{-\cos(1+n)\pi + 1}{1+n} + \frac{-\cos(1-n)\pi + 1}{1-n}\right).$$

If n is odd, this is equal to zero, and for even n we have

$$a_n = \frac{E}{2\pi}\left(\frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n}\right) = -\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi} \qquad (n = 2, 4, \cdots).$$

In a similar fashion we find from (6b) that $b_1 = E/2$ and $b_n = 0$ for $n = 2, 3, \cdots$. Consequently,

$$u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\sin\omega t - \frac{2E}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \cdots\right).$$

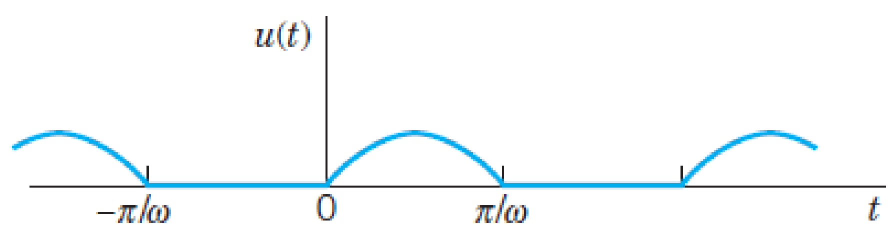


Fig. 265. Half-wave rectifier

5. Expand $F(x) = x^2, 0 < x < 2\pi$ in a Fourier series if (a) the period is 2π, (b) the period is not specified.

(a) The graph of $F(x)$ with period 2π is shown in Fig. 6-5 below.

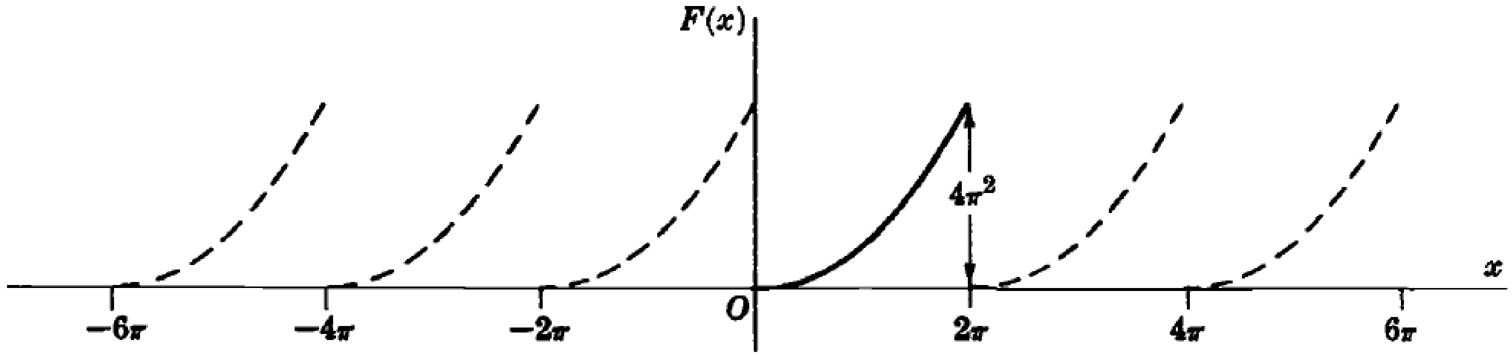


Fig. 6-5

Period $= 2l = 2\pi$ and $l = \pi$. Choosing $c = 0$, we have

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(x^2)\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - (2x)\left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{-\sin nx}{n^3}\right)\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}, \qquad n \neq 0$$

If $n = 0$, $\quad a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \dfrac{8\pi^2}{3}$.

$$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(x^2)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - (2x)\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right) + (2)\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right\}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{-4\pi}{n}$$

Then $\quad F(x) = x^2 = \dfrac{4\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$.

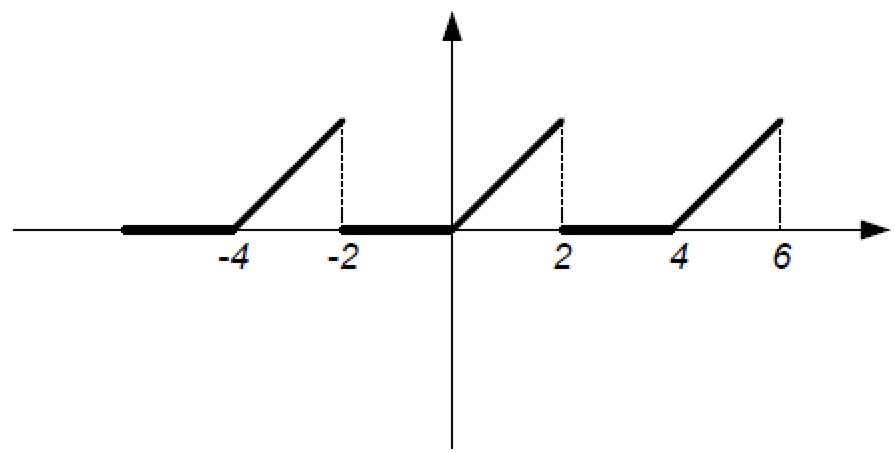
This is valid for $0 < x < 2\pi$. At $x = 0$ and $x = 2\pi$ the series converges to $2\pi^2$.

(*b*) If the period is not specified, the Fourier series cannot be determined uniquely in general.

مثال : تابع متناوب معادله ی $f(t)=\begin{cases}0 & -2<t<0\\ 2t & 0<t<2\end{cases}$ را با دوره تناوب T=4 در نظر بگیرید .

الف) شکل تابع را برای چند دوره تناوب رسم کنید .

ب) بسط فوریه تابع را بنویسید .



$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)=t+|t| \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$f_2(t)=t \ \ is \ \ odd \to \ a_0=0\,, a_n=0$$

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\ \sin n\omega t\,dt=\int_0^2 t\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt=-\frac{4}{n\pi}(-1)^n=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$f_2(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \sin\frac{n\pi t}{2}$$

$$f_2(t) = \frac{4}{\pi}(\frac{1}{1}\sin\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi t}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{\pi t}{3} - \cdots)$$

$$f_1(t) = |t| \text{ is even}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^2 f_1(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 t dt = 1$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^2 t\cos n\omega t\,dt = \int_0^2 t\cos\frac{n\pi t}{2}dt = \frac{4}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & n \text{ is even} \\ \dfrac{-8}{(n\pi)^2} & n \text{ is odd} \end{cases}$$

$$f_1(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi t}{2} = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi t}{2} =$$

$$1 - \frac{8}{\pi^2}(\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{1}{3^2}\cos^3\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5^2}\cos^5\frac{5\pi t}{2} + \cdots)$$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{1}{3^2}\cos^3\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5^2}\cos^5\frac{5\pi t}{2} + \cdots\right) + \frac{4}{\pi}(\frac{1}{1}\sin\frac{\pi t}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi t}{2} + \cdots)$$

Example 7.2 A periodic function $f(t)$ with period 2π is defined by

$$f(t) = t^2 + t \quad (-\pi < t < \pi), \qquad f(t) = f(t + 2\pi)$$

Sketch a graph of the function $f(t)$ for values of t from $t = -3\pi$ to $t = 3\pi$ and obtain a Fourier series expansion of the function.

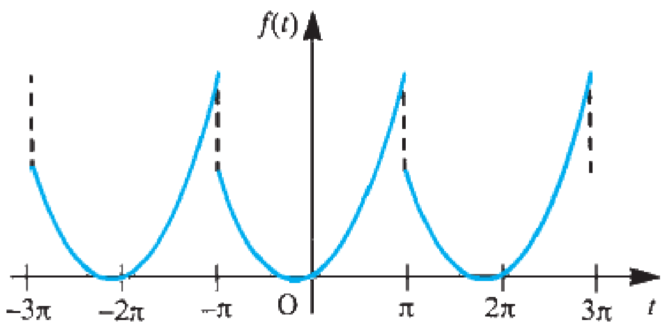


Figure 7.3 Graph of the function $f(t)$ of Example 7.2.

Solution A graph of the function $f(t)$ for $-3\pi < t < 3\pi$ is shown in Figure 7.3. From (7.15) we have

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{2}{3}\pi^2$$

and

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + t)\cos nt\,\mathrm{d}t$$

which, on integration by parts, gives

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{n}\sin nt + \frac{2t}{n^2}\cos nt - \frac{2}{n^3}\sin nt + \frac{t}{n}\sin nt + \frac{1}{n^2}\cos nt\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{4\pi}{n^2}\cos n\pi \quad \left(\text{since } \sin n\pi = 0 \text{ and } \left[\frac{1}{n^2}\cos nt\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\right)$$

$$= \frac{4}{n^2}(-1)^n \qquad (\text{since } \cos n\pi = (-1)^n)$$

From (7.16)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + t)\sin nt\,\mathrm{d}t$$

which, on integration by parts, gives

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t^2}{n}\cos nt + \frac{2t}{n^2}\sin nt + \frac{2}{n^3}\cos nt - \frac{t}{n}\cos nt + \frac{1}{n^2}\sin nt\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n \quad (\text{since } \cos n\pi = (-1)^n)$$

Hence from (7.14) the Fourier series expansion of $f(t)$ is

$$f(t) = \tfrac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^n \sin nt$$

or, in expanded form,

$$f(t) = \tfrac{1}{3}\pi^2 + 4\left(-\cos \mathrm{t} + \frac{\cos 2t}{2^2} - \frac{\cos 3t}{3^2} + \ldots\right) + 2\left(\sin t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} \ldots\right)$$

To illustrate the alternative approach, using (7.13) gives

$$a_n + \mathrm{j}b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}nt}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t^2 + t}{\mathrm{j}n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}nt}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2t + 1}{\mathrm{j}n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}nt}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2 + t}{\mathrm{j}n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}nt} - \frac{2t + 1}{(\mathrm{j}n)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}nt} + \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{j}nt}}{(\mathrm{j}n)^3}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Since

$$e^{jn\pi} = \cos n\pi + j\sin n\pi = (-1)^n$$

$$e^{-jn\pi} = \cos n\pi - j\sin n\pi = (-1)^n$$

and

$$1/j = -j$$

$$a_n + jb_n = \frac{(-1)^n}{\pi}\left(-j\frac{\pi^2+\pi}{n} + \frac{2\pi+1}{n^2} + \frac{j2}{n^3} + j\frac{\pi^2-\pi}{n} - \frac{1-2\pi}{n^2} - \frac{j2}{n^3}\right)$$

$$= (-1)^n\left(\frac{4}{n^2} - j\frac{2}{n}\right)$$

Equating real and imaginary parts gives, as before,

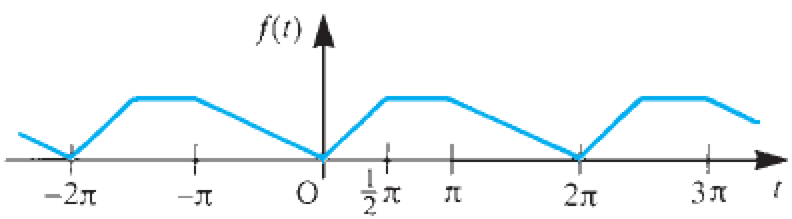
$$a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n, \qquad b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

Example 7.3 A periodic function $f(t)$ of period 2π is defined within the period $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ by

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\pi) \\ \frac{1}{2}\pi & (\frac{1}{2}\pi \leqslant t \leqslant \pi) \\ \pi - \frac{1}{2}t & (\pi \leqslant t \leqslant 2\pi) \end{cases}$$

Sketch a graph of $f(t)$ for $-2\pi \leqslant t \leqslant 3\pi$ and find a Fourier series expansion of it.

Figure 7.5 Graph of the function $f(t)$ of Example 7.3.



Solution A graph of the function $f(t)$ for $-2\pi \leqslant t \leqslant 3\pi$ is shown in Figure 7.5. From (7.15),

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} t\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi} \tfrac{1}{2}\pi\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} (\pi - \tfrac{1}{2}t)\,\mathrm{d}t\right] = \tfrac{5}{8}\pi$$

and

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} t\cos nt\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi} \tfrac{1}{2}\pi\cos nt\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} (\pi - \tfrac{1}{2}t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t}{n}\sin nt + \frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\pi}{2n}\sin nt\right]_{\pi/2}^{\pi} + \left[\frac{2\pi - t}{2}\,\frac{\sin nt}{n} - \frac{\cos nt}{2n^2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\sin\tfrac{1}{2}n\pi + \frac{1}{n^2}\cos\tfrac{1}{2}n\pi - \frac{1}{n^2} - \frac{\pi}{2n}\sin\tfrac{1}{2}n\pi - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}\cos n\pi\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi n^2}(2\cos\tfrac{1}{2}n\pi - 3 + \cos n\pi)$$

that is,

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi n^2}[(-1)^{n/2} - 1] & (\text{even } n) \\[2ex] -\dfrac{2}{\pi n^2} & (\text{odd } n) \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} t\sin nt\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi} \tfrac{1}{2}\pi\sin nt\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi}\left(\pi - \frac{1}{2}t\right)\sin nt\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{t}{n}\cos nt + \frac{1}{n^2}\sin nt\right]_0^{\pi/2} + \left[-\frac{\pi}{2n}\cos nt\right]_{\pi/2}^{\pi}\right.$$

$$\left. + \left[\frac{t-2\pi}{2n}\cos nt - \frac{1}{2n^2}\sin nt\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\cos\tfrac{1}{2}n\pi + \frac{1}{n^2}\sin\tfrac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{2n}\cos n\pi + \frac{\pi}{2n}\cos\tfrac{1}{2}n\pi + \frac{\pi}{2n}\cos n\pi\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\sin\tfrac{1}{2}n\pi$$

$$= \begin{cases} 0 & (\text{even } n) \\ \dfrac{(-1)^{(n-1)/2}}{\pi n^2} & (\text{odd } n) \end{cases}$$

Hence from (7.14) the Fourier series expansion of $f(t)$ is

$$f(t) = \tfrac{5}{16}\pi - \frac{2}{\pi}\left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \dots\right)$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 6t}{6^2} + \frac{\cos 10t}{10^2} + \dots\right)$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\sin t - \frac{\sin 3t}{3^2} + \frac{\sin 5t}{5^2} - \frac{\sin 7t}{7^2} + \dots\right)$$

Example 7.5 A periodic function $f(t)$ with period 2π is defined as

$$f(t) = t^2 \quad (-\pi < t < \pi), \qquad f(t) = f(t + 2\pi)$$

Obtain a Fourier series expansion for it.

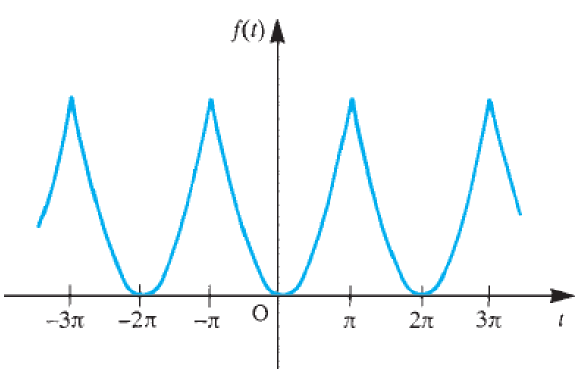
Solution A sketch of the function $f(t)$ over the interval $-3\pi < t < 3\pi$ is shown in Figure 7.8. Clearly, $f(t)$ is an even function of t, so that its Fourier series expansion consists of cosine terms only. Taking $T = 2\pi$, that is $\omega = 1$, in (7.17) and (7.18), the Fourier series expansion is given by

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

with

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \tfrac{2}{3}\pi^2$$

Figure 7.8 The function $f(t)$ of Example 7.5.



and

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2}{n}\sin nt + \frac{2t}{n^2}\cos nt - \frac{2}{n^3}\sin nt\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi\right) = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

since $\sin n\pi = 0$ and $\cos n\pi = (-1)^n$. Thus the Fourier series expansion of $f(t) = t^2$ is

$$f(t) = \tfrac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt \qquad \textbf{(7.22)}$$

or, writing out the first few terms,

$$f(t) = \tfrac{1}{3}\pi^2 - 4\cos t + \cos 2t - \tfrac{4}{9}\cos 3t + \ldots$$

Example 7.8 A periodic function $f(t)$ of period 2 is defined by

$$f(t) = \begin{cases} 3t & (0 < t < 1) \\ 3 & (1 < t < 2) \end{cases}$$

$$f(t + 2) = f(t)$$

Sketch a graph of $f(t)$ for $-4 \leqslant t \leqslant 4$ and determine a Fourier series expansion for the function.

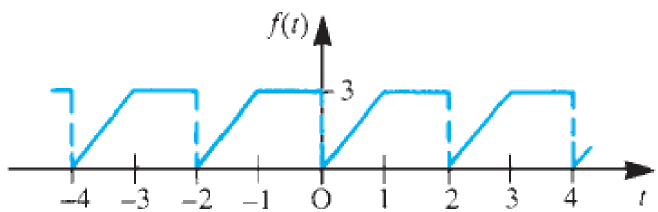


Figure 7.11 The function $f(t)$ of Example 7.8.

Solution A graph of $f(t)$ for $-4 \leqslant t \leqslant 4$ is shown in Figure 7.11. Taking $T = 2$ in (7.4) and (7.5), we have

$$a_0 = \tfrac{2}{2}\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 3t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 3\,\mathrm{d}t = \tfrac{9}{2}$$

$$a_n = \tfrac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos\frac{n\pi t}{1}\,\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= \int_0^1 3t\cos n\pi t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 3\cos n\pi t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{3t\sin n\pi t}{n\pi} + \frac{3\cos n\pi t}{(n\pi)^2}\right]_0^1 + \left[\frac{3\sin n\pi t}{n\pi}\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 & (\text{even } n) \\ -6/(n\pi)^2 & (\text{odd } n) \end{cases}$$

and

$$b_n = \tfrac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin\frac{n\pi t}{1}\,\mathrm{d}t \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= \int_0^1 3t\sin n\pi t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 3\sin n\pi t\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[-\frac{3\cos n\pi t}{n\pi} + \frac{3\sin n\pi t}{(n\pi)^2}\right]_0^1 + \left[-\frac{3\cos n\pi t}{n\pi}\right]_1^2 = -\frac{3}{n\pi}\cos 2n\pi = -\frac{3}{n\pi}$$

Thus, from (7.3), the Fourier series expansion of $f(t)$ is

$$f(t) = \tfrac{9}{4} - \frac{6}{\pi^2}\left(\cos\pi t + \tfrac{1}{9}\cos 3\pi t + \tfrac{1}{25}\cos 5\pi t + \dots\right)$$

$$-\frac{3}{\pi}\left(\sin\pi t + \tfrac{1}{2}\sin 2\pi t + \tfrac{1}{3}\sin 3\pi t + \dots\right)$$

$$= \tfrac{9}{4} - \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi t}{(2n-1)^2} - \frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi t}{n}$$

Example 7.9 Obtain the Fourier series expansion of the rectified sine wave

$$f(t) = |\sin t|$$

Solution A sketch of the wave over the interval $-\pi < t < 2\pi$ is shown in Figure 7.12. Clearly, $f(t)$ is periodic with period π. Taking $T = \pi$, that is, $\omega = 2$, in (7.3)–(7.5) the Fourier series expansion is given by

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nt$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \, \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}$$

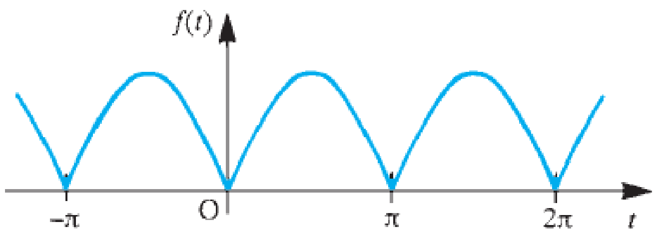


Figure 7.12 Rectified wave $f(t) = |\sin t|$.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cos 2nt \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(2n+1)t - \sin(2n-1)t] \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos 2(n+1)t}{2n+1} + \frac{\cos 2(n-1)t}{2n-1}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) - \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right)\right] = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$$

Thus the Fourier series expansion of $f(t)$ is

$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nt$$

or, writing out the first few terms,

$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\tfrac{1}{3}\cos 2t + \tfrac{1}{15}\cos 4t + \tfrac{1}{35}\cos 6t + \ldots\right)$$

7. Expand $F(x) = x,\ 0 < x < 2,$ in a half range (*a*) sine series, (*b*) cosine series.

(*a*) Extend the definition of the given function to that of the odd function of period 4 shown in Fig. 6-6 below. This is sometimes called the *odd extension* of $F(x)$. Then $2l = 4,\ l = 2$.

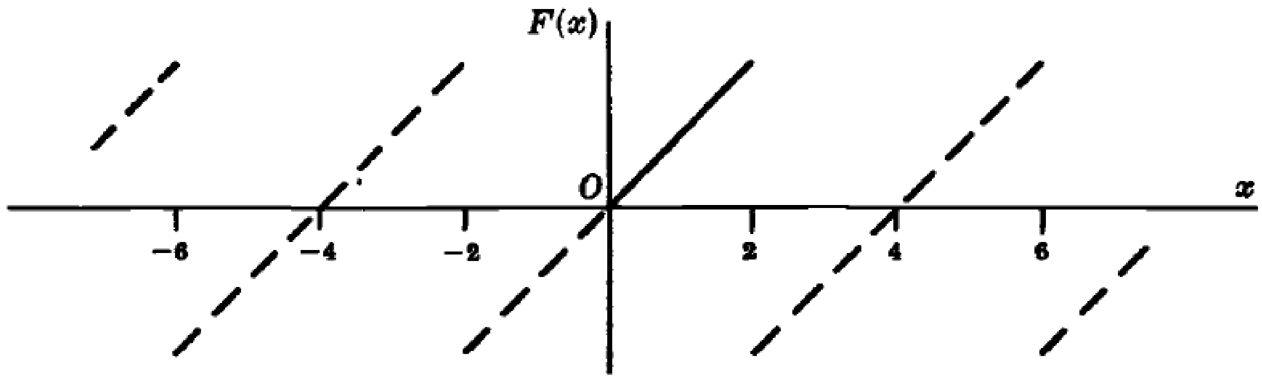


Fig. 6-6

Thus $a_n = 0$ and

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left\{(x)\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2 = \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi$$

Then $$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} - \cdots\right)$$

(*b*) Extend the definition of $F(x)$ to that of the even function of period 4 shown in Fig. 6-7 below. This is the *even extension* of $F(x)$. Then $2l = 4$, $l = 2$.

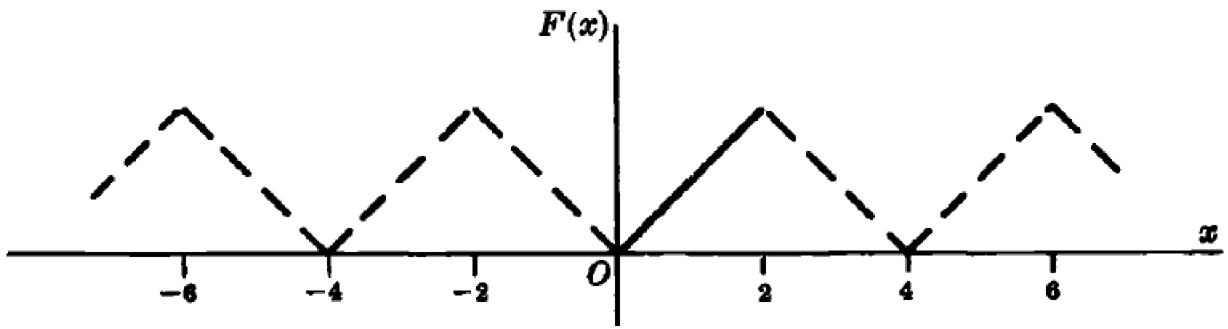


Fig. 6-7

Thus $b_n = 0$,

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx$$

$$= \left\{(x)\left(\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \qquad \text{if } n \neq 0$$

If $n = 0$, $\quad a_0 \;=\; \int_0^2 x\,dx \;=\; 2.$

Then $$F(x) \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

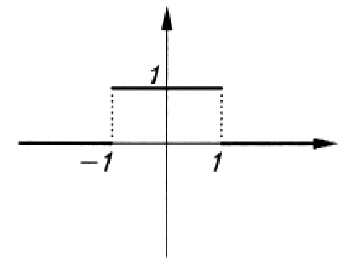
$$= \;1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

It should be noted that the given function $F(x) = x$, $0 < x < 2$, is represented *equally well* by the two *different* series in (a) and (b).

مثال : باتوجه به انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ;|x|<1\\ 0 & ;|x|>1\end{cases}$ که به صورت $f(x)=\int_0^\infty \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}\cos\omega x\,d\omega$ است. مطلوبست

محاسبه انتگرال‌های $I=\int_0^\infty \frac{\sin x^6}{x}dx$ و $J=\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

حل : در $x=0$ مطابق قضیه دیریکله داریم:



$$\underbrace{f(\cancel{0})}_{1}=\int_0^\infty \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}\underbrace{\cancel{\cos}\,\omega 0}_{1}\,d\omega \to \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2} \quad *$$

با تغییر متغیر $\omega=x^6$ داریم: $d\omega=6x^5\,dx$

$$\omega=0 \to x=0 \quad , \quad \omega=\infty \to x=\infty$$

پس با بازنویسی * به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^6}{x^6}6x^5\,dx=\frac{\pi}{2} \to I=\int_0^\infty \frac{\sin x^6}{x}dx=\frac{\pi}{12}$$

مطابق تساوی پارسوال در انتگرالهای فوریه داریم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f^2(x)dx=\int_0^\infty\left(A^2(\omega)+B^2(\omega)\right)d\omega \to$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty (1)^2\,dx=\int_0^\infty\left(\frac{2\sin\omega}{\pi\omega}\right)^2 d\omega \to \frac{2}{\pi}=\int_0^\infty \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 d\omega \to$$

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 d\omega=\frac{\pi}{2} \to J=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}$$

پایان مسائل تکمیلی

فصل ۱۲ (ادامه)

اعداد مختلط . توابع تحلیلی مختلط

Complex Analysis

توابع تحلیلی

توابع تحلیلی توابعی هستند که در برخی دامنه ها مشتق‌پذیر هستند.

یا تابع $f(z)$ را روی ناحیه ی R ازصفحه ی اعداد مختلط تحلیلی مینامیم هر گاه در تمام نقاط R مشتق پذیر باشد.

تعریف (تحلیلی بودن)

تابع f را در دامنهٔ D تحلیلی نامند هر گاه $f(z)$ در تمام نقاط D تعریف شده و مشتقپذیر باشد.

تابع f را درنقطه $z = z_0$ واقع در D تحلیلی نامند هر گاه $f(z)$ در یک همسایگی z_0 تحلیلی باشد.

از اینرو تحلیلی بودن $f(z)$ درنقطهٔ z_0 بدین معنا است که $f(z)$ درهرنقطه از یک همسایگی z_0 باشد.

(منجمله خود z_0 زیرا، بنا به تعریف، z_0 نقطه ای ازتمام همسایگی هایش می باشد) مشتق داشته

مثال۵. چند جمله ایها، توابع گویا

توانهای صحیح ۱، z، z^2، . . . و کلیترازآن، **چند جمله ایها**، یعنی توابعی به صورت

$$f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + ... + c_nz^n$$

که در آنها c_0، c_1، . . . ، c_n مقادیر ثابت مختلط هستند. درتمام صفحهٔ مختلط تحلیلی می‌باشند.

نسبت دو چند جمله ای $g(z)$ و $h(z)$، یعنی

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

را **تابع گویا** می نامند. تابع f مفروض درتمام صفحه مختلط، به جزنقاطی که درمعادله $h(z) = 0$ صدق می کنند، تحلیلی است؛ دراینجا فرض برآن است که عاملهای مشترك توابع g و h را حذف نموده ایم.

مثال : ایا تابع $f(z) = |z|^2$ تحلیلی است ؟

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)\overline{(z+\Delta z)} - z\bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\bar{z} + z\overline{\Delta z} + \Delta z \bar{z} + \Delta z \overline{\Delta z} - z\bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.z + \bar{z} + \overline{\Delta z})$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.z + \lim_{\Delta z \to 0} \bar{z} + \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z} = \begin{cases} +1z + \bar{z} \\ -1z + \bar{z} \end{cases}$$

پس فقط در z=0 مشتق پدیر است و در هیچ ناحیه ای تحلیلی نیست.

۱۲ . ۵ معادلات کوشی – ریمان

در این بخش کوشش می کنیم معیار یا آزمون جالبی برای تحلیلی بودن تابع مختلط

$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

بیابیم . اگر بخواهیم به طور غیر دقیق صحبت کنیم ، تابع f در دامنهٔ D تحلیلی است اگر وفقط اگر مشتقات جزئی مرتبهٔ اول u و v در سراسر D در دو معادله زیر صدق کنند

$$u_x = v_y \ , \ u_y = -v_x , \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ و } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}} \qquad (۱)$$

دراینجا $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ، $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ (ومشابهاً برای v) نمادهایی هستند که برای مشتقات جزئی بکارگرفته می شوند . صورت دقیق مطالب فوق در قضایای ۱ و ۲ به شرح زیر ارائه می شوند . معادلات (۱) را **معادلات کوشی – ریمان** می نامند . این معادلات ازمعادلات بسیار مهم این فصل هستند.[۱۰]

مثــال: $f(z) = z^۲ = x^۲ - y^۲ + ۲ixy$ به ازای هر z تحلیلی است ، و $u = x^۲ - y^۲$ و $v = ۲xy$ در (۱) صدق می کنند؛ یعنی $u_x = ۲x = v_y$ وهمینطور $u_y = -۲y = -v_x$.

توجه: قضیه اول کوشی ریمان نمی‌گوید تابع $f(z)$ در چه نقاطی مشتق‌پذیر است. بلکه می‌گوید اگر $f(z)$ در نقطه‌ای مثل z_0 مشتق‌پذیر باشد، $f'(z_0)$ را چگونه می‌توان به‌دست آورد.

نکته 1 : شرط لازم برای اینکه تابع $f(z) = u + iv$ مشتق ÷ذیر باشد آن است که شرایط کوشی ریمان برقرار باشد .

نکته 2 : توجه شود که برقراری روابط کوشی ریمان برای مشتق پذیری تابع کافی نیست و شرایط کافی بکمک قضیه زیر است .

قضیه :

اگر مشتقات جزئی u و v نسبت به x و y در $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در نقطه (x_0,y_0) موجود و پیوسته باشند و در رابطه یکوشی ریمان صدق کنند آنگاه $f'(z_0)$ موجود است .

قضیه ۲(معادلات کوشی - ریمان)

هرگاه دوتابع پیوسته حقیقی $u(x,y)$ و $v(x,y)$ ازدومتغیر حقیقی x و y دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اول **پیوسته** ای باشند که دردامنه ای مثل D درمعادلات کوشی - ریمان صدق کنند، آنگاه تابع مختلط $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در D تحلیلی است .

توجه:مطابق قضیه دوم کوشی ریمان، برقراری معادلات کوشی ریمان، شرط لازم ولی غیرکافی برای مشتق‌پذیری یک تابع مختلط می‌باشند. بنابراین عدم برقراری این معادلات در یک نقطه، عدم مشتق‌پذیری تابع مختلط مورد نظر را در آن نقطه تضمین می‌کند.

معادلات کوشی ریمان به شکل قطبی :

اگر z=x+iy را به شکل قطبی در نظر بگیریم :

$$x = rcos\theta \quad ,y = rsin\theta \quad ,r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ,\theta = tg^{-1}(\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}.cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}cos\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}sin\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}cos\theta$$

$$r = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{y}{\tan\theta} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{-\left(1 + \tan^2\theta\right)}{\tan^2\theta} = \frac{\frac{-1}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{-y}{\sin^2\theta} = \frac{-r\sin\theta}{\sin^2\theta} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{r}\sin\theta$$

بنابر معادلات کوشی ریمان داریم :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\rightarrow\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)cos\theta-\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)sin\theta=0\quad(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\rightarrow\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)sin\theta+\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)cos\theta=0\ (2)$$

طرفین تساوی های **1** و **2** را به ترتیب در $cos\theta$ و $sin\theta$ ضرب کرده و با هم جمع می کنیم . لذا داریم :

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}}$$

به طور مشابه طرفین تساوی **1** و**2** را به ترتیب در $sin\theta$ – و $cos\theta$ ضرب کرده و خواهیم داشت :

$$\boldsymbol{\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}}$$

که روابط کوشی ریمان در مختصات قطبی هستند .

مثال۱ . معادلات کوشی - ریمان

تابع با ضابطه $f(z) = z^2$ به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است . به آسانی نتیجه می شود که این تابع در معادلات کوشی - ریمان صدق می کنند .

برای $f(z) = \bar{z} = x - iy$ داریم $u = x$ و $v = -y$. مشاهده می کنیم که معادله دوم کوشی- ریمان برقراراست، یعنی $u_y = -v_x = 0$ اما معادله اول برقرارنیست . زیرا $u_x = 1 \neq v_y = -1$ درنتیجه $f(z) = \bar{z}$ تحلیلی نیست .

مثال۲ . معادلات کوشی - ریمان

آیا $f(z) = z^3$ تحلیلی است ؟

حل. داریم $u = x^3 - 3xy^2$ و $v = 3x^2y - y^3$ وازآنجا

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 \ , \ \ v_y = 3x^2 - 3y^2$$

$$u_y = -6xy \qquad , \ \ v_x = 6xy.$$

مشاهده می کنیم که معادلات کوشی - ریمان به ازای هر z برقراراست . لذا بنا به قضیه ۲ ، $f(z) = z^3$ به ازای تمام مقادیر z تحلیلی است .

مثال۳. تعیین تابع تحلیلی با قسمت حقیقی مفروض

تابع تحلیلی f را چنان بیابید که قسمت حقیقی آن $u = x^۲ - y^۲ - x$ باشد.

حل. بنا به اولین معادله کوشی - ریمن داریم

$$u_x = ۲x - ۱ = v_y .$$

حال با انتگرالگیری نسبت به y می یابیم

$$v = ۲xy - y + k(x) .$$

نظر به اینکه انتگرالگیری نسبت به y است، عدد ثابت می تواند حداکثر تابعی از x باشد. (برای اطمینان اگر از v، v_y را محاسبه کنید به همان نتیجه از انتگرالگیری می رسید.) از v ومعادله دوم کوشی - ریمان داریم

$$u_y = -v_x = -۲y + \frac{dk}{dx} .$$

از طرفی باتوجه به $u = x^۲ - y^۲ - x$ داریم $u_y = -۲y$. با مقایسه، می یابیم $\frac{dk}{dx} = ۰$، بنابراین k عددی ثابت می باشد که باید حقیقی باشد(چرا؟). در نتیجه داریم

$$f(z) = u + iv = x^۲ - y^۲ - x + i(۲xy - y + k) .$$

این مطلب را می توان برحسب z بیان نمود؛ یعنی، $f(z) = z^۲ - z + ik$.

چند تعریف و قضیه و نکته

۱) تابع $f(z)$ را در نقطه z_0 تحلیلی می‌گویند، هرگاه f در z_0 و یک همسایگی z_0 مشتق‌پذیر باشد. (طبیعی است یک تابع ممکن است در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد ولی در آن نقطه تحلیلی نباشد)

۲) اگر $f(z)$ در تمام صفحه مختلط به جز نقاطی خاص تحلیلی باشد، به آن نقاط خاص، نقاط تکین تابع مذکور می‌گویند. (طبیعی است تابعی که همه‌جا تحلیلی است، نقطه تکین ندارد. همچنین برای تابعی که هیچ جا تحلیلی نمی‌باشد نیز نقطه تکین تعریف نمی‌شود)

۳) توابع e^z و $\cos z$ و $\sin z$ و چند جمله‌ای‌های از z با درجهٔ دلخواه همه‌جا تحلیلی‌اند.

۴) اگر $g(z)$ و $f(z)$ تحلیلی باشند، توابع $f(z) \pm g(z)$، $f(z) \times g(z)$ و $f(g(z))$ همه‌جا تحلیلی‌اند و تابع $\frac{1}{f(z)}$ همه‌جا به غیر از ریشه‌های معادله $f(z) = 0$ تحلیلی است.

۵) توابع $\mathrm{Re}\, z$ و $\mathrm{Im}\, z$ و $\overline{z}$ و $|z|$ هیچ‌جایی تحلیلی نیستند.

۶) مشتقات و انتگرال‌های یک تابع تحلیلی، توابعی تحلیلی می‌باشند.

۷) اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد، برای بیان آن برحسب z کافی است در عبارت $u + iv$ همه xها را به z و همه yها را به صفر تبدیل کنیم.

۸) تابع حقیقی $h(x, y)$ را همساز می‌گویند، هرگاه در معادله لاپلاس صدق کند. یعنی:

$$\nabla^2 h = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

۹) اگر $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد، آنگاه u و v توابعی همساز بوده و اصطلاحاً v را مزدوج همساز u می‌گویند و نیز وقتی u تابعی همساز باشد، v مزدوج همساز آن نامیده می‌شود هرگاه تابع مختلط $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد و طبیعتاً برای یافتن v باید از معادلات کوشی ریمان $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ استفاده کرد.

مثال : تابع $u(x,y)=x^3+ax^2y+bxy^2$ مفروض است. اولاً ثابت‌های a ، b را طوری پیدا کنید که u بتواند قسمت حقیقی یک تابع مختلط تحلیلی باشد. ثانیاً تابع مختلط تحلیلی $f(z)=u+iv$ را برحسب z بیان کنید.

حل :

اولاً: اگر بخواهیم u قسمت حقیقی یک تابع مختلط تحلیلی باشد، باید همساز باشد و این می‌طلبد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(6x+2ay)+2bx=0 \rightarrow (6+2b)x+2ay=0 \rightarrow \begin{cases}6+2b=0 \rightarrow b=-3\\ 2a=0 \rightarrow a=0\end{cases}$$

پس فعلاً داریم:

$$u=x^3-3xy^2$$

ثانیاً:

راه اول: اگر بخواهیم $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد، باید v مزدوج همساز u باشد و این می طلبد :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2 \rightarrow v=3x^2y-y^3+A(x)\\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x}=-(-6xy) \rightarrow 6xy+A'(x)=6xy\end{cases}$$

$$\rightarrow A'(x)=0 \rightarrow A(x)=k$$

پس:

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+k$$

حال داریم:

$$f(z)=u+iv=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3+k\right)$$

برای بیان تابع تحلیلی $f(z)$ برحسب z کافی است تبدیلات $x \to z$ و $y \to 0$ را انجام دهیم.

$$f(z)=z^3+ik=z^3+c$$

مثال : تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x)$ مفروض است. کلی‌ترین بیان این تابع مختلط برحسب z اگر بدانیم این تابع تحلیلی است چه خواهد بود؟

حل : برای تحلیلی بودن باید قضایای کوشی ـ ریمان همواره ارضا شود و این می‌طلبد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} & (\mathrm{I}) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

چون طبق فرض v فقط تابعی از x است، لذا $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ و از معادله (I) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad u = u(y)$$

حال از معادله (II) می‌گوئیم:

$$u'(y) = -v'(x) \quad \rightarrow \quad u'(y) = -v'(x) = k \text{ ثابت}$$

لذا v' فقط تابعی از x و u' تابعی از y است. پس داریم:

$$u'(y) = k \quad \rightarrow \quad u(y) = ky + c_1$$

$$v'(x) = -k \quad \rightarrow \quad v(x) = -kx + c_2$$

لذا باید:

$$f(z) = u + iv = (ky + c_1) + i(-kx + c_2) = -ik(x + iy) + (c_1 + ic_2) \quad \rightarrow \quad f(z) = -ikz + c$$

k, c_1, c_2: ثابت‌های حقیقی دلخواهند.

c: ثابت مختلط دلخواه

Trigonometric and Hyperbolic Functions. Euler's Formula

۷.۱۲ توابع مثلثاتی ، توابع هیپربولیک

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

(1) $$\cos z = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Furthermore, as in calculus we define

(2) $$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

and

(3) $$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

Formulas for the derivatives follow readily from $(e^z)' = e^z$ and (1)–(3); as in calculus,

(4) $$(\cos z)' = -\sin z, \qquad (\sin z)' = \cos z, \qquad (\tan z)' = \sec^2 z,$$

قسمتهای حقیقی وموهومی cos z و sin z در محاسبه مقادیر مورد نیاز می باشند، همچنین
این مقادیر درنمایش خواص توابع به ما کمک می کنند. این مطلب را با یک مثال شرح می دهیم.

EXAMPLE 1 **Real and Imaginary Parts. Absolute Value. Periodicity**

Show that

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ &\text{(b)} \quad \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

and

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \\ &\text{(b)} \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \end{aligned}$$

and give some applications of these formulas.

Solution. From (1).

$$\begin{aligned} \cos z &= \tfrac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) \\ &= \tfrac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \tfrac{1}{2}e^{y}(\cos x - i \sin x) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}) \cos x - \tfrac{1}{2}i(e^{y} - e^{-y}) \sin x. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$$

This yields (6a) since, as is known from calculus,

$$\cosh y = \tfrac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}), \qquad \sinh y = \tfrac{1}{2}(e^{y} - e^{-y}); \tag{8}$$

(6b) is obtained similarly. From (6a) and $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ we obtain

$$|\cos z|^2 = (\cos^2 x)\,(1 + \sinh^2 y) + \sin^2 x \sinh^2 y.$$

Since $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, this gives (7a), and (7b) is obtained similarly.

$$\boxed{\cos z = \frac{۱}{۲}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{۱}{۲i}(e^{iz} - e^{-iz});\ z = x + iy. \qquad (۱)}$$

$$|\cos z|^{۲} = \cos^{۲} x + \sinh^{۲} y \qquad \text{(a)}$$

$$|\sin z|^{۲} = \sin^{۲} x + \sinh^{۲} y \qquad \text{(b)} \qquad (۷)$$

فرمولهای کلی توابع مثلثاتی پیوسته حقیقی برای مقادیر مختلط نیز برقرارند. این مطلب فی البداهه ازتعاریف نتیجه می شوند. خصوصاً به قواعد مجموع

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1 \qquad (۹)$$

و فرمول

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \qquad (۱۰)$$

اشاره می کنیم. برخی فرمولهای مفیدتر درمجموعه مسائل ارائه می شوند.

توابع هیپربولیک

توابع **کسینوس و سینوس هیپربولیک** متغیر مختلط z را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}). \qquad (۱۱)$$

که با تعاریف متناظر درتوابع حقیقی متناظر مطابقت دارد[ر.ك. (۸)]. این توابع در تمامی صفحه تحلیلی هستند. بامشتقگیری می یابیم

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z. \qquad (۱۲)$$

توابع هیپربولیک دیگر به صورت زیر تعریف می شوند

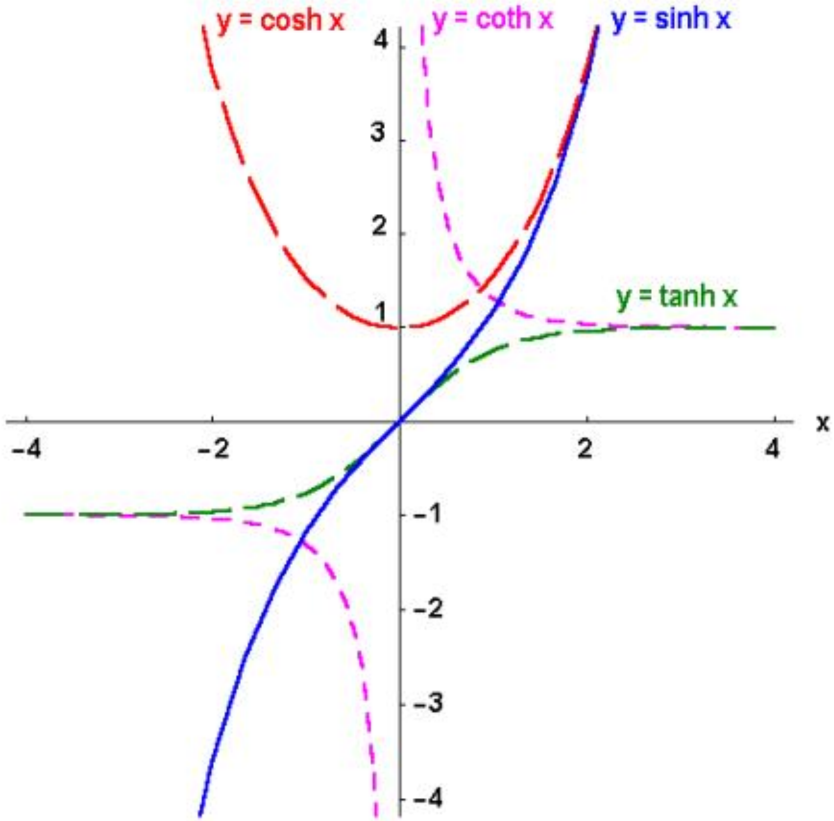
$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}. \qquad (۱۳)$$

توابع هیپربولیک و مثلثاتی به هم وابسته اند . هرگاه در(۱۱) iz را جایگزین z کنیم و از(۱) استفاده کنیم، می یابیم

$$\cosh iz = \cos z\,,\ \ \sinh iz = i \sin z\,. \tag{۱۴}$$

همینطور داریم

$$\cos iz = \cosh z\,,\ \ \sin iz = i \sinh z\,. \tag{۱۵}$$



12

تکلیف ۱ ـ ریاضی مهندسی

۱ـ سری فوریه تابع $(-\pi<x<\pi)$ $\quad f(x)=x+|x|$ را بدست آورید.

۲ـ سری فوریه تابع $f(x)$ با دوره تناوب 2π را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

۳ـ سری فوریه تابع $f(x)=1-x^2$ $\quad(-1<x<1)$ را بدست آورید.

۴ـ سری فوریه تابع $f(x)=\pi\frac{x^3}{2}$ $\quad(-1<x<1)$ را بدست آورید.

۵ـ سری فوریه تابع $V(x)=V_0\cos 100\pi t$ که از یکسوکننده خارج می‌شود را بدست آورید.

توجه: پس از ترسیم شکل $V(x)$ تنها بخش حاوی $V(x)$های مثبت (بالای محور xها) در نظر گرفته می‌شود.

۶ـ سری فوریه تابع

$$f(x)=\begin{cases} -2x & -\pi<x<0 \\ 2x & 0<x<\pi \end{cases}$$

را بدست آورید.

۷ـ بسط‌های نیم دامنه‌ای سینوسی و کسینوسی را برای تابع $(0<x<\pi)$ $\quad f(x)=\pi-x$ را بدست آورید.

۸- سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0 & -2<x<0\\ 2x & 0<x<2\end{cases}$ را بدست آورید.

۹- سری فوریه تابع $f(x)=x^2+x$ را در بازه‌ی $-3<x<3$ بدست آورید.

۱۰- بسط نیم دامنه‌ی زوج و فرد تابع $f(x)=\begin{cases}x & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2}<x<\pi\\ \pi-\frac{t}{2} & \pi<x<2\pi\end{cases}$ را بدست آورید.

۱۱- بسط نیم دامنه‌ی سینوسی و کسینوسی تابع $f(x)=x^3$ را در بازه‌ی $0<x<4$ بدست آورید.

۱۲- سری فوریه‌ی مختلط تابع $f(x)=e^{-2x}$ را در بازه‌ی $-\pi<x<\pi$ بدست آورید.

۱۳- انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}a^2-x^2 & 0<x<a\\ 0 & x>a\end{cases}$ را بدست آورید.

۱۴- انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\frac{1}{1+x^2}\ :\ x>0$ را بدست آورید.

۱۵- انتگرال فوریه سینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}e^{x} & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$ را بدست آورید.

فصل ۱۱

معادلات با مشتقات جزئی

Partial Differential Equations (PDEs)

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

مقدمه :

در این بخش تعدادی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که دارای اهمیت ویژه ای در کاربرد های مهندسی هستند را معرفی می کنیم. این معادلات از اصول فیزیکی استخراج شده و در آنها روش های حل مساله شرایط اولیه و شرایط مرزی نیز بررسی می شود.

مفاهیم اولیه :

تعریف: معادله ای که شامل یک یا چند مشتق جزئی یک تابع مجهول باشد را معادله دیفرانسیل جزئی (با مشتقات جزئی) مینامند .

مثلا اگر x و y متغیر های مستقل باشند u تابع متغیر وابسته است یعنی u(x,y) را داریم و مشتقات جزئی آنها u_{xx} و u_{yy} و u_{xy} هستند.

نکته : برای هر تابع دو متغیره ی بقدر کافی مشتق پذیر غالبا دو مشتق جزئی مرتبه اول ، سه مشتق جزئی مرتبه دوم ، و .... و (n+1) مشتق مرتبه n ام تعریف می شود .

$$u = f(x, y)$$

مشتق مرتبه اول :

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

مشتق مرتبه دوم :

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

- یک معادله دیفرانسیل معادله‌ای است که ارتباط بین یک تابع و مشتقات آن تابع نسبت به متغیر(های) موجود و خود متغیر(ها) را نشان می‌دهد.
- اگر تابع مورد بحث فقط از یک متغیر تبعیت کند، معادله دیفرانسیل از نوع معمولی "ODE" و اگر تابع مورد بحث از چند متغییر تبعیت کند، معادله دیفرانسیل از نوع پاره‌ای (مشتقات جزئی) "PDE" نامیده می‌شود.
- معادله دیفرانسیل را از نوع خطی می‌گویند، هرگاه شامل هیچ جملهٔ غیرخطی از تابع و یا مشتقات تابع نباشد و معادله از نوع خطی را همگن می‌گویند، هرگاه تمام جملات معادله شامل تابع یا یکی از مشتقات آن باشد.
- بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می‌گویند.

مرتبه (توان) بالاترین مشتق جزئی موجود در معادله را مرتبه آن معادله می نامند .

تعریف : معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را خطی می نامیم هرگاه توان تابع مجهول و تمامی مشتقات موجود آن در معادله برابر واحد باشد.

تعریف : معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی را متجانس می گوییم هرگاه تمامی مشتقات موجود در معادله هم مرتبه باشند.

نکته 1 : معادله متجانس ممکن است با ضرایب ثابت یا ضرایب متغیر باشد .

نکته 2: معادله متجانس ممکن است همگن یا ناهمگن باشد .

برخی از معادلات دیفرانسیل جزئی مهم که از مرتبه ی دوم و خطی هستند بصورت زیر هستند :

- **معادله موج یک بعدی**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- **معادله ی گرمای یک بعدی**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- **معادله ی لاپلاس دو بعدی**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- **معادله پواسن دو بعدی**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

- **معادله لاپلاس 3 بعدی**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

در تمام معادلات بالا c یک ثابت است، t زمان است و z,y,x مختصات دکارتی هستند و در معادله پواسن دو بعدی چنانچه f صفر نباشد معادله را غیر همگن می نامیم و بقیه همگی همگن اند .

جوابی از یک معادله بامشتق جزئی درناحیه ای مانند R از فضای متغیرهای مستقل تابعی است
که درناحیه ای شامل R همهٔ مشتقات جزئی موجود درمعادله را دارا بوده و درهمه نقاط R درمعادله صدق کند.

جواب معادلات دیفرانسیل جزئی :

معادلات دیفرانسیل جزئی نیز مانند معادلات دیفرانسیل معمولی دارای جوابی هستند که در معادله صدق می کند . ولی توجه به این نکته ضروری است که یک معدله دیفرانسیل ممکن است جوابهای متعددی داشته باشد مانند معادله ی زیر در دو بعد که می تواند جواب های زیر را داشته باشد :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u = x^2 - y^2$$

$$u = e^x cosy$$

$$u = ln(x^2 + y^2)$$

شرایط مرزی :

گاهی اوقات جواب کلی یک معادله دیفرانسیل با بکارگیری شرایط مرزی در حوالی منطقه ای که جواب داریم منحصر به فرد می شود .

شرایط اولیه :

در مواقع دیگر چنانچه معادله ی دیفرانسیل جزئی همگن خطی باشند آنگاه $u = c_1u_1 + c_2u_2$ نیز جواب دیگری برای همان معادله دیفرانسیل خواهد بود . در مورد معادلات دیفرانسیل معمولی هم داشتیم .

اگر معادله ای به شکل زیر داشته باشیم:

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2}+k^2F(x)=0$$

جواب های عمومی آن یکی از فرم های زیر است:

$$\left.\begin{aligned}F(x)&:\sin(kx)\\F(x)&:\cos(kx)\end{aligned}\right\}\Rightarrow F(x)=A_1\sin(kx)+A_2\cos(kx)$$

$$\left.\begin{aligned}F(x)&:e^{ikx}\\F(x)&:e^{-ikx}\end{aligned}\right\}\Rightarrow F(x)=A_1\,e^{ikx}+A_2\,e^{-ikx}$$

و یا اگر معادله ای به شکل زیر داشته باشیم:

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2}-k^2F(x)=0$$

جواب های عمومی آن یکی از فرم های زیر است:

$$\left.\begin{aligned}F(x)&:\sinh(kx)\\F(x)&:\cosh(kx)\end{aligned}\right\}\Rightarrow F(x)=A_1\sinh(kx)+A_2\cosh(kx)$$

$$\left.\begin{aligned}F(x)&:e^{kx}\\F(x)&:e^{-kx}\end{aligned}\right\}\Rightarrow F(x)=A_1\,e^{kx}+A_2\,e^{-kx}$$

۱۱ . ۲ مدلسازی : نخ مرتعش، معادله موج

دراین قسمت ارتعاشات عرضی کوچک نخی کشسان به طول L که دوانتهای آن ثابت و بدون حرکت است مانند ارتعاش یک تار ویولن را مورد بررسی قرارمی دهیم. نشان می دهیم که معادله حاکم بر چنین حرکتی یک معادله بامشتق جزئی است. برای رسیدن به معادله ارتعاش نخ مورد نظر فرض کنید نخ از وضع تعادل خارج شده و سپس در لحظه ای مثلاً لحظه $t = ۰$ رها شده و به ارتعاش در آید. مساله مشخص کردن ارتعاش نخ، یعنی تعیین $u(x,t)$ ، انحراف نخ در یک نقطه دلخواه x و در لحظه دلخواه $۰ < t$ است؛ شکل ۲۵۱ را ملاحظه کنید.

اطلاعات فیزیکی: ابتدا مفروضات زیر را در نظر می گیریم :

۱ . جرم نخ برای واحد طول ثابت می باشد، یعنی نخ همگن است . نخ کشسان بوده وهیچ گونه مقاومتی درمقابل خمش ازخود نشان نمی دهد.

۲ . نیروی کششی که براثر کشیدن نخ قبل از ثابت کردن دو سر آن ایجاد می شود بسیار بزرگ بوده و نیروی جاذبه وارد برنخ درمقابل آن قابل چشم پوشی می باشد.

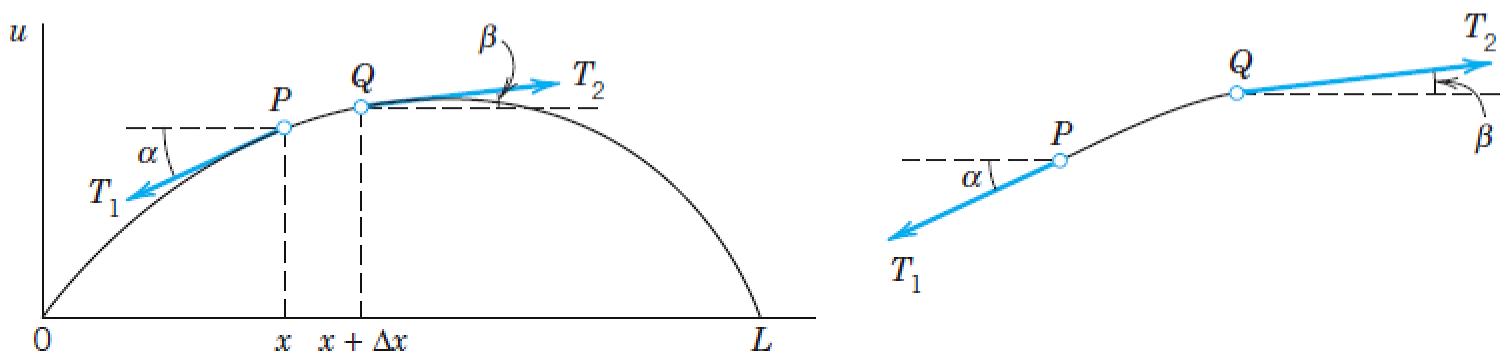
۳ . حرکت نخ یک ارتعاش کوچک عرضی در صفحه ای قائم است ، یعنی هر قسمت نخ تنها به صورت قائم حرکت می نماید، و قدر مطلق انحراف و شیب نخ درهرنقطه کوچک می باشد.

باتوجه به مفروضات مذکور انتظار می رود که جواب $u\ (x,t)$ معادله دیفرانسیل به دست آمده ارتعاشات کوچک نخ « غیر ایده ال » فیزیکی با چگالی همگن کوچک و تحت کشش بزرگ را به طور منطقی توصیف نماید.

برای رسیدن به معادله دیفرانسیل، نیروهایی را که بر قسمت کوچکی از نخ وارد می شوند مورد بررسی قرار می دهیم (شکل ۲۵۱). چون نخ مقاومتی درمقابل خمش نشان نمی دهد، درهرنقطه نیروی وارده نیروی کشش برمنحنی نخ خواهد بود. فرض کنید T_1 و T_2 نیروهای کشش نخ در نقاط انتهایی P و Q قسمت مورد بررسی نخ باشد. به علت اینکه درجهت افقی حرکتی صورت نمی گیرد، مؤلفه های افقی کشش باید صفر باشند. با استفاده از علائم به کار گرفته شده درشکل ۲۵۱ به دست

$$T_1\cos\alpha = T_2\cos\beta = T=\text{ثابت}. \qquad (۱)$$

در جهت قائم دو نیروی $-T_1\sin\alpha$ و $T_2\sin\beta$ را داریم که به ترتیب مولفه های قائم T_1 و T_2 می باشند؛ علامت منها دراینجا بدان جهت است که مؤلفه مربوط در P روبه پائین فرض شده است.



شکل ۲۵۱ . نخ مرتعش در زمان ثابت t

برآیند این دو نیرو، باتوجه به قانون دوم نیوتن، برابر جرم $\rho\Delta x$ نخ مورد نظر با شتاب $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$، که مقدار آن در نقطه ای بین x و $x+\Delta x$ محاسبه می شود، است؛ دراینجا ρ جرم واحد طول نخ قبل از انحراف، و Δx طول تکه نخ قبل از انحراف آن می باشند. بنابراین

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Using (1), we can divide this by $T_2 \cos\beta = T_1 \cos\alpha = T$, obtaining

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

Now $\tan\alpha$ and $\tan\beta$ are the slopes of the string at x and $x + \Delta x$:

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_x \qquad \text{and} \qquad \tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x+\Delta x}.$$

دراینجا چون u به t نیز بستگی دارد لذا باید مشتقها را به صورت مشتق جزئی بنویسیم. ازتقسیم (۲) بر Δx می یابیم

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x}\right] = \frac{\rho}{T}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

If we let Δx approach zero, we obtain the linear PDE

(3)
$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

This is called the **one-dimensional wave equation**. We see that it is homogeneous and of the second order. The physical constant T/ρ is denoted by c^2 (instead of c) to indicate

that this constant is *positive,* a fact that will be essential to the form of the solutions.

نکته :

هر معادله همگن با شرایط مرزی همگن را می توان از طریق جداسازی پارامترها حل کرد.

Separated solutions

a solution of the Laplace equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \textbf{(9.52)}$$

in the form

$$u = X(x)Y(y)$$

which gives on substitution

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \qquad \xrightarrow{\div XY} \underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{=-k^2} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{=+k^2} = 0 \Rightarrow$$

or

$$\begin{cases} \dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2} = -k^2 \\ \dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2} = +k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} + k^2X = 0 \\ \dfrac{d^2Y}{dy^2} - k^2Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x) = A_1 \sin(kx) + B_1 \cos(kx) \\ Y(y) = A_2 \sinh(ky) + B_2 \cosh(ky) \end{cases} \Rightarrow$$

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = \left(A_1 \sin(kx) + B_1 \cos(kx)\right) \times \left(A_2 \sinh(ky) + B_2 \cosh(ky)\right)$$

$$\text{or} \quad u(x,y) = X(x)Y(y) = \left(A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}\right) \times \left(A_2 e^{ky} + B_2 e^{-ky}\right)$$

Example 9.29 Use the separated solutions (9.52) of the Laplace equation to find the solution to (9.50) satisfying the boundary conditions

$$u(x, 0) = 0 \quad (0 < x < 2)$$

$$u(x, 1) = 0 \quad (0 < x < 2)$$

$$u(0, y) = 0 \quad (0 < y < 1)$$

$$u(2, y) = a \sin 2\pi y \quad (0 < y < 1)$$

$$\nabla^2 u(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \xrightarrow{u(x,y)=X(x)Y(y)} Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\xrightarrow{\div XY} \underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{=+\mu^2} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{=-\mu^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2} = +\mu^2 \\ \dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2} = -\mu^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} - \mu^2 X = 0 \\ \dfrac{d^2Y}{dy^2} + \mu^2 Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x) = A e^{\mu x} + B e^{-\mu x} \\ Y(y) = C\sin(\mu y) + D\cos(\mu y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = \left(A e^{\mu x} + B e^{-\mu x}\right)\times\left(C\sin(\mu y) + D\cos(\mu y)\right)$$

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = \left(A\,e^{\mu x} + Be^{-\mu x}\right)\times\left(C\sin\left(\mu y\right) + D\cos\left(\mu y\right)\right)$$

$$\text{In first boundary}: u(x, y = 0) = 0 \quad (0\langle x\langle 2):$$

$$Y(y=0) = \left(C\sin\left(\mu\times 0\right) + D\cos\left(\mu\times 0\right)\right) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\Rightarrow u(x,y) = X(x)Y(y) = \left(\underbrace{AC}_{A'}e^{\mu x} + \underbrace{BC}_{B'}e^{-\mu x}\right)\times\sin\left(\mu y\right)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = X(x)Y(y) = \left(A'e^{\mu x} + B'e^{-\mu x}\right)\times\sin\left(\mu y\right)$$

$$\text{In second boundary}: u(x, y = 1) = 0 \quad (0\langle x\langle 2):$$

$$Y(y=1) = \left(\sin\left(\mu\times 1\right)\right) = 0 \Rightarrow \sin\mu = 0 \Rightarrow$$

so that $\sin\mu = 0$, or $\mu = n\pi$ with n as integer. Thus

$$u = (A' e^{n\pi x} + B' e^{-n\pi x}) \sin n\pi y$$

From the third boundary condition, $u(0, y) = 0 \quad (0 < y < 1)$

$$(A' + B') \sin n\pi y = 0 \quad (0 < y < 1)$$

so that $B' = -A'$, giving

$$u = A'(e^{n\pi x} - e^{-n\pi x}) \sin n\pi y$$

$$= 2A' \sinh n\pi x \sin n\pi y$$

The final boundary condition then gives $u(2, y) = a \sin 2\pi y \quad (0 < y < 1)$

$$2A' \sinh 2n\pi \sin n\pi y = a \sin 2\pi y \quad (0 < y < 1)$$

We must therefore choose $n = 2$, and $a = 2A' \sinh 2n\pi = 2A' \sinh 4\pi$, or $2A' = a/\sinh 4\pi$. The solution is therefore

$$u = a \sin 2\pi y \frac{\sinh 2\pi x}{\sinh 4\pi}$$

یادآوری:

داشتیم هر تابع دلخواه $f(x)$ را می توان بر حسب توابع متعامد کامل اش بسط داد و نوشت:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n u_n(x)$$

برای محاسبه ی a_n طرفین را در u_n^* ضرب و انتگرال می گیریم و داریم:

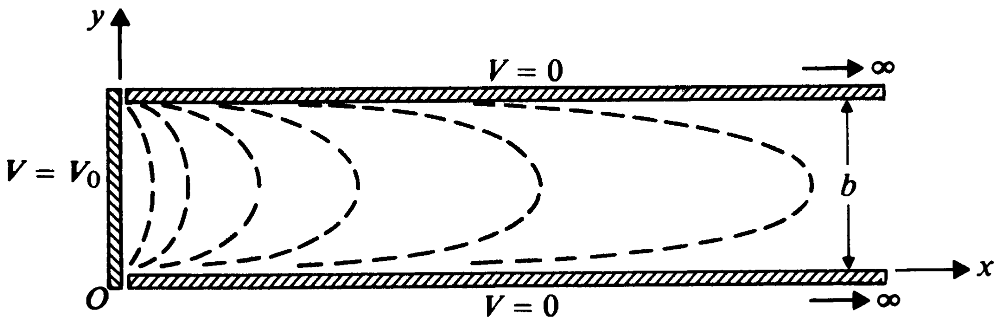
$$\times u_n^*(x)\left(f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n u_n(x)\right)\Rightarrow\int_a^b f(x)u_n^*(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\underbrace{\int_a^b u_n^*(x)u_n(x)\,dx}_{=\delta_{n^*n}=1}$$

$$\Rightarrow a_n=\int_a^b f(x)\,u_n^*(x)\,dx$$

حال چنانچه ویژه توابع عملگر هرمیتی موجود باشند با استفاده از شرط تعامد می توان ضرایب آنها را محاسبه نمود.

یکی از توابع مشهور متعامد سینوس و کسینوس می باشند.

مثال: دو الکترود صفحه ای موازی نیمه بینهایت با فاصله ی b که در پتانسیل صفر قرار دارند، داریم. الکترود سومی عمود بر آنها و مجزا شده در پتانسیل ثابت V_0 نگه داشته شده است. مطلوبست محاسبه ی توزیع پتانسیل در ناحیه ی محصور شده توسط الکترودها.



Solution Referring to the coordinates in Fig. 4–15, we write down the boundary conditions for the potential function $V(x, y, z)$ as follows.

With V independent of z:

$$V(x, y, z) = V(x, y). \tag{4–90a}$$

In the x-direction:

$$V(0, y) = V_0 \tag{4–90b}$$

$$V(\infty, y) = 0. \tag{4–90c}$$

In the y-direction:

$$V(x, 0) = 0 \tag{4–90d}$$

$$V(x, b) = 0. \tag{4–90e}$$

Condition (4–90a) implies $k_z = 0$, and from Table 4–1,

$$Z(z) = B_0. \tag{4–91}$$

The constant A_0 vanishes because Z is independent of z. From Eq. (4–89) we have

$$\boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0. \quad (4\text{–}89)}$$

$$k_y^2 = -k_x^2 = k^2, \tag{4–92}$$

$$\nabla^2 V(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2} = 0 \xrightarrow{V(x,y)=X(x)Y(y)}$$

$$Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\div X(x)Y(y)} \underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{=+k_x^2=k^2} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{=-k_x^2=k_y^2=-k^2} = 0 \Rightarrow$$

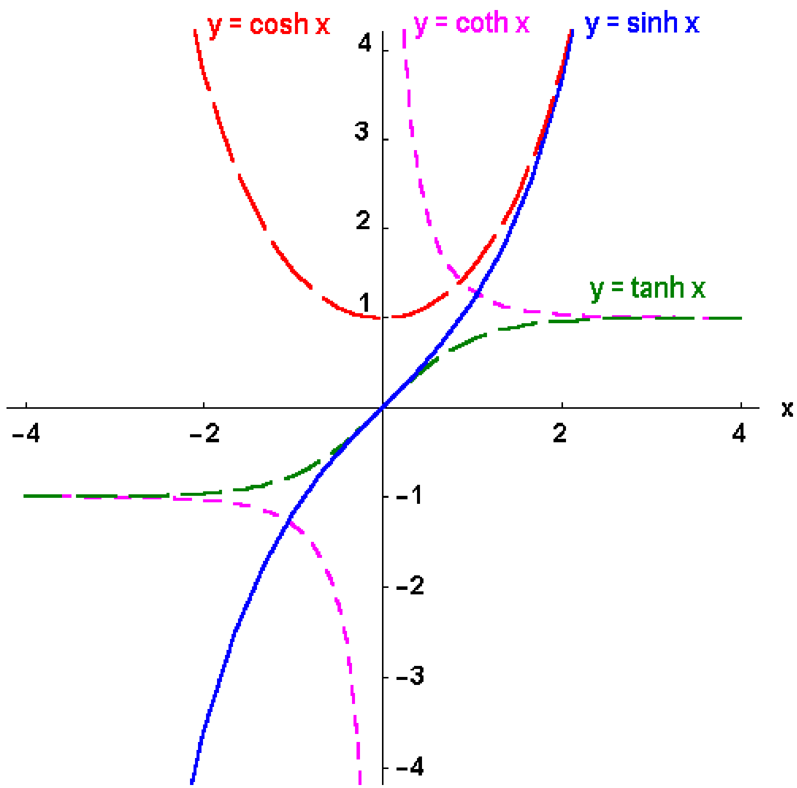
$$\begin{cases} \dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2} = +k^2 \\ \dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} - k^2 X = 0 \\ \dfrac{d^2Y}{dy^2} + k^2 Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x) = D_1 e^{kx} + D_2 e^{-kx} \\ Y(y) = A_1 \sin(ky) + A_2 \cos(ky) \end{cases} \Rightarrow$$

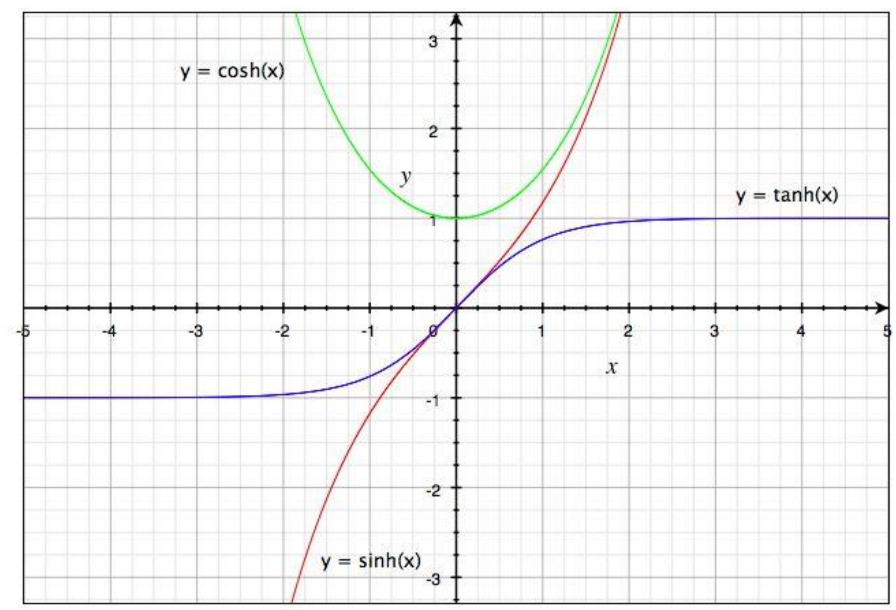
$$V(x,y) = X(x)Y(y) = \left(D_1 e^{kx} + D_2 e^{-kx}\right) \times \left(A_1 \sin(ky) + A_2 \cos(ky)\right)$$

حال می توان نوشت:

$$X(x) = D_1 e^{kx} + D_2 e^{-kx} \xrightarrow{V(\infty,y)=0} X(x) = D_2 e^{-kx} \qquad (4-93)$$

$$Y(y) = A_1 \sin(ky) + A_2 \cos(ky) \xrightarrow{V(x,0)=0} Y(y) = A_1 \sin(ky) \qquad (4-94)$$





با قرار دادن (٤-٩١)، (٤-٩٣) و (٤-٩٤) در (٤-٨٢) می توان نوشت:

$$V_n(x, y) = (B_0 D_2 A_1) e^{-kx} \sin ky$$
$$= C_n e^{-kx} \sin ky, \qquad (4\text{–}95)$$

where the arbitrary constant C_n has been written for the product $B_0 D_2 A_1$.

Now, of the five boundary conditions listed in Eqs. (4–90a) through (4–90e) we have used conditions (4–90a), (4–90c), and (4–90d). To meet condition (4–90e), we

$\boxed{V(x, b) = 0. \quad (4\text{–}90e)}$

require

$$V_n(x, b) = C_n e^{-kx} \sin kb = 0, \qquad (4\text{–}96)$$

which can be satisfied, for all values of x, only if

$$\sin kb = 0$$

or

$$kb = n\pi$$

or

$$k = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (4\text{–}97)$$

Therefore, Eq. (4–95) becomes

$$V_n(x\ y) = C_n e^{-n\pi x/b} \sin \frac{n\pi}{b} y. \qquad (4\text{–}98)$$

و یا :

$$V_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-\frac{n\pi x}{b}} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad ; \quad (4-98)$$

با قرار دادن شرط (4-90b) در رابطه ی (٤-٩٨) داریم:

$$V(0,y)=V_0 \qquad (4\text{-}90b)$$

$$V(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty} V_n(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{b}y = V_0, \qquad 0<y<b. \qquad (4\text{-}99)$$

حال شرط تعامد را بکار می بریم:

$$\underbrace{\int_0^b V_\circ \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy}_{(1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int_0^b C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy}_{(2)} \qquad (4-100)$$

$$(1):\int_0^b V_\circ \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy=\frac{bV_\circ}{m\pi}\left(-\cos\frac{m\pi y}{b}\right)_0^b=\begin{cases}\dfrac{2bV_\circ}{m\pi} & m:\text{odd}\\ 0 & m:\text{even}\end{cases}$$

$$(2):\int_0^b C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy=\frac{C_n}{2}\int_0^b\left[\cos\frac{(n-m)\pi}{b}y-\cos\frac{(n+m)\pi}{b}y\right]dy$$

$$\Rightarrow \int_0^b C_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy=\begin{cases}\dfrac{C_n}{2}b & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(m\,x)\sin(n\,x)\,dx == \begin{cases}\pi\delta_{mn} & n\neq 0\\ 0 & n=0\end{cases}\\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(m\,x)\sin(n\,x)\,dx == \begin{cases}\pi\delta_{mn} & n\neq 0\\ 2\pi & n=0\end{cases}\end{array}}$$

حال با قرار دادن جوابهای دو معادله در (٤-١٠٠) داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{2bV_\circ}{m\pi} & m:odd\\ 0 & m:even\end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty}\begin{cases}\dfrac{C_n}{2}b & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases} \Rightarrow C_n = \begin{cases}\dfrac{4V_\circ}{n\pi} & n:odd\\ 0 & n:even\end{cases}$$

در نتیجه توزیع پتانسیل مورد نظر در معادله ی(٤-٩٨) می شود:

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/b} \sin\frac{n\pi}{b} y\\ &= \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=\mathrm{odd}}^{\infty}\frac{1}{n} e^{-n\pi x/b}\sin\frac{n\pi}{b} y, \qquad (4\text{–}104)\\ n &= 1, 3, 5, \ldots,\\ x &> 0 \quad \text{and} \quad 0 < y < b. \end{aligned}$$

یک مساله بامقدار کرانه ای را **مساله دیریکله** نامند هرگاه مقدار u بر C مشخص باشد. یک مساله با مقادیر کرانه ای را یک **مساله نیومن** u در جهت قائم نامیم اگر $u_n = \dfrac{\partial u}{\partial n}$ بر C مشخص باشد. یک مساله با مقادیر کرانه ای را **مساله آمیخته** نامند هرگاه بر قسمتی از C، u و بر قسمت دیگر از C، u_n مشخص باشد.

Example 9.30 Solve the Laplace equation (9.52) for steady heat conduction in the semi-infinite region $0 \leqslant y \leqslant 1, x \geqslant 0$ and subject to the boundary conditions

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(a)} & u(x,0)=0 & (x \geqslant 0) \\ \text{(b)} & u(x,1)=0 & (x \geqslant 0) \\ \text{(c)} & u(x,y) \to 0 & \text{as } x \to \infty \end{array}\right\} \text{(temperature kept at zero on two sides and at infinity);}$$

$$\text{(d)} \quad u(0,y)=1 \quad (0 \leqslant y \leqslant 1) \text{ (unit temperature on the fourth side).}$$

Solution Clearly from condition (c) we need a solution that is exponential in x, so we take (9.52):

$$\nabla^2 u(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \xrightarrow{u(x,y)=X(x)Y(y)}$$

$$Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\xrightarrow{\div XY} \underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{=+\mu^2} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{=-\mu^2} = 0 \Rightarrow$$

$$u = (A\,e^{\mu x} + B\,e^{-\mu x})(C\sin\mu y + D\cos\mu y)$$

and since the solution must tend to zero as $x \to \infty$, we have $A = 0$, giving

$$u = e^{-\mu x}(C'\sin\mu y + D'\cos\mu y)$$

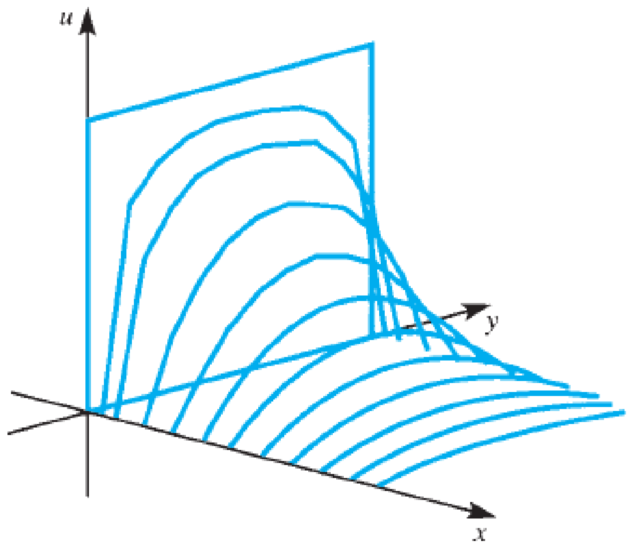
where $C' = BC$ and $D' = BD$. Condition (a) then gives $D' = 0$, and (b) gives $\sin\mu = 0$, or $\mu = n\pi$ ($n = 1, 2, \ldots$), so the solution becomes $u = C'\,e^{-n\pi x}\sin n\pi y$ ($n = 1, 2, \ldots$). Because of the linearity of the Laplace equation, we sum over n to obtain the more general solution

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n'\,e^{-n\pi x}\sin n\pi y$$

Condition (d) then gives, as before, a classic Fourier series problem

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n'\sin n\pi y \quad (0 \leqslant y \leqslant 1)$$

Figure 9.31 Solution of the Laplace equation in Example 9.30.



so that, using (7.33),

$$C'_n = 2\int_0^1 \sin n\pi y \, dy = \begin{cases} 4/n\pi & (\text{odd } n) \\ 0 & (\text{even } n) \end{cases}$$

The complete solution is therefore

$$u = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-(2n-1)\pi x} \sin(2n-1)\pi y$$

or, in expanded form,

$$u = \frac{4}{\pi}(e^{-\pi x} \sin \pi y + \tfrac{1}{3} e^{-3\pi x} \sin 3\pi y + \tfrac{1}{5} e^{-5\pi x} \sin 5\pi y + \dots)$$

In Figure 9.31 the solution $u(x, t)$ is plotted in the (x, y) plane. Because of the discontinuity at $x = 0$, for $x = 0.05$ thirty terms of the series were required to compute u to four-figure accuracy, while for $x = 1$, one or two terms were quite sufficient.

Example 9.31

Solve the Laplace equation (9.50) in the region $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2$ with the conditions

(a) $u(x, 0) = x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$

(b) $u(x, 2) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$

(c) $u(0, y) = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant 2)$

(d) $\partial u(1, y)/\partial x = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant 2)$

Solution

The steady heat-conduction interpretation of this problem, looking at Figure 9.32, gives a zero temperature on ABC, an insulated boundary on CD and a linear temperature on AD.

Of the solutions (9.52), we require zeros on AB and zero derivative on CD, so we might expect to use trigonometric solutions in the x direction and exponential (or equivalently sinh and cosh) solutions in the y direction. We therefore take a solution of the form (9.52d):

$$u = (A \sin \mu x + B \cos \mu x)(C \cosh \mu y + D \sinh \mu y)$$

From condition (c), we must take $B = 0$, giving

$$u = (C' \cosh \mu y + D' \sinh \mu y) \sin \mu x$$

where $C' = AC$ and $D' = AD$. Condition (d) then gives $\cos \mu = 0$ or

$$\mu = (n + \tfrac{1}{2})\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

so the solution becomes

$$u = [C' \cosh(n + \tfrac{1}{2})\pi y + D' \sinh(n + \tfrac{1}{2})\pi y] \sin(n + \tfrac{1}{2})\pi x \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \textbf{(9.53)}$$

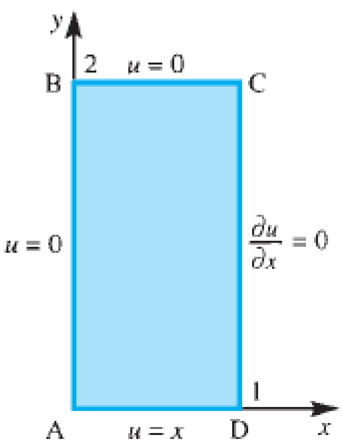


Figure 9.32
Region and boundary conditions for Example 9.31.

To satisfy condition (b), it is best to rewrite (9.53) in the equivalent form

$$u = \sin[(n+\tfrac{1}{2})\pi x]\{E\cosh[(n+\tfrac{1}{2})\pi(2-y)] + F\sinh[(n+\tfrac{1}{2})\pi(2-y)]\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

We see that (b) now implies $E = 0$, so that our basic solution, summed over all n, is

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \sin[(n+\tfrac{1}{2})\pi x]\sinh[(n+\tfrac{1}{2})\pi(2-y)]$$

The final condition (a) then gives the standard Fourier series problem

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \sinh[(2n+1)\pi]\sin[(n+\tfrac{1}{2})\pi x]$$

so that, using (7.33),

$$\tfrac{1}{2}F_n \sinh(2n+1)\pi = \int_0^1 x\sin[(n+\tfrac{1}{2})\pi x]\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi}{\pi^2(n+\tfrac{1}{2})^2}$$

The solution in expanded form is therefore

$$u = \frac{8}{\pi^2}\left[\sin\tfrac{1}{2}\pi x\,\frac{\sinh\tfrac{1}{2}\pi(2-y)}{\sinh\pi} - \frac{\sin\tfrac{3}{2}\pi x\,\sinh\tfrac{3}{2}\pi(2-y)}{9\sinh 3\pi} + \sin\tfrac{5}{2}\pi x\,\frac{\sinh\tfrac{5}{2}\pi(2-y)}{25\sinh 5\pi} + \dots\right]$$

Example 9.33 Solve the Poisson equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}$$

in the rectangle $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ given the boundary conditions

$$u = 0 \text{ on } x = 0, \quad u = f(y) \text{ on } x = a$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = 0 \text{ and } y = b$$

Solution Physically the problem can be interpreted as a heated plate with the temperature specified on the two boundaries $x = 0$ and $x = a$ and with insulated boundaries $y = 0$ and $y = b$.

The general strategy is to find a 'particular integral' to eliminate the term on the right-hand side, compute the new boundary conditions and then solve the residual Laplace equation. In the present case choose

$$U = K\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}$$

Substitute into the Poisson equation to give

$$\nabla^2 U = -K\left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}$$

and hence

$$K^{-1} = \pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

Now put

$$u = U + v$$

so that v satisfies the Laplace equation

$$\nabla^2 v = 0$$

and the boundary conditions remain the same

$$v = 0 \text{ on } x = 0, \quad v = f(y) \text{ on } x = a$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = 0 \text{ and } y = b$$

We are now back to a standard Laplace equation problem that can be solved by separation of variables. From the solutions (9.52) choose

$$v = \frac{1}{2}A_0 x$$

$$v = A_n \sinh\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

These solutions satisfy three of the boundary conditions, just leaving

$$v = f(y) \quad \text{on } x = a$$

to be satisfied. The usual infinite sum of terms is constructed

$$v = \frac{1}{2}A_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

so that on $x = a$ the remaining boundary condition gives the usual Fourier cosine series problem

$$f(y) = \frac{1}{2}A_0 a + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh n\pi) \cos\frac{n\pi y}{b}$$

In Chapter 7 (7.30) and (7.31) give

$$a_0 = A_0 a = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\,\mathrm{d}y$$

and $a_n = A_n \sinh n\pi = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b f(y)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{d}y \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

The final solution is given by

$$u = \frac{\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} + \frac{a_0}{a}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sinh n\pi}\sinh\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

۱۱ . ۳ جداسازی متغیرها، کاربرد سریهای فوریه

نخ کشسان

در بخش قبل نشان دادیم که نوسانهای یک نخ کشسان در **معادلهٔ موج یک بعدی**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

که در آن $u(x,t)$ انحراف نخ است، صدق می کند. باتوجه به این مطلب که درنقاط انتهایی یعنی درنقاط $x = 0$ و $x = L$ نخ ثابت نگهداشته شده است، به ازای هر t دو **شرط کرانه ای**

$$u(0,t) = 0\,, \quad u(L,t) = 0 \qquad (2)$$

را داریم. مسیر حرکت نخ به انحراف اولیه (انحراف در لحظه $t = 0$) و سرعت اولیه (سرعت درلحظه $t = 0$) بستگی دارد. اگر انحراف اولیه را با $f(x)$ وسرعت اولیه را با $g(x)$ نمایش دهیم، دو **شرط اولیه** زیر را داریم

$$u(x,0) = f(x), \tag{۳}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x). \tag{۴}$$

حال $u(x,t)$، جواب معادله (۱) را طوری می یابیم که در شرایط کرانه ای و اولیه صدق کند. برای رسیدن به چنین جوابی گام به گام به شرح زیر عمل می کنیم.

گام اول . با استفاده از **روش ضربی یا روش جداسازی متغیرها** ، دومعادلهٔ دیفرانسیل معمولی به دست می آوریم.

گام دوم . جوابهایی ازاین دومعادلهٔ را که در شرایط کرانه ای صدق می کنند، مشخص می نمائیم.

گام سوم . **موارد استعمال سری فوریه** ، جوابها را طوری باهم ترکیب می کنیم که عبارت حاصل جواب معادلهٔ موج (۱) بوده وهمچنین در شرایط اولیهٔ مفروض (۳) و (۴) صدق نماید.

گام اول . روش جداسازی متغیر ، یا روش ضربی

جوابهایی ازمعادلهٔ موج(۱) به صورت

$$u(x,t) = F(x)G(t) \tag{۵}$$

بامشتقگیری از (۵) می یابیم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

که در آن نقطه ها مشتق تابع u نسبت به t و پریمها مشتق تابع u نسبت به x را نشان می دهند. با جایگزین کردن مشتقات حاصل در معادلهٔ دیفرانسیل (۱) داریم

$$F\ddot{G} = c^2F''G .$$

باتقسیم طرفین رابطهٔ فوق بر c^2FG می یابیم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} .$$

برای برقرار بودن این تساوی دو طرف آن باید برابر مقدار ثابتی مثل k باشند.

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = k .$$

ازاین رابطه بلافاصله دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی معمولی، یعنی

$$F'' - kF = 0 \qquad (۶)$$

و

$$\ddot{G} - c^2kG = 0 \qquad (۷)$$

نتیجه می شود که در آن k عددی دلخواه است.

گام دوم . برقراری شرایط کرانه ای

جوابهای F و G را ازمعادلات (۶) و (۷) طوری می یابیم که $u = FG$ در شرایط کرانه ای

$$\boxed{u(0,t) = 0 , \ \ u(L,t) = 0 \qquad (۲)}$$

(۲) صدق کند، یعنی به ازای هر t داشته باشیم

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0 \qquad و \qquad u(L,t) = F(L)G(t) = 0$$

حال **حل معادله(۶)** را پی می گیریم.

$$\boxed{F'' - kF = 0 \qquad (۶)}$$

واضح است $\qquad (۸) \qquad F(0) = 0$ (الف) ، $F(L) = 0$ (ب) .

$k = -p^2$ ، آنگاه معادلهٔ (۶) به صورت زیر درمی آید

$$F'' + p^2 F = 0$$

که دارای جواب عمومی

$$F(x) = A\cos px + B\sin px$$

است. از این جواب و (۸) می یابیم $F(0) = A = 0$ و آنگاه $F(L) = B\sin pL = 0$ ، باید فرض کنیم $B \neq 0$ زیرا درغیر این صورت $F \equiv 0$. بنابراین $\sin pL = 0$ ، یعنی به ازای عدد صحیح n داریم

$$(۹) \qquad pL = n\pi \text{ و از آنجا } p = \frac{n\pi}{L}.$$

با فرض $B = 1$ ، تعداد نامتناهی جواب $F(x) = F_n(x)$ که در آن

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (۱۰)$$

حاصل می شوند. این جوابها در (۸) صدق می کنند. [به ازای اعداد صحیح منفی n ضرورتاً، همان جواب را با انتخاب یک علامت منفی به دست می آوریم، زیرا $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.]

دراین مرحله **حل (۷)** را پی می گیریم. حال ثابت k به مقادیر $k=-p^2=-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ که از (۹) نتیجه شده اند، منجر می گردند. به ازای این k ها، معادلهٔ (۷) به صورت

$$\ddot{G}+\lambda_n^2 G=0$$

که در آن $\lambda_n=\frac{cn\pi}{L}$ است، درمی آید. جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$G_n(t)=B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t\,.$$

از اینرو توابع $u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)$ که به صورت

$$u_n(x,t)=(B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x\;;\;\; n=1,2,\ldots \qquad (11)$$

نوشته می شوند جوابهای (۱) هستند، و در شرایط کرانه ای (۲) نیز صدق می کنند. این توابع را **توابع ویژه**، یا تابع مشخصه ومقادیر $\lambda_n=\frac{cn\pi}{L}$ را**مقادیر ویژه**، یا مقادیر مشخصهٔ نخ مرتعش می نامند.

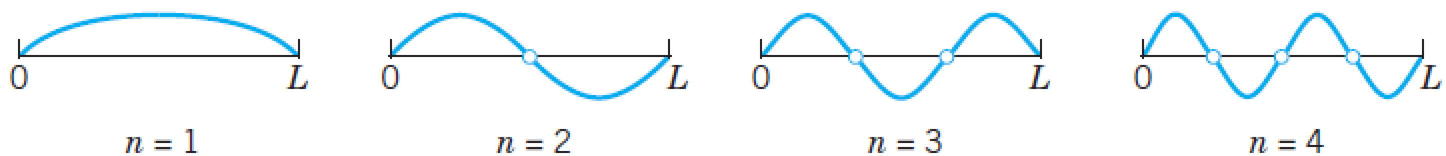
مجموعهٔ $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ را **طیف** می نامند.

چنانچه مشاهده می کنیم هر u_n حرکت همسازی با فرکانس $\frac{\lambda_n}{2\pi}=\frac{cn}{2L}$ سیکل برواحد زمان را نمایش می دهد. این حرکت را **مد نرمال** n ام نخ نامیده می شود. مد نرمال اول $(n=1)$ به مد اساسی مشهورمی باشد، وسایر مدهای نرمال مافوق تن نامیده می شوند

از (۱۱) درنقاط $x = \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}L$ می یابیم $\sin\frac{n\pi}{L}x = 0$.

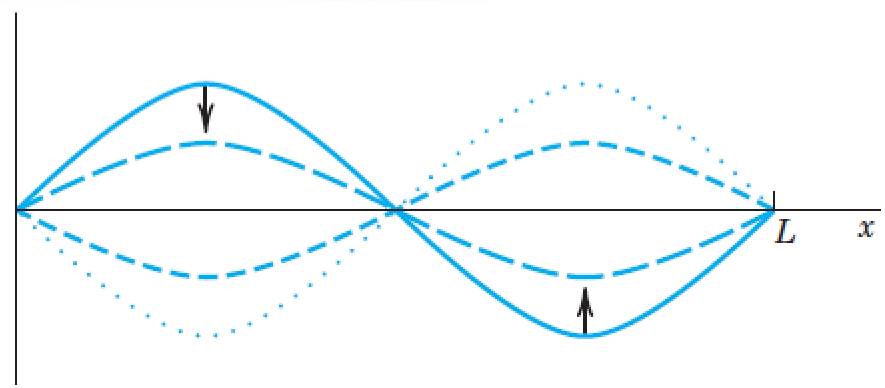
مد نرمال n ام دارای $n-1$ **گره** است. نقاط گرهی نقاطی ازنخ هستند که حرکت نمی کنند. (با نقاط انتهایی ثابت؛ شکل ۲۵۲ را ملاحظه کنید.)

شکل ۲۵۳ مد نرمال دوم را به ازای مقادیر مختلف t نشان می دهد. نخ درهرلحظه به شکل یک موج سینوسی می باشد. وقتی سمت چپ نخ به طرف پایین می رود، قسمت راست آن به طرف بالا حرکت می کند و بالعکس. برای سایر مدها وضع به همین منوال می باشد.



شکل ۲۵۲ . مدهای نرمال نخ مرتعش

شکل ۲۵۳ . مدنرمال دوم به ازای مقادیر مختلف t



تنظیم موج با تغییرات کشش T انجام می گیرد و فرمول فوق برای فرکانس $\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2L}$ از u_n با انتخاب $c = \frac{T}{\rho}$ (بخش ۱۱ . ۲ فرمول (۳)) بیان می دارد که فرکانس با کشش متناسب است . T را

گام سوم . جواب مسالهٔ کلی

بدیهی است که درحالت کلی، یک جواب خاص $u_n(x,t)$ در شرایط اولیهٔ (۳) و (۴) صدق نخواهد کرد. اما، ازآنجا که معادلهٔ (۱) خطی وهمگن‌می باشد، از قضیه بنیادی ۱ بخش ۱۱ . ۱ پی می بریم که مجموع هر تعداد متناهی از u_n ها، جوابی برای معادلهٔ (۱) می باشد. برای حصول جوابی که در شرایط (۳) و (۴) صدق نماید، سری نامتناهی زیر را با فرض $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ مورد بررسی قرار می دهیم

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x. \qquad (12)$$

ابتدا **صدق نمودن شرط اولیه (۳) (تغییرمکان اولیهٔ مفروض)** را مد نظر قرار می دهیم. از روابط (۳) و (۱۲) می یابیم

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x) . \qquad (13)$$

حال با استفاده از شرط تعامد داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{L}x \times \sin\frac{m\pi}{L}x = f(x)\sin\frac{m\pi}{L}x \Rightarrow$$

$$\int_0^L B_n \sin\frac{n\pi}{L}x \times \sin\frac{m\pi}{L}x\,dx = \int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi}{L}x\,dx \Rightarrow$$

$$B_n \underbrace{\int_0^L \sin\frac{n\pi}{L}x \times \sin\frac{m\pi}{L}x\,dx}_{=\frac{L}{2}\delta_{nm}=\begin{cases}\frac{L}{2} & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}} = \int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi}{L}x\,dx \Rightarrow$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

حال برقراری شرط اولیه(۴) (سرعت اولیهٔ مفروض) را پی می گیریم. بامشتقگیری از(۱۲) نسبت به t و با استفاده از (۴) می یابیم

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}(-B_n\lambda_n \sin\lambda_n t + B_n^*\lambda_n \cos\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{t=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\lambda_n \sin\frac{n\pi x}{L} = g(x).$$

حال با استفاده از شرط تعامد داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\lambda_n \sin\frac{n\pi x}{L}\times\sin\frac{m\pi x}{L} = g(x)\sin\frac{m\pi}{L}x \Rightarrow$$

$$\int_0^L B_n^*\lambda_n \sin\frac{n\pi x}{L}\times\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \int_0^L g(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx \Rightarrow$$

$$B_n^*\lambda_n \underbrace{\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\times\sin\frac{m\pi x}{L}dx}_{=\frac{L}{2}\delta_{nm}=\begin{cases}\frac{L}{2} & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}} = \int_0^L g(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx \Rightarrow B_n^* = \frac{2}{\lambda_n L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\xrightarrow{\lambda_n=\frac{Cn\pi}{L}} B_n^* = \frac{2}{Cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

با قرار دادن مقادیر Bn و B*n در رابطه (۱۲) جواب مساله حاصل می شود.

Heat-conduction or diffusion equation

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u \tag{9.5}$$

This equation arises most commonly when heat is transferred from a hot area to a cold one by conduction, when the temperature satisfies (9.5).

It is also assumed that, at any cross-section x = constant, the temperature $T(x, t)$ is uniform. Consider an element of the bar from x to $x + \Delta x$, where x is measured along the length of the bar, as illustrated in Figure 9.3. An amount of heat $Q(x, t)$ per unit time per unit area enters the left-hand face and an

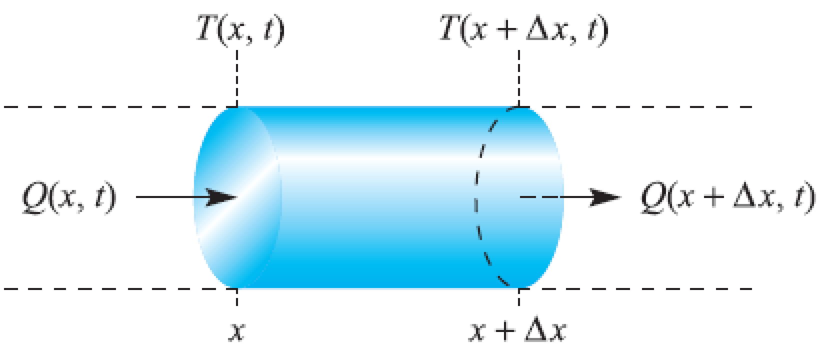


Figure 9.3 Heat flow in an element.

amount $Q(x + \Delta x, t)$ leaves the right-hand face of the element. The net increase per unit cross-sectional area in unit time is

$$Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t)$$

If c is the specific heat of the bar and ρ is its density then the amount of heat in the element is $c\rho T\Delta x$. The net increase in heat in the element in unit time is

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t}\Delta x$$

and is equated to the net amount entering. Thus

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t}\Delta x = Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t)$$

which in the limit as $\Delta x \to 0$ gives

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \textbf{(9.6)}$$

The **Fourier law** for the conduction of heat states that the heat transferred across unit area is proportional to the temperature gradient. Thus

$$Q = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

where k is the thermal conductivity and the minus sign takes into account the fact that heat flows from hot to cold. Substitution for Q in (9.6) gives the **one-dimensional heat equation**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \textbf{Fick's law} \qquad \textbf{(9.7)}$$

where $\kappa = k/c\rho$ is called the **thermal diffusivity**.

۱۱ . ۵ حل معادله گرما به کمک سری فوریه

بعداز حل معادله موج به حل معادلهٔ مهمی می پردازیم که به **معادله گرما** مشهور است. این معادله به صورت زیر می باشد

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u \;; \qquad c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}$$

که در آن $u(x,y,z,t)$ دمای درون جسم، c^2 ضریب نفوذ، K رسانای گرمایی، σ گرمای ویژه، و ρ چگالی جسم است، $\nabla^2 u$ لاپلاسین u بوده و درمختصات کارتزین x، y، z چنین تعریف می شود

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

به عنوان کاربردی مهم، دمای یک میله نازك بلند یا سیمی را که با مقطع عرضی ثابت و همگن در طول محور x ها قرار دارد(شکل ۲۶۱) مورد مطالعه قرارمی دهیم. علاوه بر آن فرض می کنیم سطح جانبی میله به طورکامل عایق پوش شده است، به قسمی که گرما تنها درجهت محور x ها جریان می یابد، دراین صورت u فقط به x و t بستگی دارد، ومعادلهٔ گرما به شکل **معادله گرمای یک بعدی** به صورت زیر درمی آید

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (۱)$$

با اینکه تنها تفاوت این معادله بامعادلهٔ موج در مشتق u نسبت به زمان است ولی چنانچه مشاهده خواهیم کرد رفتار جوابهای معادله (۱) کاملاً متمایز از رفتار جوابهای معادله موج است.

حل معادله (۱) را به ازای برخی شرایط کرانه ای واولیهٔ مهم مورد بررسی قرارمی دهیم. حالتی را درنظر می گیریم که دمای نقاط انتهایی $x = 0$ و $x = L$ میله صفر باشد، دراین صورت **شرایط کرانه ای** به ازای هر t به صورت

$$u(0,t) = 0\ ,\ u(L,t) = 0 \tag{۲}$$

می باشد واگر دمای اولیه این میله، تابع مفروض $f(x)$ فرض شود آنگاه **شرط اولیه** عبارت است از

$$u(x,0) = f(x)\ . \tag{۳}$$

شکل ۲۶۱ . میلهٔ مورد بررسی

جواب $u(x,t)$ معادلهٔ (۱) را طوری می یابیم که در (۲) و (۳) صدق کند. درحل معادله گرما یک شرط اولیه کافی است ، ولی در حل معادله موج بخش ۱۱ . ۳ نیاز به دو شرط اولیه داشتیم. برای حل معادله گرما از روش جداسازی متغیرها استفاده می کنیم. انجام این کار طی مراحل زیر صورت می پذیرد.

گام اول : دو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

با جایگذاری

$$u(x,t) = F(x)\,G(t) \tag{۴}$$

در (۱) می یابیم $F\dot{G} = c^2 F''G$ ، کـه در آن $\dot{G} = \frac{dG}{dt}$ و $F'' = \frac{d^2F}{dx^2}$. مـعـادله حـاصل را چنین می نویسیم

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}\,. \tag{۵}$$

عبارت طرف چپ (۵) فقط به t و عبـارت طرف راست آن تنها تابعی از x می باشـد.

می توان نشان داد که به ازای $k \geq 0$ تنها جواب $u = FG$ که در معادلات (۲) صدق می کند، $u \equiv 0$ است. به ازای مقدار منفی $k = -p^2$ از (۵) داریم

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2\,.$$

با توجه به آن به دومعادله دیفرانسیل زیر می رسیم

$$F'' + p^2 F = 0 \tag{۶}$$

و

$$\dot{G} + c^2 p^2 G = 0. \tag{۷}$$

گام دوم. صدق نمودن شرایط کرانه ای

ابتدا معادله (۶) رادرنظر می گیریم. جواب عمومی این معادله به صورت

$$F(x) = A\cos px + B\sin px \qquad (۸)$$

می باشد. از شرایط کرانه ای (۲) نتیجه می شود که

$$u(0,t) = F(0)\, G(t) = 0$$

و

$$U(L,t) = F(L)\, G(t) = 0 .$$

نظر به اینکه از $G \equiv 0$ ، $u \equiv 0$ حاصل می شود، بنابراین لازم است که $F(0) = 0$ ، $F(L) = 0$ و بنابر (۸) ، $F(0) = A = 0$ و ازآنجا $F(L) = B\sin pL$ ، با فرض $B \neq 0$ (درغیراین صورت $F \equiv 0$ ، و به جواب غیر صفر نمی رسیم) می یابیم $\sin pL = 0$. برای برقرار بودن این تساوی می توان چنین اختیارکرد $p = \frac{n\pi}{L}$ که در آن $n = 1,2,\ldots$. با فرض $B = 1$ ، جوابهای زیر را که در (۲) نیز صدق می کنند برای(۶) حاصل می شود

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}\ ;\ \ n = 1,2,\ldots .$$

حال معادله دیفرانسیل(۷) را درنظر می گیریم. به ازای $p = \frac{n\pi}{L}$ این معادله به صورت $\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0$ که در آن $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ درمی آید. جواب عمومی این معادله به صورت

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}\ ;\ n = 1,2,\ldots$$

می باشد که در آن B_n عددی ثابت است. لذا توابع

$$u_n(x,t) = F_n(t)G_n(t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}\ ;\ n = 1,2,\ldots \qquad (9)$$

جوابهای معادلهٔ گرمای(۱) می باشند که در(۲) نیز صدق می کنند. این جوابها **توابع ویژهٔ** مساله، متناظر با **مقادیر ویژه** $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ می باشند.

گام سوم. جواب مساله اصلی

تاکنون جوابهای (۹) را برای معادله (۱) که در شرایط کرانه ای(۲) نیز صدق می کنند را یافته‌ایم. هم اکنون برای رسیدن به جوابی که در شرط اولیهٔ(۳) صدق کند، به بررسی یک سری ازاین توابع ویژه به صورت

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n^2 t}\ ;\ \lambda_n=\frac{cn\pi}{L} \qquad (۱۰)$$

می پردازیم. با جایگزین کردن $t=0$ در (۱۰) و از (۳) می یابیم

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}=f(x).$$

حال با استفاده از شرط تعامد داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}x\times\sin\frac{m\pi}{L}x=f(x)\sin\frac{m\pi}{L}x\Rightarrow$$

$$\int_0^L B_n\sin\frac{n\pi}{L}x\times\sin\frac{m\pi}{L}x\,dx=\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi}{L}x\,dx\Rightarrow B_n\underbrace{\int_0^L\sin\frac{n\pi}{L}x\times\sin\frac{m\pi}{L}x\,dx}_{=\frac{L}{2}\delta_{nm}=\begin{cases}\frac{L}{2} & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}}=\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi}{L}x\,dx\Rightarrow$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad ,n=1,2,\ldots$$

مثال۱ . دمای اولیه سینوسی

دمای $u(x,t)$ یک میله عایق پوش شده مسی به طول ۸۰ سانتیمتر که در دمای اولیه $100\sin\left(\frac{\pi x}{80}\right)$ درجه سانتیگراد و دوانتهای آن در دمای $0^\circ C$ نگهداری شده است را محاسبه کنید. چه مدتی طول می کشد تا دمای میله به ۵۰ درجه سانتیگراد نزول کند. ابتدا مقدار آنرا حدس بزنید و سپس محاسبه کنید. داده های فیزیکی میله مسی به قرار زیراست:

چگالی برابر $8/92\frac{gm}{cm^3}$ ، گرمای ویژه برابر $0/092 cal/gm^\circ C$ و رسانای گرمایی برابر $0/95\frac{cal}{cm}sec\ ^\circ C$.

حل. باتوجه به شرط اولیه داریم

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{80}=f(x)=100\sin\frac{\pi x}{80}.$$

با توجه به آن می یابیم

$$B_1=100, B_2=B_3=\ldots=0.$$

در (۱۰) نیاز به مقدار $\lambda_1^2=\frac{c^2\pi^2}{L^2}$ ، که در آن $c^2=\frac{K}{\sigma\rho}=\frac{0/95}{0/092}\times 8/92=1/158\left[cm^2/sec\right]$ ، می باشد، داریم

$$\lambda_1^2 = ۱/۱۵۸ \times \frac{۹/۸۷۰}{۶۴۰۰} = ۰/۰۰۱۷۸۵[\sec^{-1}].$$

جواب (۱۰) به صورت

$$u(x,t) = ۱۰۰\sin\frac{\pi x}{۸۰}e^{-۰/۰۰۱۷۸۵t}$$

می باشد. چنانچه

$$۱۰۰e^{-۰/۰۰۱۷۸۵t} = ۵۰ .$$

$$\frac{t = (\ln(۰/۵))}{(-۰/۰۰۱۷۸۵)} = ۳۸۸(\text{ثانیه}) \approx ۶/۵(\text{دقیقه}),$$

جریان گرمای دو بعدی در حالت پایدار

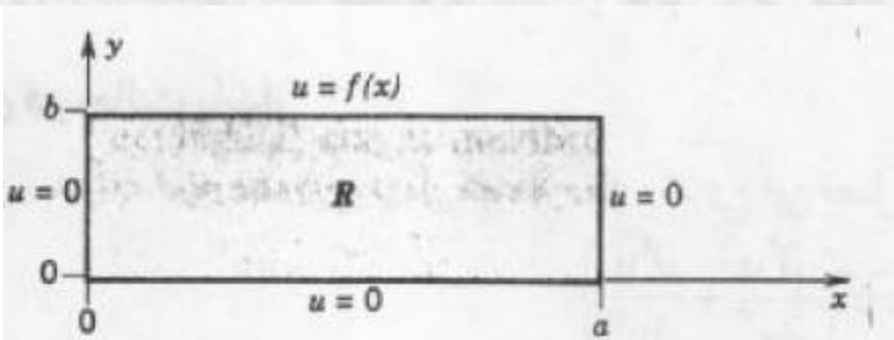
معادله گرمای دو بعدی به صورت زیر بیان می شود[ر . ك . شروع این فصل]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\nabla^2 u = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

اگر جریان گرما **پایدار** باشد (یعنی ، مستقل از زمان باشد)، آنگاه $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ و معادله گرما به **معادلهٔ لاپلاس** [۲]

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (۱۵)$$

تبدیل می شود . در این صورت ، یک مساله گرما شامل معادلهٔ گرما (۱۵) دریک ناحیه R واقع در صفحه xy و شرط کرانه ای مفروض برمنحنی C کران R می باشد . چنین مساله ای را **یک مساله با مقدار کرانه ای** می نامند .



مساله دیریکله دریک مستطیل R(شکل ۲۶۳). مساله دیریکله (۱۵) را در مستطیل R (شکل ۲۶۳)، با فرض اینکه دمای $u(x,y)$ بر سمت فوقانی برابر با تابع مفروض $f(x)$ و در سه طرف دیگر مستطیل صفر باشد، حل کنید.

حل این مساله به روش جداسازی متغیرها صورت می پذیرد. با جایگزینی

$u(x,y) = F(x)G(y)$

در (۱۵) و تقسیم نمودن طرفین آن بر FG می یابیم

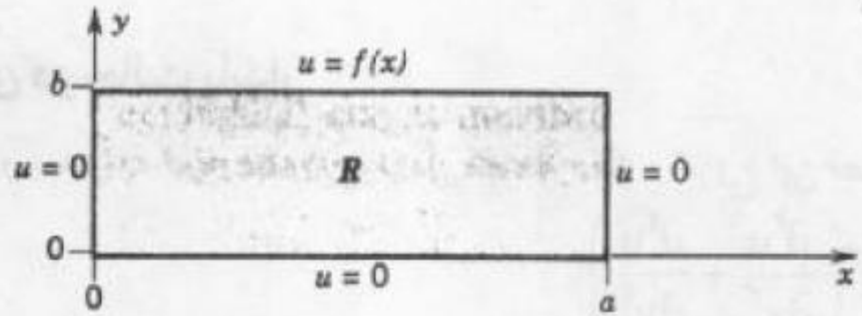
$$G(y)\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} + F(x)\frac{\partial^2 G(y)}{\partial y^2} = 0 \xrightarrow{\div F(x)G(y)} \underbrace{\frac{1}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{dx^2}}_{=-k^2} + \underbrace{\frac{1}{G(y)}\frac{d^2G(y)}{dy^2}}_{=+k^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{F(x)}\dfrac{d^2F(x)}{dx^2} = -k^2 \\ \dfrac{1}{G(y)}\dfrac{d^2G(y)}{dy^2} = +k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2F(x)}{dx^2} + k^2F(x) = 0 \\ \dfrac{d^2G(y)}{dy^2} - k^2G(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = A_1\sin(kx) + B_1\cos(kx) \\ G(y) = A_2 e^{ky} + B_2 e^{-ky} \end{cases} \Rightarrow$$

$$u(x,y) = F(x)G(y) = \left(A_1\sin(kx) + B_1\cos(kx)\right)\times\left(A_2 e^{ky} + B_2 e^{-ky}\right)$$

از مطلب فوق و شرایط کرانه ای داریم

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k^2 F = 0 \quad ; \quad F(0) = 0 \,,\; F(a) = 0.$$



$$\text{In first boundary}: u(x=0,y)=0$$

$$F(x=0)=\left(A_1\sin\left(k\times 0\right)+B_1\cos\left(k\times 0\right)\right)=0\Rightarrow B_1=0$$

$$\text{In second boundary}: u(x=a,y)=0$$

$$F(x=a)=\left(A_1\sin\left(k\times a\right)\right)=0\Rightarrow \sin\left(k\times a\right)=0\Rightarrow ka=n\pi\Rightarrow k=\frac{n\pi}{a}\Rightarrow$$

$$F(x)=\left(A_1\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right)\quad ,\quad n=1,2,\ldots$$

معادله مربوط به G به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d^2G}{dy^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 G=0,$$

که دارای جوابی به صورت زیر می باشد

$$G(y)=G_n(y)=A_n e^{\frac{n\pi y}{a}}+B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}.$$

حـال شـرط کـرانه ای $u=0$ ، بر قـسـمت پائینی R، ایجـاب می کند کـه $G_n(0)=0$ ، یعنی $G_n(0)=A_n+B_n=0$ یا $B_n=-A_n$. لذا داریم

$$G_n(y)=A_n\left(e^{\frac{n\pi y}{a}}-e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)=2A_n\sinh\frac{n\pi y}{a}.$$

ازاین زابطه و (۱۶)، با فرض $2A_n=A_n^*$ ، **توابع ویژه** به صورت زیر حاصل می شود $\left(A_n\times A_1=A_n^*\right)$

$$u_n(x,y)=F_n(x)G_n(y)=A_n^*\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}. \qquad (۱۷)$$

این مطلب در شرط کرانه ای $u=0$ ، بر قسمتهای چپ ، راست و پائینی نیز صدق می کند.

برای نمایش جوابی که در شرط کرانه ای

$$u(x,b) = f(x), \tag{۱۸}$$

بر قسمت بالایی R، صدق کند، سری نامتناهی زیر را درنظر می گیریم

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) .$$

از سری فوق، (۱۸)و (۱۷) با فرض $y = b$ می یابیم

$$u(x,b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a}.$$

این نتیجه را می توان به صورت زیر نوشت

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* \sinh\frac{n\pi b}{a}) \sin\frac{n\pi x}{a} .$$

این موضوع نشان می دهد که عبارت داخل پرانتز می تواند ضریب فوریه b_n از $f(x)$ باشد، یعنی

حال با استفاده از شرط تعامد داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin\frac{n\pi x}{a} \times \sinh\frac{n\pi b}{a} = f(x) \Rightarrow$$

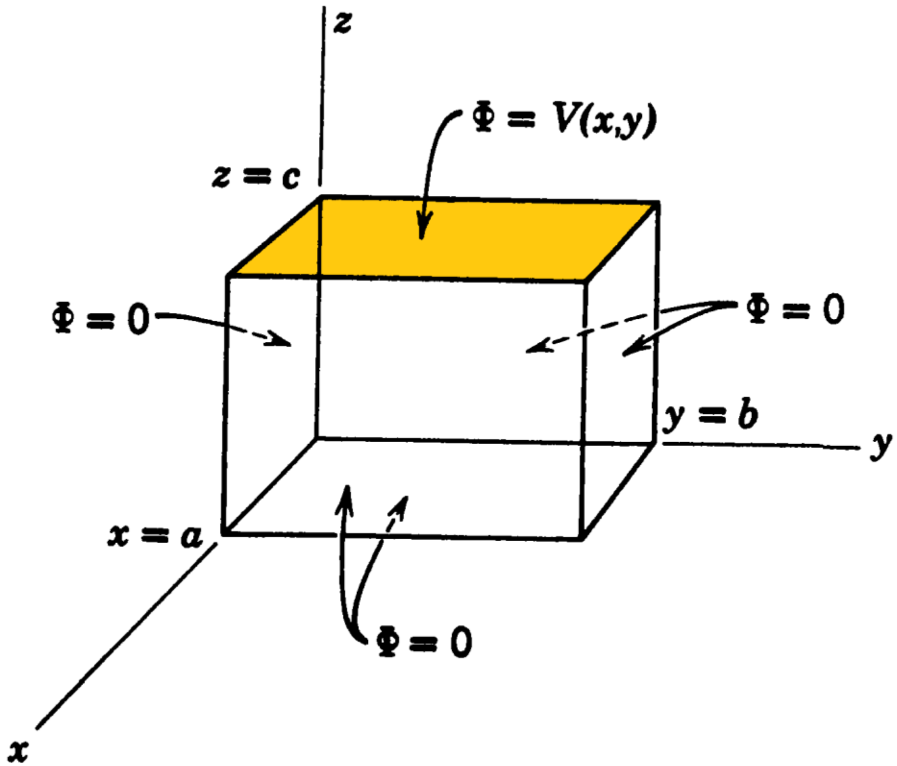
$$\int_0^a A_n^* \sin\frac{n\pi x}{a} \times \sin\frac{m\pi x}{a} \times \sinh\frac{n\pi b}{a}\, dx = \int_0^a f(x)\sin\frac{m\pi x}{a}\, dx \Rightarrow$$

$$A_n^* \sinh\frac{n\pi b}{a} \underbrace{\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a} \times \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx}_{=\frac{a}{2}\delta_{nm} = \begin{cases} \frac{a}{2} & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}} = \int_0^a f(x)\sin\frac{m\pi x}{a}\, dx \Rightarrow A_n^* = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}} \int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\, dx$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}} \int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\, dx \right) \sin\frac{n\pi x}{a} \times \sinh\frac{n\pi y}{a}$$

مثال: یک جعبه ی مکعب مستطیل شکل به ابعاد a، b و c داریم. پتانسیل تمام سطوح غیر از z=c صفر است.
می خواهیم پتانسیل را در داخل جعبه بدست آوریم.

در داخل جعبه که بار نداریم پس برای آن معادله ی لاپلاس صادق است. و فرض می کنیم جواب معادله ی لاپلاس در مختصات کارتزین شده:



$$\nabla^2 V = 0 \quad \Rightarrow$$
$$V(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z) \quad (*)$$

$$\nabla^2 V(x,y,z)=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V(x,y,z)}{\partial z^2}=0 \xrightarrow{V(x,y)=X(x)Y(y)Z(z)}$$

$$Y(y)Z(z)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}+X(x)Z(z)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}+X(x)Y(y)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\div X(x)Y(y)Z(z)} \underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{=-\alpha^2}+\underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{=-\beta^2}+\underbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{=+\gamma^2}=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2}=-\alpha^2\\[2mm] \dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2}=-\beta^2\\[2mm] \dfrac{1}{Z}\dfrac{d^2Z}{dz^2}=\gamma^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{d^2X}{dx^2}+\alpha^2X=0\\[2mm] \dfrac{d^2Y}{dy^2}+\beta^2Y=0\\[2mm] \dfrac{1}{Z}\dfrac{d^2Z}{dz^2}-\gamma^2Z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X(x)=A_1\sin(\alpha x)+B_1\cos(\alpha x)\\ Y(y)=A_2\sin(\beta y)+B_2\cos(\beta y)\\ Z(z)=A_3\sinh(\gamma z)+B_3\cosh(\gamma z)\end{cases}$$

حال در مورد وجه پشت و جلو داریم:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ V=0\end{cases}\xrightarrow{X(x)=A_1\sin\alpha x+B_1\cos\alpha x}\begin{cases}X(x)=A_1\sin\alpha x\\ B_1=0\end{cases}\xrightarrow{\begin{cases}x=a\\ V=0\end{cases}}\\ A_1\sin\alpha a=0\Rightarrow \alpha a=n\pi\Rightarrow \alpha_n=\dfrac{n\pi}{a}\quad;\ n=0,1,2,\ldots\end{array}\right] \Rightarrow X(x)=A_1\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\quad(1)$$

حال جوابهای $Y(y)$: $Y(y)=A_2\sin\beta y+B_2\cos\beta y$

حال در مورد وجه چپ و راست داریم:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0\\V=0\end{cases}\xrightarrow{Y(y)=A_2\sin\beta y+B_2\cos\beta y}\begin{cases}Y(y)=A_2\sin\beta y\\B_2=0\end{cases}\xrightarrow{\begin{cases}y=b\\V=0\end{cases}}\\ A_2\sin\beta y=0\Rightarrow\beta b=m\pi\Rightarrow\beta_m=\dfrac{m\pi}{b}\ \ ;\ m=0,1,2,\ldots\end{array}\right]\Rightarrow Y(y)=A_2\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\quad(2)$$

حال جوابهای $Z(z)$: مطابق با جداسازی متغییر ها می بایست برای معادله ی لاپلاس داشته باشیم: $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$

$$\underbrace{\frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}V(x,y,z)}_{=\alpha^2}+\underbrace{\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2}{dy^2}V(x,y,z)}_{=\beta^2}+\underbrace{\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2}{dz^2}V(x,y,z)}_{=-\gamma^2}=0$$

فلذا جوابهای $Z(z)$ می شوند:

$$Z(z)=A_3\sinh\gamma z+B_3\cosh\gamma z$$

$$\left[\begin{cases}z=0\\V=0\end{cases}\xrightarrow{Z(z)=A_3\sinh\gamma z+B_3\cosh\gamma z}\begin{cases}Z(z)=A_3\sinh\gamma z\\B_3=0\end{cases}\right]$$

با توجه به : $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$

داریم:

$$\gamma=\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}=\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}\Rightarrow\gamma_{nm}=\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2+\left(\frac{m}{b}\right)^2}\qquad(3)$$

با توجه به (❋)، (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$V(x,y,z)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\underbrace{A_1\,A_2\,A_3}_{=A_{nm}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sinh\left(\gamma_{nm}\,z\right)\Rightarrow$$

$$V(x,y,z)=\sum_{n,m=1}^{\infty}A_{nm}\sin\left(\alpha_n\,x\right)\sin\left(\beta_m\,y\right)\sinh\left(\gamma_{nm}\,z\right)$$

حال شرط زیر:

$$\xrightarrow{\begin{cases}V=V(x,y)\\z=c\end{cases}}V(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}A_{nm}\sin\left(\alpha_n\,x\right)\sin\left(\beta_m\,y\right)\sinh\left(\gamma_{nm}\,c\right)$$

حال استفاده از شرط تعامد برای محاسبه ی A_{nm}:

طرفین را در $\sin\left(\alpha_{n'}\,x\right)\sin\left(\beta_{m'}\,y\right)$ ضرب کرده و انتگرال می گیریم.

$$\int_0^a\int_0^b V(x,y)\sin\left(\alpha_{n'}x\right)\sin\left(\beta_{m'}y\right)dx\,dy=$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\int_0^a\int_0^b A_{nm}\sin\left(\alpha_n x\right)\sin\left(\beta_m y\right)\sinh\left(\gamma_{nm}c\right)\sin\left(\alpha_{n'}x\right)\sin\left(\beta_{m'}y\right)dx\,dy\Rightarrow$$

$$\int_0^a\sin\left(\alpha_{n'}x\right)dx\int_0^b V(x,y)\sin\left(\beta_{m'}y\right)dy=$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}A_{nm}\sinh\left(\gamma_{nm}c\right)\underbrace{\int_0^a\sin\left(\alpha_n x\right)\sin\left(\alpha_{n'}x\right)dx}_{\xrightarrow{\int_0^{2\pi}\sin(mx)\sin(nx)dx=\begin{cases}\pi\delta mn & n\neq0\\0 & n=0\end{cases}}=\frac{a}{2}\delta_{nn'}}\quad\underbrace{\int_0^b\sin\left(\beta_m y\right)\sin\left(\beta_{m'}y\right)dy}_{\xrightarrow{\int_0^{2\pi}\sin(mx)\sin(nx)dx=\begin{cases}\pi\delta mn & n\neq0\\0 & n=0\end{cases}}=\frac{b}{2}\delta_{mm'}}\Rightarrow$$

$$\int_0^a\sin\left(\alpha_{n'}x\right)dx\int_0^b V(x,y)\sin\left(\beta_{m'}y\right)dy=\sum_{n,m=1}^{\infty}A_{nm}\sinh\left(\gamma_{nm}c\right)\frac{ab}{4}$$

$$\boxed{A_{nm}=\frac{4}{ab\sinh\left(\gamma_{nm}c\right)}\int_0^a\sin\left(\alpha_{n'}x\right)dx\int_0^b V(x,y)\sin\left(\beta_{m'}y\right)dy}$$

۱۱ . ۷ مدلسازی : غشا، معادله موج دو بعدی

به عنوان یک مساله مهم دیگر از مبحث ارتعاشات، حرکت یک غشای کشیده شده مانند پوستهٔ طبل را مورد بررسی قرار می دهیم. بررسیهای مربوط به غشا مرتعش شبیه ارتعاش نخ است که در بخش های ۱۱ . ۲ مورد بررسی قرار گرفت است.

مفروضات فیزیکی زیر را درنظر می گیریم:

۱ . جرم غشا برای واحد سطح ثابت می باشد(«غشای همگن») . غشا بطور کامل انعطاف پذیر بوده و به اندازه ای نازك است که هیچگونه مقاومتی در برابر خمش از خود نشان نمی دهد.

۲ . غشا کشیده شده و سپس در سراسر کرانهٔ خود در صفحه xy ثابت نگهداشته شده است. کشش برواحد طول T که بر اثر کشیدن غشا ایجاد شده، درهمهٔ نقاط ودرتمام جهتها یکی می باشد ودرعین حرکت تغییر نمی کند.

۳ . تغییرمکان $u(x,y,t)$ غشا دراثنای حرکت نسبت به اندازهٔ غشا کوچک است، وتمام زوایای میل کوچک می باشند.

گرچه درعمل این مفروضات نمی تواند تحقق یابند، ولی ارتعاشات کوچک عرضی یک غشای نازك به طورنسبتاً دقیقی دراین مفروضات صدق می نمایند.

جواب این مساله عبارتست از:

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

This PDE is called the **two-dimensional wave equation**. The expression in parentheses is the Laplacian $\Delta^2 u$ of u (Sec. 10.8). Hence (3) can be written

(3′) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta^2 u.$$

Solutions of the wave equation (3) will be obtained and discussed in the next section.

۱۱ .۸ غشای مستطیلی . استفاده از سری فوریه دوگانه

برای حل مساله غشای مرتعش، باید جوابی مانند $u(x,y,t)$ ازمعادلهٔ موج دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

را که در شرط کرانه ای

(۲) $u = 0$ بر کران غشا به ازای هر $t \geq 0$ ،

و شرایط اولیهٔ

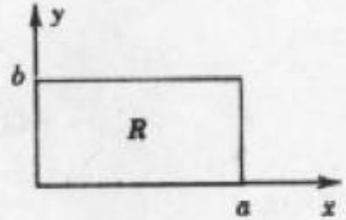
(۳) $u(x,y,0) = f(x,y)$ [تغییر مکان اولیهٔ مفروض $f(x,y)$]

و

(۴) $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x,y)$ [سرعت اولیهٔ مفروض $g(x,y)$]

صدق می کند به دست آوریم. $u(x,y,t)$ تغییر مکان نقطه (x,y) را از وضعیت تعادل $u = 0$ در لحظه t را نشان می دهد. مشاهده می کنیم که شرایط (۲) تا (۴) شبیه شرایطی هستند که درمورد نخ مرتعش داشتیم.

غشای مستطیلی R را که در شکل ۲۶۸ نشان داده شده است را به عنوان اولین مورد مهم مورد بررسی قرار می دهیم.



شکل ۲۶۸ . غشای مستطیلی

گام اول . سه معادله دیفرانسیل معمولی

با اعمال روش ضربی ابتدا جوابهایی ازمعادلهٔ موج (۱) را که در شرط کرانه ای (۲) صدق می کنند مشخص می نمائیم . بدین منظور فرض کنید

$$u(x,y,t) = F(x,y)G(t) . \qquad (۵)$$

با جایگزینی (۵) درمعادلهٔ موج (۱) می یابیم

$$F\ddot{G} = c^2(F_{xx}G + F_{yy}G)$$

که در آن زیرنویسها مشتقات جزئی ونقطه ها مشتق نسبت به t را نشان می دهند . با تقسیم طرفین رابطه فوق بر c^2FG ، داریم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}) .$$

چون توابع طرف چپ وابسته به t می باشند و توابع طرف راست مستقل از t هستند، باید طرفین تساوی فوق برابر با یک مقدار ثابت باشند. باکمی دقت مشاهده می کنیم که تنها مقادیر منفی این مقدار ثابت منجر به جوابهایی می شوند که بدون آنکه همواره صفر باشند در شرط کرانه ای (۲) صدق می نمایند . اثبات درستی این مطلب همانند روشی است که در بخش ۱۱ . ۳ آمده است . چنانچه این

مقدار ثابت را با نماد $-v^2$ نمایش دهیم، می یابیم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}) = -v^2.$$

از رابطه فوق دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی معمولی

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \qquad (6)$$

که در آن $\lambda = cv$ و معادله با مشتق جزئی دومتغیره

$$F_{xx} + F_{yy} + v^2 F = 0 \qquad (7)$$

که به معادلهٔ هلمولتز[۴] دو بعدی مشهور می باشد، حاصل می شود.

هم اکنون **روش ضربی** را برای معادله این **هلمولتز** به کار میگیریم. برای منظور فرض کنید

$$F(x, y) = H(x)Q(y). \qquad (8)$$

با جایگذاری (۸) در (۷) می یابیم

$$\frac{d^2H}{dx^2}Q = -\left(H\frac{d^2Q}{dy^2} + v^2 HQ\right).$$

با تقسیم طرفین این تساوی بر HQ داریم

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2} + v^2 Q\right).$$

هر دو طرف تساوی فوق باید برابر یک عدد ثابت باشد. این ثابت باید منفی، مثلاً $-k^2$، باشد زیرا تنها مقادیر منفی منجر به جوابهایی غیرمتحد با صفر می شوند که در شرایط کرانه ای (۲) صدق می کنند.

ازاینرو

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2} + v^2Q\right) = -k^2 .$$

ازاین تساوی دومعادله دیفرانسیل معمولی برای H و Q ، به صورت زیر حاصل می شوند

$$\frac{d^2H}{dx^2} + k^2H = 0 \tag{9}$$

و

$$\frac{d^2Q}{dy^2} + p^2Q = 0 \; ; \; p^2 = v^2 - k^2 . \tag{10}$$

گام دوم . صدق نمودن شرایط کرانه ای

جوابهای عمومی (۹) و (۱۰) عبارت است از

$$H(x) = A\cos kx + B\sin kx \quad \text{و} \quad Q(y) = C\cos py + D\sin py$$

۶-هرمان فن هلمولتز(Hermann von Helmholtz) ، ۱۸۲۱-۱۸۹۴ ، فیزیکدان آلمانی که به خاطر آثار مهمش درترمودینامیک ، جریان سیال واکوستیک معروف می باشد .

که در آن A ، B ، C و D مقادیر ثابت می باشند. از (۵) و (۲) پی می بریم که $F = HQ$ باید روی کرانه صفر باشد، که با $x = 0$ ، $x = a$ ، $y = 0$ و $y = b$ متناظر می باشند [شکل ۲۶۸ را ملاحظه کنید]. این مطلب شرایط زیر را نتیجه می دهد

$$H(0) = 0\ ,\ H(a) = 0\ \ ,\ \ Q(0) = 0\ ,\ Q(b) = 0\ .$$

باتوجه به این نتایج $H(0) = A = 0$ ، و بنابراین

$$H(a) = B\sin ka = 0\ .$$

باید B را مخالف صفر بگیریم، چون درغیر این صورت $H = 0$ و $F = 0$. با توجه به چنین فرضی می یابیم $\sin ka = 0$ یا $ka = m\pi$ ، یعنی به ازای هر عدد صحیح m

$$k = \frac{m\pi}{a}.$$

همینطور می توان استنتاج نمود که $C = 0$ و p باید به مقادیر $p = \dfrac{n\pi}{b}$ محدود شود که در آن n عددی صحیح است. ازاینرو جوابهای زیر حاصل می شوند

$$H_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a} \qquad \text{و} \qquad Q_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b}$$

که در آن $m, n = 1, 2, \ldots$. (مانند حالت نخ مرتعش، لازم نیست که حالتهای $m, n = -1, -2, \ldots$ را مورد بررسی قراردهیم، چرا که جوابهای متناظر با این اعداد صرف نظر از یک ضریب ۱− الزاماً همان جوابهای مربوط به m و n مثبت می باشند.) از اینرو توابع

$$F_{mn}(x,y) = H_m(x)Q_n(y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad m = ۱,۲,\dots, \quad n = ۱,۲,\dots, \tag{۱۱}$$

جوابهایی از معادلهٔ (۷) می باشند که بر کرانهٔ غشای مستطیلی برابر صفر هستند.

حال **توابع ویژه ومقادیر ویژه** را مورد بررسی قرار می دهیم. بدین منظور از(۷)، (۶) را پی می گیریم. باتوجه به اینکه در (۱۰)، $p^۲ = v^۲ - k^۲$ و در (۶)، $\lambda = cv$ می یابیم

$$\lambda = c\sqrt{k^۲ + p^۲}\ .$$

از اینرو با $k = \frac{m\pi}{a}$ و $p = \frac{n\pi}{b}$ درمعادله دیفرانسیلی (۶) مقدار

$$\lambda = \lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^۲}{a^۲} + \frac{n^۲}{b^۲}} \qquad m = ۱,۲,\dots, \quad n = ۱,۲,\dots, \tag{۱۲}$$

متناظر قرار می گیرد. باتوجه به آن جواب عمومی (۶) عبارت است از

$$G_{mn}(t) = B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t\ .$$

در نتیجه توابع $u_{mn}(x,y,t) = F_{mn}(x,y)G_{mn}(t)$ ، که به صورت

$$u_{mn}(x,y,t) = (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (۱۳)$$

نوشته می شوند با λ_{mn} ی که به (۱۲) بیان شده است، جوابهای معادلهٔ موج (۱) می باشند که بر کرانهٔ غشای مستطیلی شکل ۲۶۸ صفر هستند. این توابع را **توابع ویژه** یا توابع مشخصه می نامند، و اعداد λ_{mn} **مقادیر ویژه** یا مقادیر مشخصه غشای مرتعش نامیده می شوند. فرکانس u_{mn} با $\frac{\lambda_{mn}}{2\pi}$ برابر می باشد.

در بحث **توابع ویژه**، جالب است توجه کنیم که بنا به آنکه a و b چه باشند، ممکن است چندین توابع F_{mn} دارای یک مقدار ویژه مشترك باشند. تعبیر فیزیکی این مطلب بدان معنی است که ممکن است ارتعاشاتی با فرکانس یکسان وجود داشته باشند که **خطوط گرهی** (منحنیهای حاصل از نقاطی بر غشا که فاقد حرکت می باشند) آنها کاملاً متمایز می باشند. این مطلب را با ارائه مثال زیر روشن می کنیم.

مثال : مطلوب است محاسبه ی جریان مدار R-L-C با بکار گیری سری فوریه ی :

$$E(t) = \begin{cases} 100(\pi t + t^2) & -\pi < t < 0 \\ 100(\pi t - t^2) & 0 < t < \pi \end{cases}$$

$$\boxed{R = 100\pi \qquad L = 10H \qquad C = 10^{-2}F}$$

حل:

$$RI + \frac{q}{c} + L\frac{dI}{dt} = E(t)$$

$$q = \int I dt$$

$$(*) \quad R\dot{I} + \frac{I}{c} + L\ddot{I} = \dot{E}(t) \quad ; \quad \begin{cases} \dot{I} = \dfrac{dI}{dt} \\ \ddot{I} = \dfrac{d^2 I}{dt^2} \end{cases}$$

ابتدا سری فوریه $\dot{E}(t)$ محاسبه می شود .

$$E^0(t) = \begin{cases} 100(\pi + 2t) & -\pi < t < 0 \\ 100(\pi - 2t) & 0 < t < \pi \end{cases}$$

چون تابع $\dot{E}(t)$ زوج است پس b_n ها صفرند.

$$2L = 2\pi \rightarrow L = \pi$$

$$a_{\circ} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f\ (\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$$

$$a_{\circ} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 100\,(\pi - 2\,\mathrm{t})\,\mathrm{dt}$$

$$a_{\circ} = \frac{100}{\pi}\left[\pi^{2} - \pi^{2}\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f\ (\mathrm{x})\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} 100\,(\pi - 2\,\mathrm{t})\cos\frac{n\pi}{\pi}t\,dt$$

$$a_n = \frac{200}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} \pi\cos nt\,dt - \int_{0}^{\pi} 2t\,\cos nt\,dt\right]$$

$$\rightarrow a_n = \frac{200}{\pi}\left[\underbrace{\frac{\pi}{n}\sin nt\,\Big|_{0}^{\pi}}_{=0} - 2\int_{0}^{\pi} t\,\cos nt\,dt\right]$$

$$a_n = \frac{-400}{\pi}\left[\underbrace{\frac{t}{n}\sin nt\,\Big|_{0}^{\pi}}_{=0} - \int_{0}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nt\,dt\right]$$

$$a_n = \frac{-400}{\pi}\left[\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\cos nt\,\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$a_n = \frac{-400}{\pi n^{2}}\left[\cos n\pi - 1\right]$$

$$a_n = \frac{400}{n^{2}\pi}\left[1 - (-1)^{n}\right]$$

بنابراین:

$$\overset{\circ}{E}(\mathrm{t})=\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ فرد}}}^{\infty}\frac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos n\pi t$$

فرض می کنیم جواب جریان به صورت زیر باشد :

$$I(\mathrm{t})=\sum_n(\mathrm{A}_n\cos\mathrm{n}\,\pi\,\mathrm{t}+\mathrm{B}_n\sin\mathrm{n}\,\pi\,\mathrm{t})$$

با قرار دادن در (❉) داریم:

$$R\left[-n\pi A_n\sin n\pi t+n\pi B_n\cos n\pi t\right]+\frac{1}{c}\left[A_n\cos n\pi t+B_n\sin n\pi t\right]+L\left[-n^2\pi^2A_n\cos n\pi t-n^2\pi^2B_n\sin n\pi t\right]$$

$$=\frac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos n\pi t$$

$$\left(-n\pi RA_n+\frac{B_n}{c}-n^2\pi^2LB_n\right)\sin n\pi t+\left(n\pi RB_n+\frac{A_n}{c}-n^2\pi^2LA_n\right)\cos n\pi t=\frac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos n\pi t$$

$$\rightarrow\begin{cases}-n\pi RA_n+\left(\dfrac{1}{c}-n^2\pi^2L\right)B_n=0\\[2ex] n\pi RB_n+\left(\dfrac{1}{c}-n^2\pi^2L\right)A_n=\dfrac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\end{cases}$$

از جمله اول می نویسیم:

$$(**)\quad A_n=\frac{1}{n\pi R}\left(\frac{1}{c}-n^2\pi^2L\right)B_n$$

در جمله دوم می گذاریم:

$$n\pi RB_n+\left(\frac{1}{c}-n^2\pi^2L\right)\left(\frac{1}{n\pi R}\left(\frac{1}{c}-n^2\pi^2L\right)B_n\right)=\frac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\rightarrow\boxed{B_n=\frac{\frac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi R\left(\frac{1}{n\pi R}\left(\frac{1}{c}-n^2\pi^2L\right)^2\right)}}$$

با قرار دادن در (**) داریم:

$$\boxed{A_n=\frac{\frac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)}{\left(n\pi R\right)^2\left(\frac{1}{n\pi R}\left(\frac{1}{c}-n^2\pi^2L\right)\right)}}$$

بنابراین جواب I(t) می شود:

$$I(t)=\sum_{n}(A_n\cos n\pi t+B_n\sin n\pi t)\xrightarrow[B_n=\frac{\frac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi R\left(\frac{1}{n\pi R}\left(\frac{1}{c}-n^2\pi^2L\right)^2\right)}]{A_n=\frac{\frac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)}{(n\pi R)^2\left(\frac{1}{n\pi R}\left(\frac{1}{c}-n^2\pi^2L\right)\right)}}$$

$$I(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left[\frac{\frac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)}{(n\pi R)^2\left(\frac{1}{n\pi R}\left(\frac{1}{c}-n^2\pi^2L\right)\right)}\right]\cos n\pi t+\left[\frac{\frac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi R\left(\frac{1}{n\pi R}\left(\frac{1}{c}-n^2\pi^2L\right)^2\right)}\right]\sin n\pi t\right]$$

حال می توان مقادیر R و L و C را قرار داد و جواب ساده تری بدست آورد.

$$\xrightarrow[C=10^{-2}\ F]{R=100\pi\quad \&\quad L=10H} I\,(\mathrm{t})=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left[\frac{\frac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)}{\left(n\pi[100\pi]\right)^2\left(\frac{1}{\left(n\pi[100\pi]\right)}\left(\frac{1}{[0.01]}-n^2\pi^2[10]\right)\right)}\right]\cos n\pi t+\left[\frac{\frac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)}{\left(n\pi[100\pi]\right)\left(\frac{1}{\left(n\pi[100\pi]\right)}\left(\frac{1}{[0.01]}-n^2\pi^2[10]\right)^2\right)}\right]\sin \mathrm{n}\,\pi\,\mathrm{t}\right]$$

$$\Rightarrow I\,(\mathrm{t})=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left[\frac{\frac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)}{\left(10^4 n^2\pi^4\right)\left(\frac{1}{\left(100n\pi^2\right)}\left(100-n^2\pi^2[10]\right)\right)}\right]\cos n\pi t+\left[\frac{\frac{400}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)}{\left(100n\pi^2\right)\left(\frac{1}{\left(100n\pi^2\right)}\left(100-10n^2\pi^2\right)^2\right)}\right]\sin \mathrm{n}\,\pi\,\mathrm{t}\right]$$

حال می توان n را از ۱ تا بینهایت و برای هر n، t را هم مقدار دهی کرد (برنامه رسم یا برنامه نویسی کامپیوتری) و در هر زمان مشخص جریان را بدست آورد یا نمودار I-t را رسم نمود.

11.3 Forced Oscillations نوسانهای واداشته

سریهای فوریه درارتباط با معادلات دیفرانسیل دارای کاربردهای مهمی هستند.
کاربردهای بیشتر درمعادلات دیفرانسیل بامشتقات جزئی که در فصل ۱۱ مطرح می شوند

From Sec. 2.8 we know that forced oscillations of a body of mass m on a spring of modulus k are governed by the ODE

$$my'' + cy' + ky = r(t) \tag{1}$$

where $y = y(t)$ is the displacement from rest, c the damping constant, k the spring constant (spring modulus), and $r(t)$ the external force depending on time t. Figure 274 shows the model and Fig. 275 its electrical analog, an RLC-circuit governed by

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t) \tag{1*}$$ (Sec. 2.9).

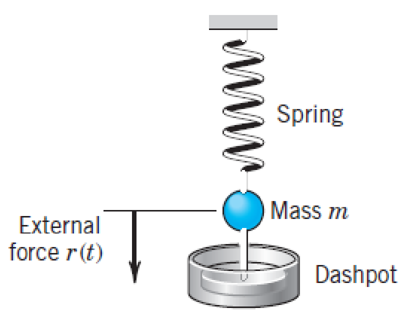


Fig. 274. Vibrating system under consideration

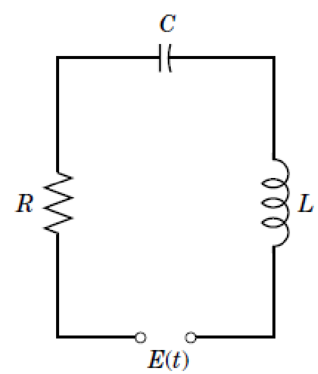


Fig. 275. Electrical analog of the system in Fig. 274 (*RLC-circuit*)

EXAMPLE 1 **Forced Oscillations under a Nonsinusoidal Periodic Driving Force**

In (1), let $m = 1$ (g), $c = 0.05$ (g/sec), and $k = 25$ (g/sec^2), so that (1) becomes

$$y'' + 0.05y' + 25y = r(t) \tag{2}$$

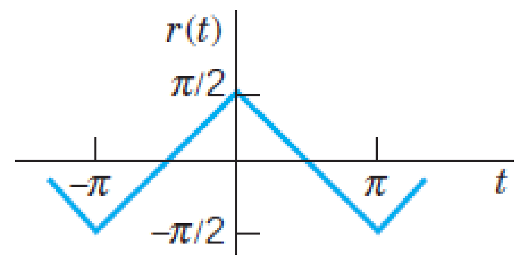


Fig. 276. Force in Example 1

where $r(t)$ is measured in g · cm/sec^2. Let (Fig. 276)

$$r(t) = \begin{cases} t + \dfrac{\pi}{2} & \text{if} \quad -\pi < t < 0, \\ -t + \dfrac{\pi}{2} & \text{if} \quad 0 < t < \pi, \end{cases} \qquad r(t + 2\pi) = r(t).$$

Find the steady-state solution $y(t)$.

Solution. We represent $r(t)$ by a Fourier series, finding

$$r(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\right). \tag{3}$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \xrightarrow{P=2L=2\pi \Rightarrow L=\pi} a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx + \int_{0}^{\pi}\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)dx\right] \Rightarrow$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\pi}^{0} + \frac{\pi}{2}x\Big|_{-\pi}^{0} - \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{\pi} + \frac{\pi}{2}x\Big|_{0}^{\pi}\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx + \int_{0}^{\pi}\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx\right] \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)\,dx + \underbrace{\int_{-\pi}^{0}\frac{\pi}{2}\cos(nx)\,dx}_{=0} + \int_{0}^{\pi} -x\cos(nx)\,dx + \underbrace{\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos(nx)\,dx}_{=0}\right]$$

$$\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)\,dx \overset{\begin{cases} x=u\to dx=du \\ \cos nx\ dx=dv\to \frac{1}{n}\sin nx=v\end{cases}}{=} \frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)\,dx = 0 + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{n^2}\left[1-\cos n\pi\right] = \frac{1}{n^2}\begin{cases} 2 & n=\text{odd} \\ 0 & n=\text{even}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\begin{cases} 2 & n=\text{odd} \\ 0 & n=\text{even}\end{cases} - \frac{1}{n^2}\begin{cases} -2 & n=\text{odd} \\ 0 & n=\text{even}\end{cases}\right] \Rightarrow a_n = \frac{4}{\pi n^2} \quad ,n=\text{odd}$$

سری فوریه تابع زوج فوق کسینوسی است و داریم:

$b_n=0$

Then we consider the ODE

$$(4) \qquad y'' + 0.05y' + 25y = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt \qquad (n = 1, 3, \cdots)$$

whose right side is a single term of the series (3). From Sec. 2.8 we know that the steady-state solution $y_n(t)$ of (4) is of the form

$$(5) \qquad y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt.$$

By substituting this into (4) we find that

$$(6) \qquad A_n = \frac{4(25 - n^2)}{n^2\pi D_n}, \qquad B_n = \frac{0.2}{n\pi D_n}, \qquad \text{where} \qquad D_n = (25 - n^2)^2 + (0.05n)^2.$$

Since the ODE (2) is linear, we may expect the steady-state solution to be

$$(7) \qquad y = y_1 + y_3 + y_5 + \cdots$$

تکلیف ۲ : ریاضی مهندسی

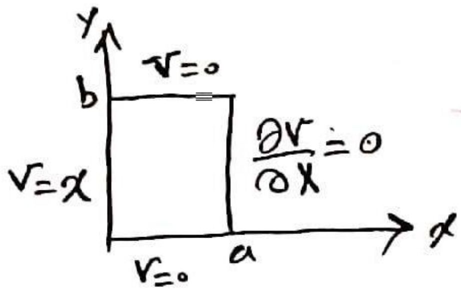
۱- معادله موج یک بعدی را برای تار مرتعش با شرایط داده شده حل نمایید:

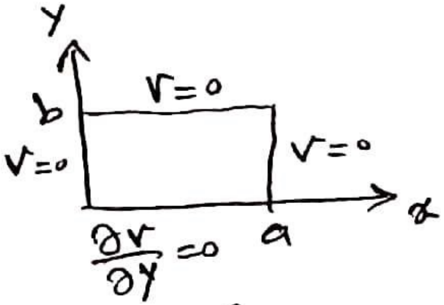
$$\begin{cases} (a) & u(0,t)=0 \quad t\geq 0 \\ (b) & u(l,t)=0 \quad t\geq 0 \\ (c) & \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \quad 0\leq x\leq l \\ (d) & u(x,0)=x \end{cases}$$

۲- معادله موج یک بعدی را برای تار مرتعش با شرایط داده شده حل نمایید:

$$\begin{cases} (a) & u(0,t)=0 \\ (b) & u(l,t)=0 \\ (c) & u(x,0)=x \\ (d) & \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)_{t=0}=x^2 \end{cases}$$

۳- معادله لاپلاس دو بعدی را برای تابع v در نقاط داخل ناحیه، به روش جداسازی متغیرها حل نمایید.





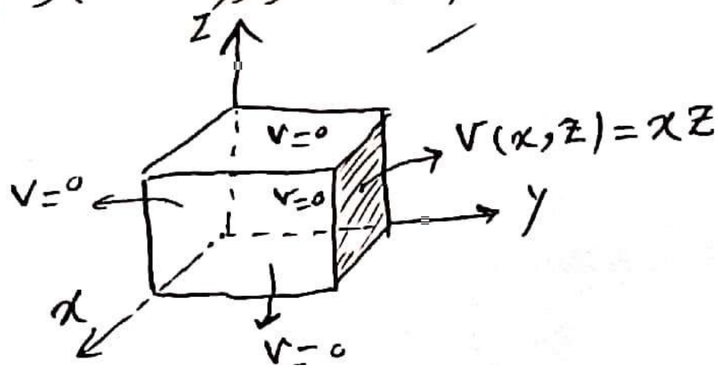
۴- معادله پواسون $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin\frac{2\pi x}{a}$ را حل نمایید.

۵- معادله لاپلاس دو بعدی را برای لبه‌ی V در نقاط داخل آن حل نمایید.

۶- معادله گرمای یک بعدی را در میله‌ای به طول l و عایق پوشش در سطح جانبی با شرایط داده شده حل کنید.

$$u(0,t)=u(l,t)=0 \quad \text{و} \quad u(x,0)=x^2$$

۷- معادله لاپلاس ۳ بعدی را برای سازه‌ی داده شده حل کنید و V را در تمامی نقاط داخل آن بدست آورید.



(تمامی سطوح $V=0$ غیر از سطح سمت راست).

فصل ۱۶

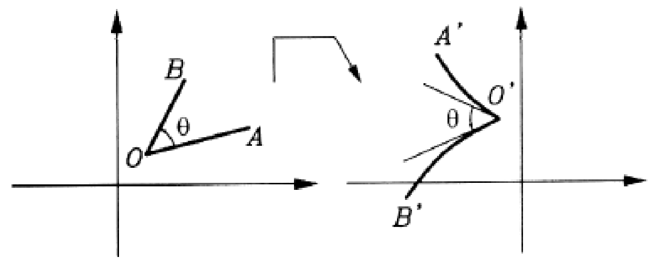
نگاشت همدیس Conformal Mapping

اگر تابع f با ضابطه $w = f(z)$ در دامنه D از صفحه z تعریف شود، آنگاه به ازای هر نقطه از D نقطه ای از صفحه w متناظر قرار می گیرد. به این ترتیب **نگاشتی** از D بر روی برد مقادیر $f(z)$ در صفحه w خواهیم داشت. این «راهیافت هندسی» در آنالیز مختلط به ما کمک می کند تا خصلت یک تابع مختلط را با بررسی این که آن تابع منحنیها ونواحی معین را چگونه می نگارد را «تجسم کنیم» ما

از نظر هندسی عملکرد یک تابع مختلط مانند $w = f(z)$ را می‌توان یک تبدیل دانست که هر نقطه از صفحه z ها را به نقطه‌ای از صفحه w ها می‌نگارد.

✓ **چند تعریف و قضیه و اصل:**

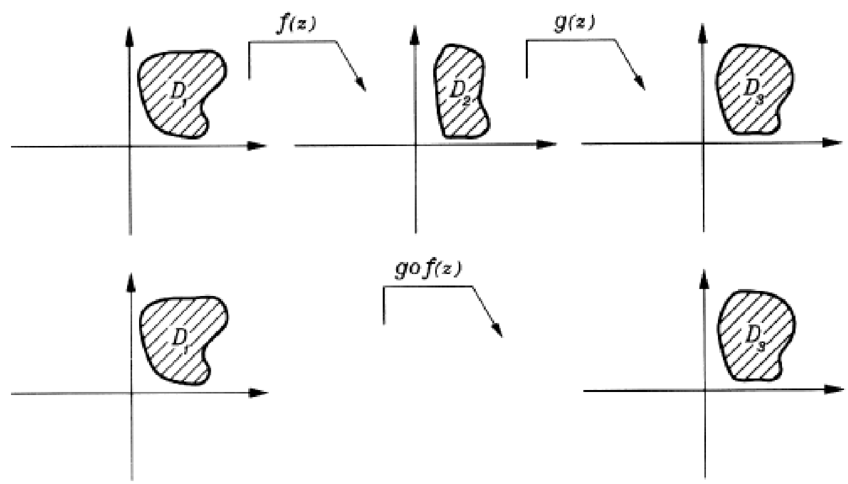
۱) نگاشت $w = f(z)$ را در نقطه z_0 همدیس می‌گوئیم هرگاه هر زاویه با رأس z_0 در صفحه z ها به زاویه‌ای هم اندازه و هم جهت با این زاویه در صفحه w ها تبدیل شود.



مطابق قضیه‌ای هرگاه $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی بوده و $f'(z_0)$ مخالف صفر باشد، نگاشت $w = f(z)$ در نقطه z_0 همدیس است.

۲) نقاط ثابت یک نگاشت نقاطی هستند که تبدیل یافته‌شان تحت آن نگاشت دقیقاً مانند نقطه مذکور می‌باشد. لذا برای یافتن نقاط ثابت نگاشت $w = f(z)$ باید معادله $f(\alpha) = \alpha$ را حل کنیم.

۳) مطابق اصل ترکیب نگاشت‌ها داریم:



۴) مطابق اصل (حفظ مرز) تحت یک نگاشت مرزهای یک ناحیه به مرزهای ناحیه تبدیل یافته، نگاریده می‌شوند (مرز، باقی می‌ماند).

مطابق اصل (حفظ جهت) اگر با حرکت روی مرز از A به B ناحیه D سمت چپمان باشد با حرکت روی مرز تبدیل یافته از A' به B' (تبدیل یافته‌ها A و B) ناحیه D' (تبدیل یافته ناحیه D) سمت چپمان واقع خواهد شد. (در نگاشت‌های همدیس)

قضیه ۱ (نگاشت همدیس)

نگاشتی که با تابع تحلیلی $f(z)$ تعریف می شود ، جز درنقاط بحرانی ، یعنی در نقاطی که مشتق $f'(z)$ صفراست ، همدیس است .

بررسی عملکرد چند نگاشت مقدماتی

۱) نگاشت کسری $w = \frac{1}{z}$ انعکاس

نگاشت مذکور در همه‌جا به غیر از در $z = 0$ تحلیلی بوده و مشتق آن یعنی $-\frac{1}{z^2}$ همواره مخالف صفر است. لذا این نگاشت همه‌جا به غیر از در مبدأ مختصات همدیس می‌باشد. می‌توان این طور تصور کرد که نقاط ∞ و 0 با نگاشت $w = \frac{1}{z}$ به نقاط 0 و ∞ تبدیل می‌شوند.

توجه ۱ :

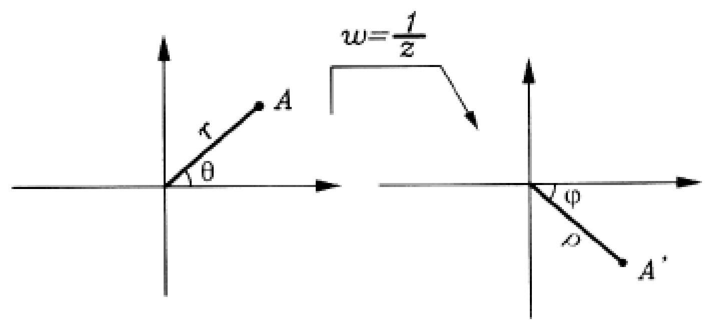
اگر فرض کنیم $w=\rho e^{i\varphi}$ و $z=re^{i\theta}$ ، تحت این نگاشت داریم:

$$w=\frac{1}{z} \quad\rightarrow\quad \rho e^{i\varphi}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\rho=\dfrac{1}{r}\\ \varphi=-\theta\end{cases}$$

یعنی نگاشت $w=\dfrac{1}{z}$ دو عمل متوالی زیر را انجام می‌دهد:

ـ فاصله هر نقطه تا مبداء مختصات را معکوس می‌کند.

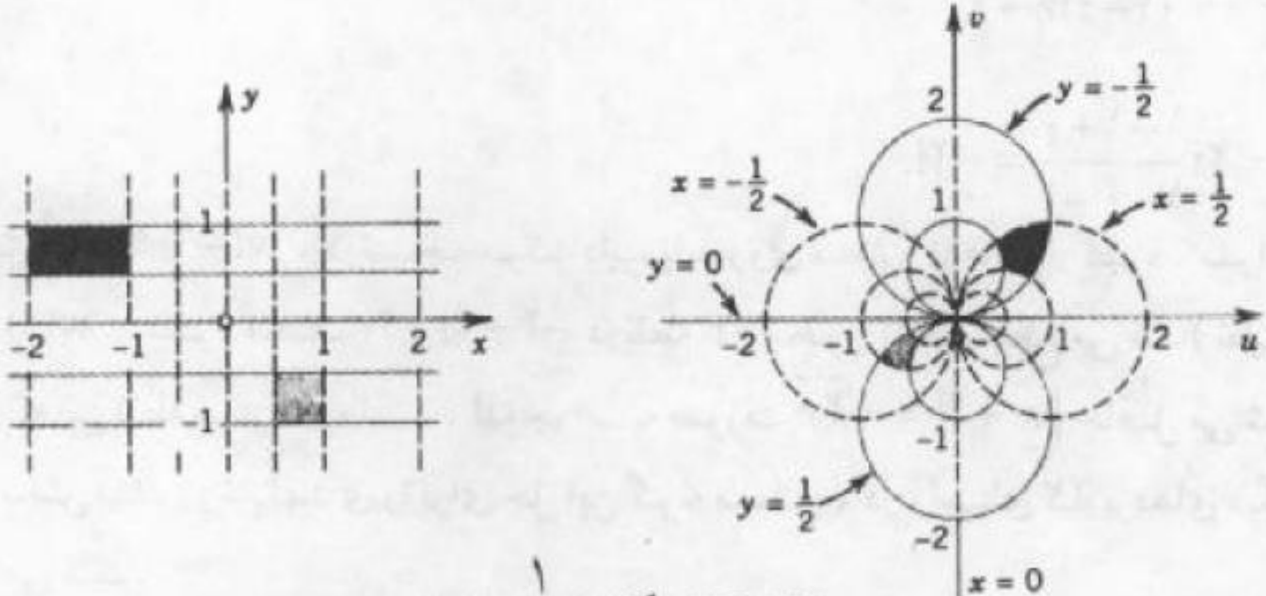
ـ زاویه شعاع حامل هر نقطه را منفی می‌کند.



$w=\dfrac{1}{z}$ هرخط راست یا دایره را بر روی یک دایره یا خط راست می نگارد.

قضیه ۱ (دوایر و خطوط راست)

هرتبدیل کسری خطی (۱) یک دایره یا یک خط راست واقع بر صفحهٔ Z را بر روی یک دایره یا یک خط راست واقع در صفحه W می نگارد.



شکل ۳۵۶ . نگاشت $W = \frac{1}{Z}$

توجه ۲ :

اگر فرض کنیم $w = u + iv$ و $z = x + iy$ تحت این نگاشت داریم:

$$w = \frac{1}{z} \rightarrow z = \frac{1}{w} \rightarrow x + iy = \frac{1}{u+iv} \rightarrow x + iy = \frac{1}{u+iv}\,\frac{u-iv}{u-iv} = \frac{u-iv}{u^2+v^2} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

از اینجا می‌توان نشان داد شکلی با معادله $A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0$ که مبین خط و یا دایره‌ای در صفحه z می‌باشد به شکلی با معادله $D\left(u^2+v^2\right)+Bu-Cv+A=0$ که مبین خط و یا دایره‌ای در صفحه w می‌باشد، تبدیل می‌شود.

مثال : ناحیه $\operatorname{Im}(z)\le 1$ از صفحهٔ z تحت نگاشت وارونی $\left(w=\frac{1}{z}\right)$ در صفحه w به چه ناحیه‌ای تبدیل می‌شود؟

۱) $\left|w-\frac{1}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$ ۲) $\left|w-\frac{i}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$ ۳) $\left|w+\frac{1}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$ ۴) $\left|w+\frac{i}{2}\right|\ge\frac{1}{2}$

حل :

$$w=\frac{1}{z} \rightarrow z=\frac{1}{w} \rightarrow z=\frac{1}{u+iv}\,\frac{u-iv}{u-iv} \rightarrow z=\frac{u-iv}{u^2+v^2}$$

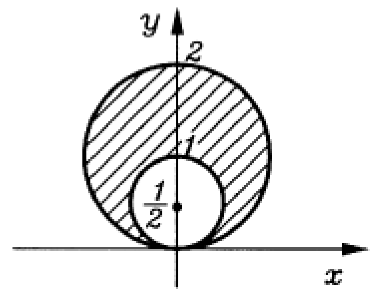
پس ناحیه $\operatorname{Im}(z)\le 1$ تبدیل می‌شود به:

$$\frac{-v}{u^2+v^2}\le 1 \rightarrow u^2+v^2\ge -V \rightarrow u^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2\ge\frac{1}{4}$$

که مرز و بیرون دایره‌ای به مرکز $\left(0,\frac{-1}{2}\right)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است و آن را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$\left|w+\frac{i}{2}\right|\geq\frac{1}{2}$$

مثال : تبدیل یافته ناحیه نشان داده شده در شکل زیر را با نگاشت $w=\frac{1}{z}$ پیدا کنید.



حل :

$$A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0\xrightarrow{w=\frac{1}{z}}D\left(u^2+v^2\right)+Bu-Cv+A=0$$

تبدیل یافته مرزها را پیدا می‌کنیم.

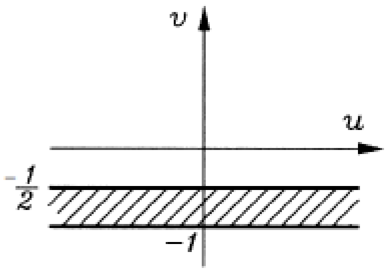
دایره کوچک: $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\rightarrow x^2+y^2-y=0$

با نگاشت $w=\frac{1}{z}$ تبدیل می‌شود به:

$$0\left(u^2+v^2\right)+0u-(-1)v+1=0\rightarrow v=-1$$

دایره بزرگ : $x^2+(y-1)^2=(1)^2 \quad\rightarrow\quad x^2+y^2-2y=0 \quad\rightarrow\quad 2v+1=0 \quad\rightarrow\quad v=-\frac{1}{2}$

یک نقطه دلخواه از ناحیه اصلی در نظر می‌گیریم (مثلاً $z=\frac{3}{2}i$)، تبدیل یافته آن چنین می‌شود:



$$w=\frac{1}{\frac{3}{2}i}=-\frac{2}{3}i$$

که در ناحیه $-1\le v\le\frac{-1}{2}$ قرار می‌گیرد.

نقاط ثابت

نقاط ثابت نگاشتی مانند $w = f(z)$ نقاطی هستند که این نگاشت آنها را بر روی خودشان می نگارند، به عبارت دیگر تحت این نگاشت «ثابت نگهداشته می شوند». نقاط ثابت از رابطهٔ

$$w = f(z) = z$$

به دست می آیند. برای **نگاشت همانی**

$$w = z$$

هرنقطه یک نقطه ثابت است. نگاشت $w = \bar{z}$ دارای تعدادی نامتناهی نقـاط ثابت $w = \frac{1}{z}$ ، دارای دونقطه ثابت، یک دوران دارای یک نقـطه ثابت و یک انتقـال هیچ نقطهٔ ثابتی در صـفحه متناهی ندارد. (درهر حالت آنها را بیابید.) با توجه به (۱) نقطه ثابت مقید به $w = z$ عبارت است از

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

یا

$$cz^{2} - (a - d)z - b = 0. \qquad (6)$$

این یک معادله درجهٔ دو برحسب z است که ضرایب آن فقط و فقط وقتی صفر هستند که نگاشت همانی $w = z$ باشد(دراین حالت، $a = d \neq 0$ ، $b = c = 0$). ازاین رو داریم:

قضیه ۲ (نقاط ثابت)

هر تبـدیل کسری خطی، غیـرهمـانی، حداکثر دونقطه ثابت دارد. اگـر تبـدیل کسـری خطی دارای سه یا تعداد بیشتری نقاط ثابت باشد، آنگاه این تبدیل یک نگاشت همانی است.

۲) نگاشت خطی $w = az + b$ (a , b اعداد مختلط دلخواه و $a \neq 0$)

نگاشت مذکور همه‌جا تحلیلی بوده و مشتق آن یعنی a همواره مخالف صفر است، لذا این نگاشت در همه‌جا همدیس می‌باشد.

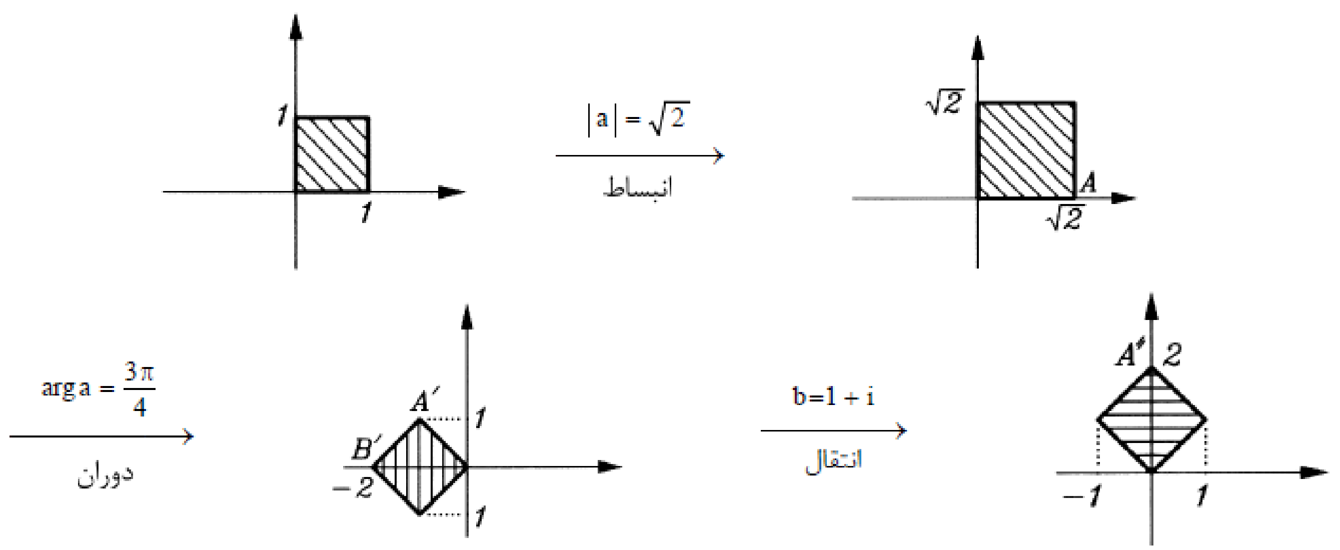
می‌توان نشان داد این نگاشت سه عمل متوالی زیر را انجام می‌دهد:

- فاصه هر نقطه را تا مبدأ، $|a|$ برابر می‌کند (انبساط یا انقباضی به اندازه $|a|$ ایجاد می‌شود).
- زاویه شعاع حامل هر نقطه را با $\operatorname{Arg} a$ جمع می‌کند (دورانی به اندازه $\operatorname{Arg} a$ حول مبدأ ایجاد می‌شود).
- طول و عرض هر نقطه را با $\operatorname{Re} b$ و $\operatorname{Im} b$ جمع می‌کند (انتقالی به اندازه b ایجاد می‌شود).

مثال : تبدیل یافته ناحیه $D = \left\{ z \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \le \operatorname{Re}\{z\} \le 1 \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1 \end{matrix} \right\}$ را با نگاشت $w = (-1+i)z + 1 + i$ به‌دست آورید.

حل : با در نظر گرفتن $a = -1+i$ و $b = 1+i$ یک نگاشت خطی داریم که سه عمل زیر را انجام می‌دهد:

$$a = -1+i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} |a| = \sqrt{2} \\ \arg a = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$



نگاشت انبساط یا انقباض همراه با دوران w=az

اگرفرض شود $a=r_\cdot e^{i\theta_\cdot}$ ، $z=re^{i\theta}$ و $w=\rho e^{i\varphi}$ به دست می آید:

$$W=az \rightarrow \rho e^{i\varphi} = re^{i\theta} r, rr_\cdot e^{i\theta_\cdot} \rightarrow \rho e^{i\varphi} = rr_\cdot, e^{i(\theta+\theta_o)} \Rightarrow \begin{cases} \rho = rr_\cdot \\ \varphi = \theta + \theta_\cdot \end{cases}$$

یعنی این نگاشت دو عمل متوالی زیر را انجام می دهد:

الف)فاصله هر نقطه از شکل تا مبدا،را $|a|$ برابرمی کند لذا:

چنانچه $|a| < ۱$ باشد فاصله ها کم و انقباض داریم.

چنانچه $|a| > ۱$ باشد فاصله ها کم و انبساط داریم.

چنانچه $|a| = ۱$ باشد فاصله ها تغییرنمی کند.

۳) نگاشت توانی $w = z^n$ (n عدد طبیعی مخالف یک)

نگاشت مذکور همه‌جا تحلیلی بوده و مشتق آن یعنی nz^{n-1} در همه‌جا به غیر از در $z = 0$ مخالف صفر است، لذا این نگاشت همه‌جا به غیر از در مبدأ مختصات همدیس می‌باشد.

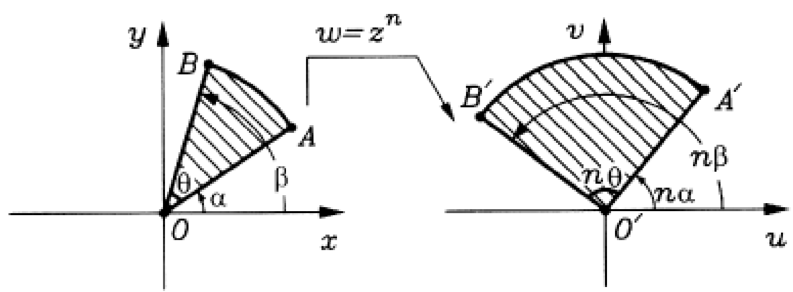
توجه ۱ : اگر فرض کنیم $w = \rho\, e^{i\varphi}$ و $z = re^{i\theta}$ می‌توان نوشت:

$$w = z^n \quad \to \quad \rho e^{i\varphi} = \left(r\, e^{i\theta} \right)^n = r^n\, e^{in\theta} \quad \to \quad \begin{cases} \rho = r^n \\ \varphi = n\theta \end{cases}$$

یعنی نگاشت $w = z^n$ دو عمل متوالی زیر را انجام می‌دهد:

- فاصله هر نقطه تا مبدأ مختصات را به توان n می‌رساند.
- زاویه شعاع حامل هر نقطه را n برابر می‌کند.

توجه ۲ :به شکل زیر دقت کنید:



یعنی تحت نگاشت $w = z^n$ زاویه‌ای که رأس آن در مبدأ مختصات می‌باشد، با حفظ جهت، اندازه‌اش n برابر می‌شود.

۴) نگاشت ریشهٔ nام $w = \sqrt[n]{z}$ (n عدد طبیعی مخالف یک)

همانطوری‌که می‌دانیم چنانچه $-\pi < \theta \leq \pi \;\; ; \;\; z = re^{i\theta}$ باشد، داریم:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad ; \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

یعنی برای ریشه nام یک عدد مختلط، n جواب متمایز به‌دست می‌آید. اگر بخواهیم به $w = \sqrt[n]{z}$ به عنوان یک نگاشت (تابع تک مقداره) نگاه کنیم، باید رابطه گفته شده را به ازاء یک k خاص که معمولاً $k = 0$ انتخاب می‌شود، مدنظر قراردهیم و بدین‌ترتیب داریم:

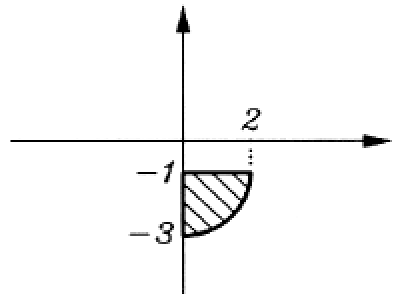
$$w = \sqrt[n]{z} \;\rightarrow\; \rho\, e^{i\varphi} = \sqrt[n]{r\, e^{i\theta}} = r^{\frac{1}{n}}\, e^{i\frac{\theta}{n}} \;\rightarrow\; \begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ \varphi = \dfrac{\theta}{n} \end{cases}$$

یعنی تحت نگاشت $w = \sqrt[n]{z}$ دو عمل متوالی زیر انجام می‌شود:

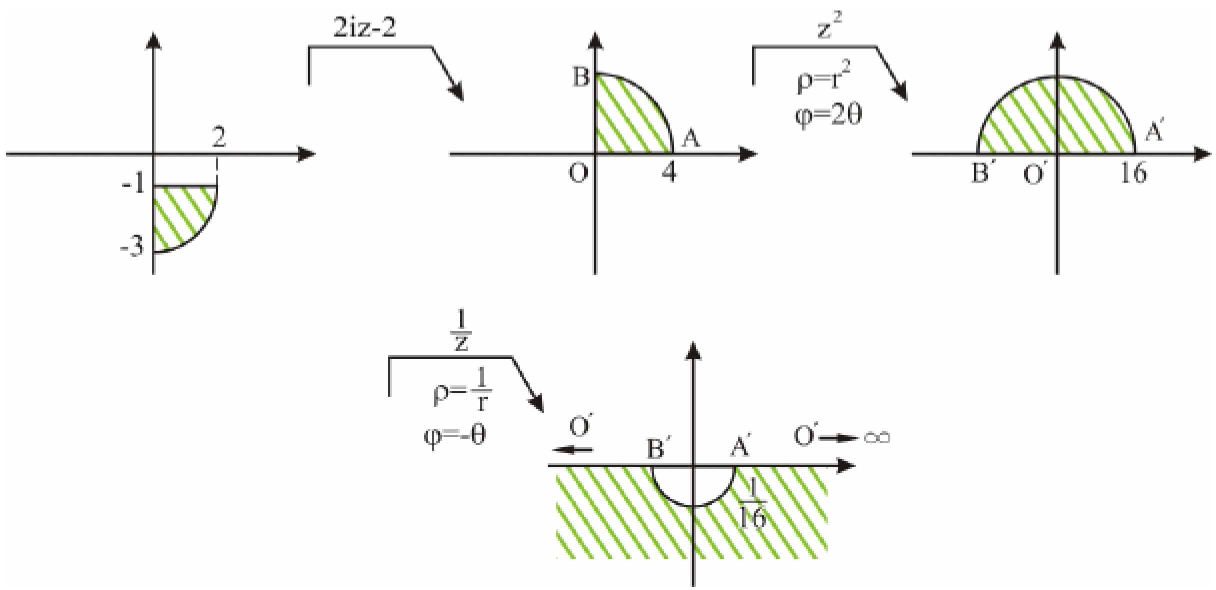
- فاصله هر نقطه تا مبدأ مختصات به توان $\frac{1}{n}$ می‌رسد.
- زاویه شعاع حامل هر نقطه $\frac{1}{n}$ برابر می‌شود.

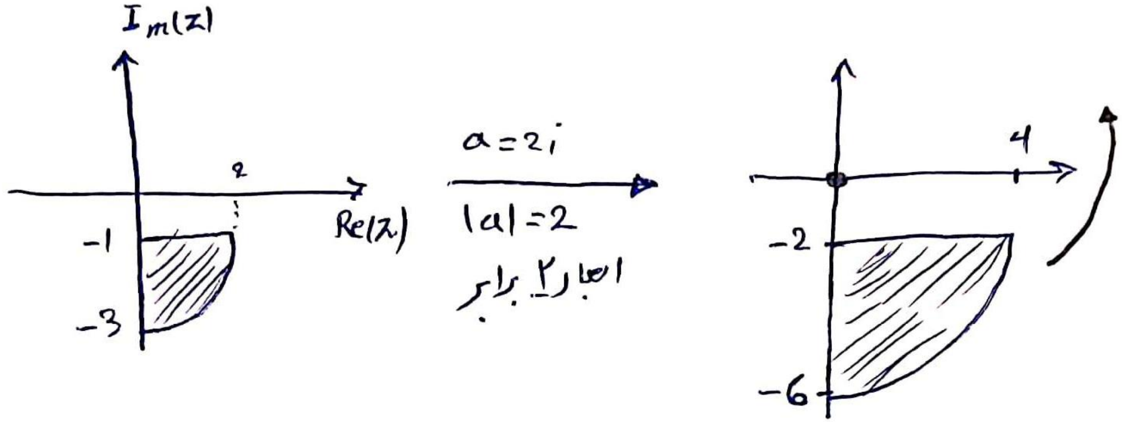
و به تعبیری نگاشت $w = \sqrt[n]{z}$ دقیقاً عملکردی شبیه نگاشت توانی دارد، البته با توان $\frac{1}{n}$.

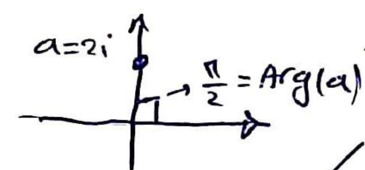
مثال : تبدیل یافته ناحیه زیر را تحت نگاشت $w = \dfrac{1}{(2iz-2)^2}$ پیدا کنید.



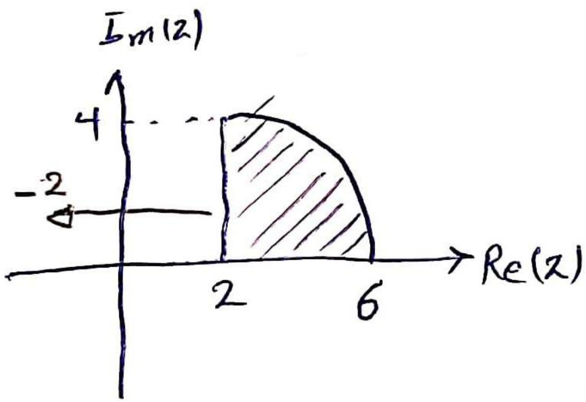
حل : w را می‌توان با ترکیب از انتهای نگاشت‌های $\dfrac{1}{z}$, z^2 , $(2iz-2)$ یافت. حال با دیدن اعمال نگاشتهای فوق از ابتدا داریم:



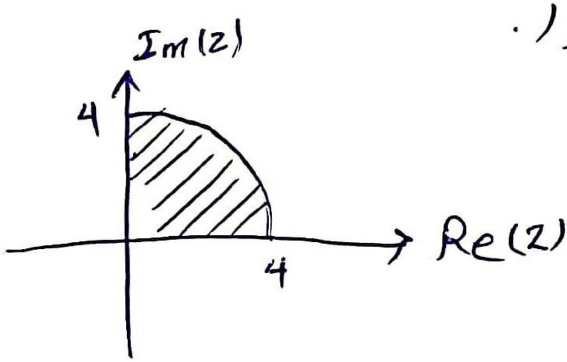




a=2i ترسیم شود



سپس حول مبدا، شکل $\frac{\pi}{2}$ می‌چرخد و حاصل می‌شود:



نهایتاً شکل حاصل به قسمت حقیقی و موهومی b جمع می‌شود.

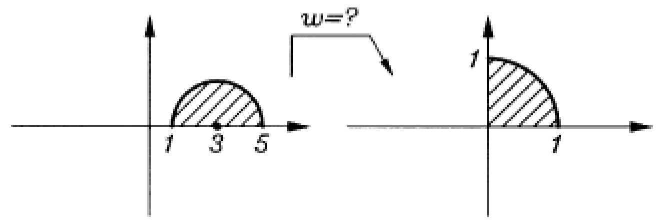
b تنها بخش حقیقی -2 را دارا است.

مثال: مساله قبل را با W های داده شده ی روبرو حل کنید.

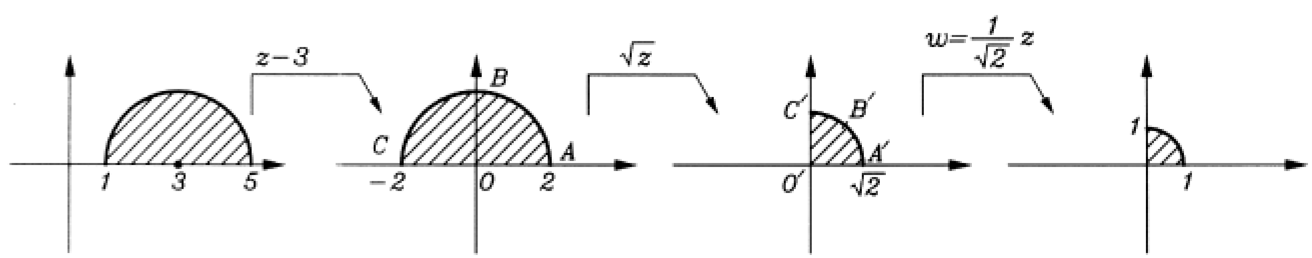
$$(a)\quad W=\frac{1}{(3z-i)^2}$$

$$(b)\quad W=\frac{1}{(2z+2i)^2}$$

مثال : نگاشتی پیدا کنید که عمل زیر را انجام دهد:



حل : زاویه مرکزی از 180° به 90° رسیده است، یعنی نصف شده است.لذا با توجه به عملکرد نگاشت $w=\sqrt{z}$ داریم:



پس نگاشت مورد نظر ما چنین است:

$$w=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{z-3}$$

تکلیف ۳ ریاضی مهندسی

۱- عبارت $\frac{2+i}{5-3i}$ را به فرم قطبی بنویسید.

۲- معادله ی $z^2-(5+i)z+8+i=0$ را حل نموده و ریشه هایش را چک کنید.

۳- معادله ی $z^4-(3+6i)z^2-8+6i=0$ را حل نموده و ریشه هایش را چک کنید.

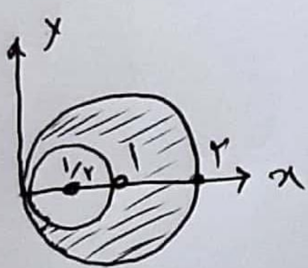
۴- تحلیلی بودن یا نبودن $f(z)=z^6$ را مشخص نمایید. (از روابط قطبی کوشی-ریمان استفاده کنید)

۵- تحلیلی بودن یا نبودن $f(z)=z+\frac{1}{z}$ را مشخص نمایید.

۶- تحلیلی بودن یا نبودن تابع $f(z)=\frac{1}{1-z^4}$ را مشخص کنید. از $z=re^{i\theta}$ و روابط قطبی کوشی-ریمان بهره ببرید.

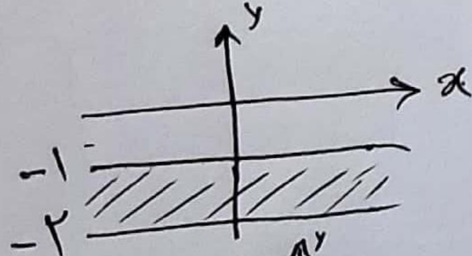
۷- همساز بودن تابع $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ را بررسی نموده و مزدوج تابع تحلیلی متناظر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را از روی آن بدست آورید.

۸- آ، ب، پ، ج $V=(x^2+y^2)^2$ همساز است.

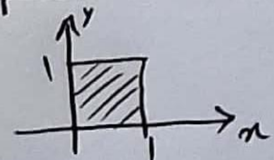


۹- تبدیل یافته‌ی ناحیه‌ی شکل روبرو را تحت نگاشت $\frac{1}{Z}$ بیابید:

۱۰- تبدیل یافته‌ی ناحیه‌ی شکل روبرو را تحت نگاشت $\frac{1}{Z}$ بدست آورید.

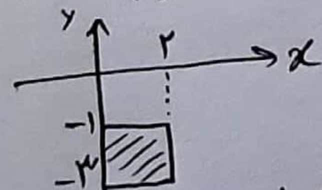


۱۱- تبدیل یافته‌ی شکل را با نگاشت $w=(1+i)Z-2-i$ بدست آورید.



۱۲- تبدیل یافته‌ی شکل مثال قبل را با نگاشت $w=(-2-2i)Z+i$ را بدست آورید.

۱۳- تبدیل یافته‌ی ناحیه زیر را با نگاشت $w=\frac{1}{(1+i)Z+1+i}$ بدست آورید.



۱۴- تبدیل یافته‌ی ناحیه‌ی شکل ۱۳ را با نگاشت $w=\frac{1}{(2Z-1-i)}$ را بدست آورید.

Complex Integration

فصل ۱۳ انتگرالگیری مختلط

انتگرالگیری در صفحهٔ مختلط به دو دلیل با اهمیت است:

۱. در کاربردها با انتگرالهای حقیقی ای مواجه هستیم که محاسبه آنها به روشهای معمولی درحساب انتگرال حقیقی ممکن نیست ولی چنین انتگرالهایی را با انتگرالگیری مختلط می توان محاسبه نمود.

۲. برخی از خواص اساسی توابع تحلیلی که اثبات شان به روشهای دیگر خالی از اشکال نیست می توان با انتگرالگیری اثبات نمود. وجود مشتقات مراتب بالاتر توابع تحلیلی یکی ازاین خواص می باشد.[۱]

تعریف انتگرال روی خط مختلط

منحنی هموار C ، مفروض درشکل (۱) را درصفحهٔ مختلط وتابع پیوسته f با ضابطه f(z) که (دست کم) درتمام نقاط C تعریف شده باشد را درنظر می گیریم.

انتگرال روی خط (یا به طور ساده انتگرال) f(z) در طول منحنی جهتدار C (که **مسیر انتگرالگیری** نامیده می‌شود) می نامند و با نماد

$$\int_C f(z)dz \qquad (۳)$$

نمایش می دهند. اگر C یک مسیر بسته باشد(که نقطه انتهایی Z برنقطه ابتدایی z_0 منطبق شده باشد، مانند یک دایره یا یک منحنی به شکل 8 . ما در بحث خود از نماد استاندارد

$$\oint_C f(z)dz$$

نیز استفاده می کنیم.

سه خاصیت اساسی انتگرال روی خط مختلط

فهرست سه ویژگی انتگرال روی خط مختلط کاملاً با ویژگیهای انتگرالهای معین حقیقی (وانتگرالها روی خط حقیقی) مشابه می باشند و بلافاصله ازتعریف نتیجه می شوند.

۱. انتگرالگیری یک **اپراتورخطی** است، یعنی از مجموع دویا چند تابع می توان جمله به جمله انتگرال گرفت، و ضرایب ثابت را می توان از زیر علامت انتگرال خارج نمود، در واقع

$$\int_C \left[k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)\right] dz = k_1 \int_C f_1(z)\, dz + k_2 \int_C f_2(z)\, dz \, . \qquad (۶)$$

۲. اگر C به دو قسمت C_1 و C_2 تجزیه شود(شکل ۳۱۰)، آنگاه داریم

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz \qquad (۷)$$

شکل ۳۱۰. تقسیم جزئی مسیر [فرمول (۱۷)]

۳. اگر جهت انتگرالگیری را عوض کنیم، مقدار انتگرال دریک منها ضرب می شود

$$\int_{z_0}^{Z} f(z) dz = - \int_{Z}^{z_0} f(z) dz; \qquad (۸)$$

دراینجا **مسیر** C با نقاط انتهایی z_0 و Z **همان مسیر قبلی** است، در طرف چپ از z_0 تا Z، و در طرف راست از Z تا z_0 انتگرالگیری می شود.

۱۳ . ۲ دو روش انتگرالگیری . مثالها

انتگرالگیری مختلط روشی نیرومند برای محاسبه انتگرالها می باشد. ابتدا به دو روش به انتگرالگیری مختلط پرداخته، و روشهای دیگر دراین فصل و فصل ۱۵ ارائه می شوند.

روش اول: استفاده ازنمایش مسیر

این روش برای هر تابع مختلط پیوسته قابل استفاده است.

قضیه ۱ (انتگرالگیری با استفاده از مسیر)

هر گاه C یک مسیر تکه ای هموار باشد، که با $z = z(t)$، که درآن $a \le t \le b$ نمایش داده شده باشد، همچنین $f(z)$ یک تابع پیوسته بر C باشد، آنگاه

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]\,\dot{z}(t)dt \; ; \; \dot{z} = \frac{dz}{dt} \qquad (۱)$$

گامها در به کارگیری قضیه ۱

(الف) ارائه مسیر C به صورت $z(t)$، که در آن $a \le t \le b$.

(ب) محاسبه مشتق $\dot{z}(t) = \dfrac{dz}{dt}$.

(ج) جایگزینی $z(t)$ به ازای هر z در $f(z)$ (یا $x(t)$ بجای x و $y(t)$ بجای y).

(د) از $f[z(t)]\,\dot{z}(t)$ برحسب t از a تا b انتگرال می گیریم.

مثال۱ . یک نتیجهٔ اساسی : انتگرال $\frac{1}{z}$ روی دایرهٔ واحد

نشان دهید که

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$ (۲) . (C دایره واحد، انتگرالگیری خلاف حرکت عقربه های ساعت)

نتایج حاصله نتیجه بسیار جالبی است و کاربردهای متعدد دارد .

حل. دایرهٔ واحد C (ر . ك. بحش ۱۲ . ۳) را می توان به صورت

$$z(t) = \cos t + i\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

نمایش داد. انتگرالگیری درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت با افزایش t از ۰ تا 2π متناظر می باشند. با مشتقگیری می یابیم

$$\dot{z}(t) = -\sin t + i\cos t .$$

از طرفی $f[z(t)] = \frac{1}{z(t)}$. با استفاده ازنتایج و جایگزینی کردن آنها درانتگرال می یابیم

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i\sin t}(-\sin t + i\cos t)dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

که همان نتیجه مورد نظر است .

با بکارگیری فرمول اویلر(بخش ۱۲ . ۶) می یابیم $z(t) = e^{it}$ وازآنجا

$dz = ie^{it}dt$ و $\frac{1}{z(t)} = e^{-it}$ و از آنجا

$$\oint \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i .$$

مثال۱ . یک نتیجهٔ اساسی : انتگرال $\frac{1}{z}$ روی دایرهٔ واحد

نشان دهید که

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \qquad \text{(۲)}$$

(C دایره واحد، انتگرالگیری خلاف حرکت عقربه های ساعت) . (۲)

نتایج حاصله نتیجه بسیار جالبی است و کاربردهای متعدد دارد.

حل. دایرهٔ واحد C (ر . ك . بخش ۱۲ . ۳) را می توان به صورت

$$z(t) = \cos t + i \sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

نمایش داد. انتگرالگیری درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت با افزایش t از ۰ تا 2π متناظر می باشند. با مشتقگیری می یابیم

$$\dot{z}(t) = -\sin t + i \cos t .$$

از طرفی $f[z(t)] = \frac{1}{z(t)}$. با استفاده ازنتایج و جایگزینی کردن آنها درانتگرال می یابیم

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t}(-\sin t + i \cos t)dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

که همان نتیجه مورد نظر است.

با بکارگیری فرمول اویلر(بخش ۱۲ . ۶) می یابیم $z(t) = e^{it}$ وازآنجا

$\frac{1}{z(t)} = e^{-it}$ و $dz = ie^{it}dt$ و از آنجا

$$\oint \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i .$$

EXAMPLE 1 Evaluating a Contour Integral

Evaluate $\int_C \bar{z}\,dz$, where C is given by $x = 3t$, $y = t^2$, $-1 \le t \le 4$.

SOLUTION We write $z(t) = 3t + it^2$ so that $z'(t) = 3 + 2it$ and $f(z(t)) = \overline{3t + it^2} = 3t - it^2$. Thus,

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_{-1}^{4} (3t - it^2)(3 + 2it)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{4} (2t^3 + 9t)\,dt + i\int_{-1}^{4} 3t^2\,dt = 195 + 65i.$$

≡

EXAMPLE 2 Evaluating a Contour Integral

Evaluate $\oint_C \frac{1}{z}\,dz$, where C is the circle $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

SOLUTION In this case $z(t) = \cos t + i\sin t = e^{it}$, $z'(t) = ie^{it}$, and $f(z) = 1/z = e^{-it}$. Hence,

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} (e^{-it})ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

≡

For some curves, the real variable x itself can be used as the parameter. For example, to evaluate $\int_C (8x^2 - iy)\,dz$ on $y = 5x$, $0 \le x \le 2$, we write $\int_C (8x^2 - iy)\,dz = \int_0^2 (8x^2 - 5ix)(1 + 5i)\,dx$ and integrate in the usual manner.

مثال: مطلوبست محاسبه ی انتگرال زیر در مسیرهای (a) خط راستی که از (0,1) به (1,2) می رود، (b) خطوط راستی که از (0,1) به (1,1) و آنگاه از (1,1) به (1,2) میروند و (c) در امتداد سهمی $x=t$, $y=t^2+1$

$$\int_{(0,1)}^{(1,2)} [(x^2-y)\,dx + (y^2+x)\,dy]$$

(*a*) An equation for the line joining (0, 1) and (1, 2) in the xy plane is $y = x+1$. Then $dy = dx$ and the line integral equals

$$\int_{x=0}^{1} [\{x^2-(x+1)\}\,dx + \{(x+1)^2+x\}\,dx] = \int_0^1 (2x^2+2x)\,dx = 5/3$$

(*b*) Along the straight line from (0, 1) to (1, 1), $y=1$, $dy=0$ and the line integral equals

$$\int_{x=0}^{1} [(x^2-1)\,dx + (1+x)(0)] = \int_0^1 (x^2-1)\,dx = -2/3$$

Along the straight line from (1, 1) to (1, 2), $x=1$, $dx=0$ and the line integral equals

$$\int_{y=1}^{2} [(1-y)(0) + (y^2+1)\,dy] = \int_1^2 (y^2+1)\,dy = 10/3$$

Then the required value $= -2/3 + 10/3 = 8/3$.

(*c*) Since $t=0$ at (0, 1) and $t=1$ at (1, 2), the line integral equals

$$\int_{t=0}^{1} [\{t^2-(t^2+1)\}\,dt + \{(t^2+1)^2+t\}\,2t\,dt] = \int_0^1 (2t^5+4t^3+2t^2+2t-1)\,dt = 2$$

روش دوم: انتگرالگیری نامعین

قضیه ۲(انتگرالگیری نامعین توابع تحلیلی)

هرگاه f(z) در دامنهٔ همبند ساده D[۲] تحلیلی باشد، آنگاه انتگرال نامعینی از f(z) در دامنهٔ D وجود دارد، یعنی ، تابعی تحلیلی ای مانند f(z) وجود دارد به طوری که در D ، $F'(z) = f(z)$ ، و برای هرمسیر در D که دو نقطه z_0 و z_1 از D به هم وصل می کند داریم

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0) \qquad [F'(z) = f(z)]. \qquad (۴)$$

(توجه کنید که به جای نوشتن منحنی C در زیر علامت انتگرال می توان از z_0 تا z_1 انتگرالگیری کرد زیرا مقدار انتگرال ازمسیر انتگرالگیری مستقل است .)

EXAMPLE 1 $\displaystyle\int_0^{1+i} z^2\,dz = \frac{1}{3}z^3\Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$

EXAMPLE 2 $\displaystyle\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z\,dz = \sin z\Big|_{-\pi i}^{\pi i} = 2\sin \pi i = 2i \sinh \pi = 23.097i$

EXAMPLE 3 $\displaystyle\int_{8+\pi i}^{8-3\pi i} e^{z/2}\,dz = 2e^{z/2}\Big|_{8+\pi i}^{8-3\pi i} = 2(e^{4-3\pi i/2} - e^{4+\pi i/2}) = 0$

since e^z is periodic with period $2\pi i$.

EXAMPLE 4 $\displaystyle\int_{-i}^{i} \frac{dz}{z} = \text{Ln}\, i - \text{Ln}\,(-i) = \frac{i\pi}{2} - \left(-\frac{i\pi}{2}\right) = i\pi$. Here D is the complex plane

GREEN'S THEOREM IN THE PLANE

16. Prove Green's theorem in the plane if C is a simple closed curve which has the property that any straight line parallel to the coordinate axes cuts C in at most two points.

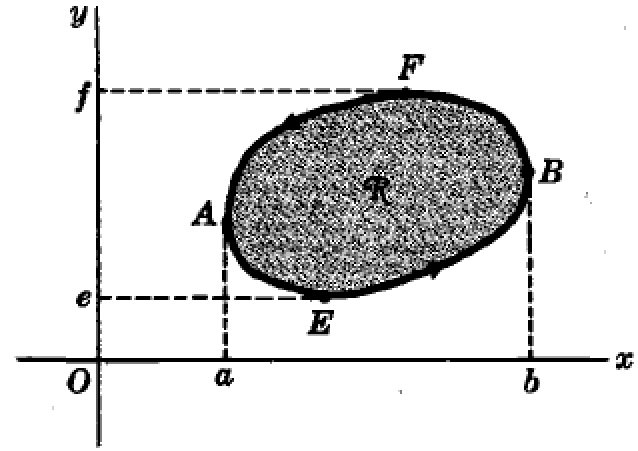


Fig. 5-8

Let the equations of the curves AEB and AFB (see adjoining Fig. 5-8) be $y = Y_1(x)$ and $y = Y_2(x)$ respectively. If $\mathcal{R}$ is the region bounded by C, we have

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right]dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} P(x,y)\Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)}\,dx = \int_a^b [P(x,Y_2) - P(x,Y_1)]\,dx$$

$$= -\int_a^b P(x,Y_1)\,dx - \int_b^a P(x,Y_2)\,dx = -\oint_C P\,dx$$

Then

$$(1) \qquad \oint_C P\,dx = -\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Similarly let the equations of curves EAF and EBF be $x = X_1(y)$ and $x = X_2(y)$ respectively. Then

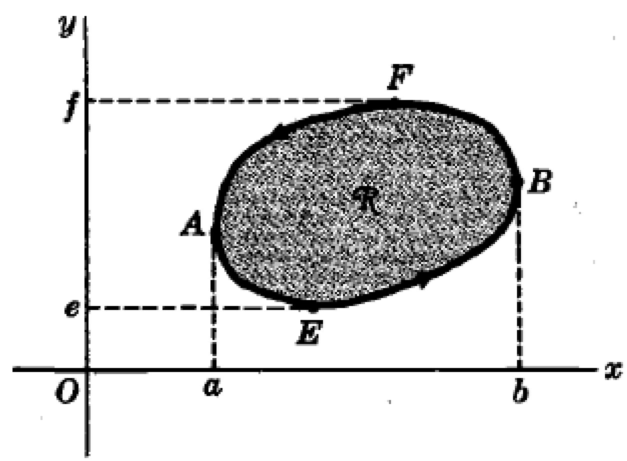
$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y=e}^{f}\left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\right]dy = \int_{e}^{f}[Q(X_2,y) - Q(X_1,y)]\,dy$$

$$= \int_{f}^{e} Q(X_1,y)\,dy + \int_{e}^{f} Q(X_2,y)\,dy = \oint_C Q\,dy$$

Then (2) $$\oint_C Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

Adding (1) and (2), $$\boxed{\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.}$$

Extensions to other simple closed curves are easily made.



17. Verify Green's theorem in the plane for

$$\oint_C (2xy - x^2)\,dx \;+\; (x + y^2)\,dy$$

where C is the closed curve of the region bounded by $y = x^2$ and $y^2 = x$.

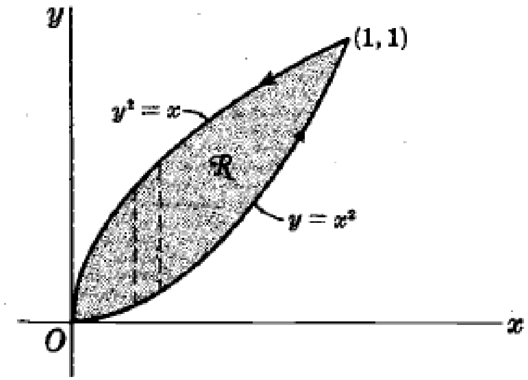


Fig. 5-9

The plane curves $y = x^2$ and $y^2 = x$ intersect at $(0,0)$ and $(1,1)$. The positive direction in traversing C is as shown in Fig. 5-9.

Along $y = x^2$, the line integral equals

$$\int_{x=0}^{1} \{(2x)(x^2) - x^2\}\,dx \;+\; \{x + (x^2)^2\}\,d(x^2) \;=\; \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5)\,dx \;=\; 7/6$$

Along $y^2 = x$ the line integral equals

$$\int_{y=1}^{0} \{2(y^2)(y) - (y^2)^2\}\,d(y^2) \;+\; \{y^2 + y^2\}\,dy \;=\; \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2)\,dy \;=\; -17/15$$

Then the required line integral $= 7/6 - 17/15 = 1/30$.

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \;=\; \iint_{\mathcal{R}} \left\{\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2)\right\} dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} (1 - 2x)\,dx\,dy \;=\; \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} (y - 2xy)\Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \int_0^1 (x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3)\,dx \;=\; 1/30$$

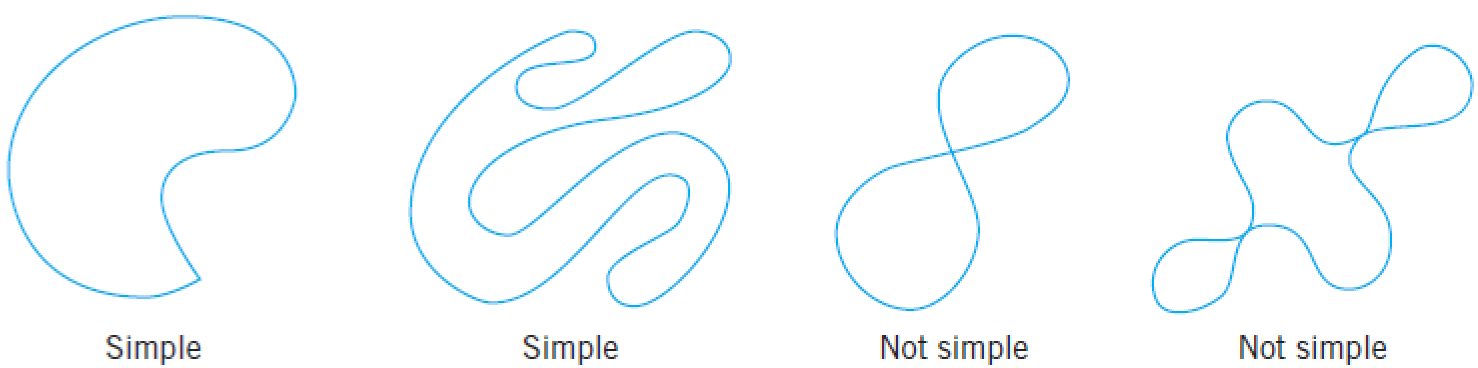
Hence Green's theorem is verified.

۱۳ . ۳ قضیهٔ انتگرال کوشی

انتگرال روی خط تابع f نه تنها به نقاط انتهایی بلکه معمولاً به انتخاب مسیر انتگرالگیری هم بستگی دارد(ر . ك . بخش ۱۳ . ۲) . ولی ما دراین بخش با ارائه قضیه بسیار جالبی (قضیه ۲) به بررسی انتگرالهایی می پردازیم که به مسیر انتگرالگیری بستگی ندارند . یکی از قضایای **مهم** این بخش قضیه انتگرال کوشی (قضیه ۱) است که بر طبق آن انتگرال برخی ازتوابع بر روی هرمسیر بسته ، صفر است .

برای بیان قضیه کوشی به دو مفهوم زیر نیاز داریم :

۱ . **مسیر بستهٔ ساده** ، مسیر بسته ای است (شکل ۱۳ . ۱) که خودش را قطع نکرده یا بر خودش مماس نباشد(شکل ۳۱۳) . برای مثال دایره یک منحنی ساده ومنحنی به شکل 8 یک منحنی غیر ساده می باشد .



شکل ۳۱۳ . مسیرهای بسته

۲. دامنه D واقع در صفحهٔ مختلط را **دامنه همبند ساده** نامند(بخش ۱۲ . ۳) اگر هر مسیر بسته ساده در D فقط شامل نقاط D باشد. دامنه ای که همبند ساده نباشد به یک ناحیه **همبند چندگانه** موسوم است. به عنوان مثال، داخل یک دایره («قرص مستدیر») ، بیضی ، یا مربع همبند ساده هستند. به طور کلی داخل یک منحنی بستهٔ ساده همبند ساده است. یک طوق (بخش ۱۲ . ۳) همبند چندگانه (به بیان دقیقتر، همبند دوگانه[۵])است. درشکل ۳۱۴ مثالهای بیشتری ارائه شده اند.

یادآوری می کنیم که بنا به تعریف، تابع یک رابطه **تک مقداری** است (ر.ك. بخش ۱۲ . ۴)، حال قضیه انتگرال کوشی را در ذیل ارائه می گردد. این قضیه را گاهی اوقات **قضیه کوشی- گورسا** نیز می نامند.

شکل ۳۱۴ . نواحی همبند ساده وهمبند چندگانه

قضیه ۱ . قضیه انتگرال کوشی

هرگاه $f(z)$ در دامنه کراندار همبند سادهٔ D تحلیلی باشد، آنگاه به ازای هرمسیر بستهٔ ساده C واقع در D (ر.ك. شکل ۳۱۵)،

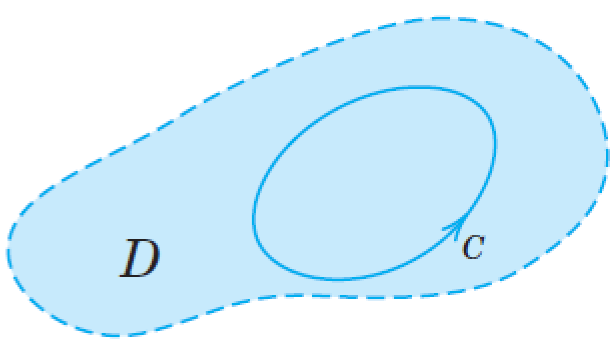
$$\oint_C f(z)\, dz = 0. \qquad (1)$$

قبل از اثبات قضیه، به ارائه چند مثال برای تفهیم بهتر مطلب می پردازیم. یک مسیر بسته ساده رابعضی اوقات کانتور وانتگرال روی چنین مسیری را **انتگرال کانتور** می نامند. بنابراین، در (۱) ومثالهای زیر مسیرهای آنها کانتور می باشند.

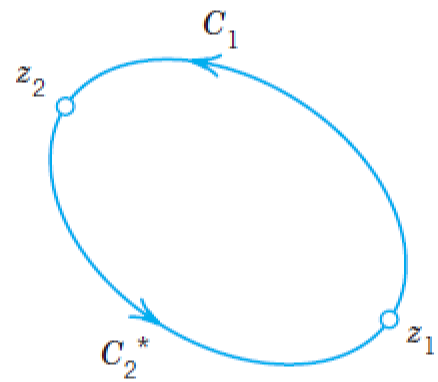
مثال۱ . برای هرمسیر بسته C داریم

$$\oint_C e^z\, dz = 0 \quad , \quad \oint_C \cos z\, dz = 0 \ , \ \oint_C z^n\, dz = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

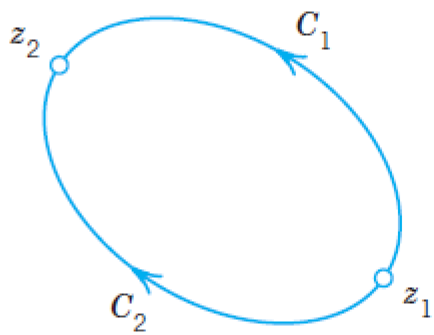
زیرا توابع انتگرالده انتگرالهای فوق به ازای هر z، تحلیلی می باشند.



شکل ۳۱۵ . **قضیه انتگرال کوشی**



شکل ۳۱۶. فرمول (۲)



شکل ۳۱۷. فرمول (´۲)

هر گاه جهت انتگرالگیری در طول z_1 تا z_2 را عوض کنیم، آنگاه مقدار انتگرال در ۱- ضرب می شود که بنابراین انتگرال $f(z)$ بر C_1 و بر C_2 باهم برابرند، یعنی (شکل ۳۱۹)

$$\oint_{C_1} f\,dz = \oint_{C_2} f\,dz . \qquad (۲)$$

19. (*a*) Prove Cauchy's theorem: If $f(z)$ is analytic inside and on a simple closed curve C, then $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

(*b*) Under these conditions prove that $\int_{P_1}^{P_2} f(z)\,dz$ is independent of the path joining P_1 and P_2.

(*a*)
$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (u+iv)(dx+i\,dy) = \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C v\,dx + u\,dy$$

By Green's theorem,

$$\oint_C u\,dx - v\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy, \qquad \oint_C v\,dx + u\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

where $\mathcal{R}$ is the region bounded by C.

$$\boxed{\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.}$$

GREEN'S THEOREM

Since $f(z)$ is analytic, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ (Problem 12), and so the above integrals are zero. Then $\oint_C f(z)\,dz = 0$. We are assuming in this derivation that $f'(z)$ [and thus the partial derivatives] are continuous. This restriction can be removed.

(b) Consider any two paths joining points P_1 and P_2 (see Fig. 5-10). By Cauchy's theorem,

$$\int_{P_1AP_2BP_1} f(z)\,dz = 0$$

Then
$$\int_{P_1AP_2} f(z)\,dz + \int_{P_2BP_1} f(z)\,dz = 0$$

or
$$\int_{P_1AP_2} f(z)\,dz = -\int_{P_2BP_1} f(z)\,dz = \int_{P_1BP_2} f(z)\,dz$$

i.e. the integral along P_1AP_2 (path 1) = integral along P_1BP_2 (path 2), and so the integral is independent of the path joining P_1 and P_2.

This explains the results of Problem 18, since $f(z) = z^2$ is analytic.

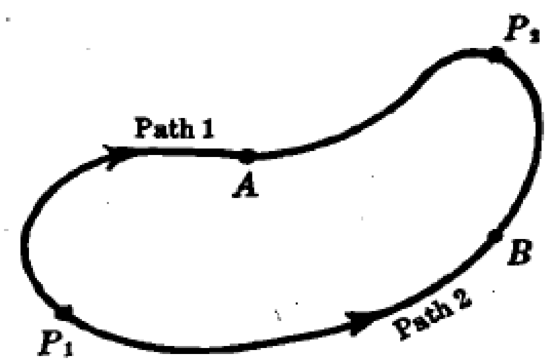


Fig. 5-10

20. If $f(z)$ is analytic within and on the boundary of a region bounded by two closed curves C_1 and C_2 (see Fig. 5-11), prove that

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

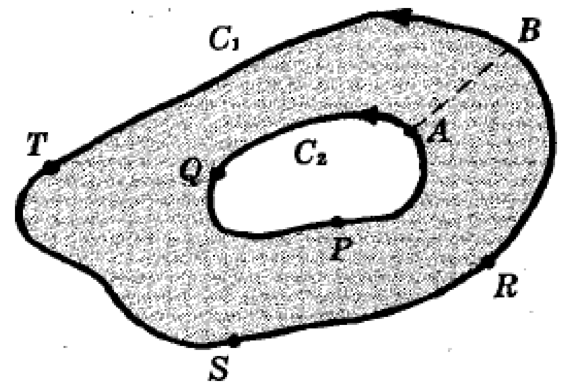


Fig. 5-11

As in Fig. 5-11, construct line AB (called a *cross-cut*) connecting any point on C_2 and a point on C_1. By Cauchy's theorem (Problem 19),

$$\int_{AQPABRSTBA} f(z)\,dz = 0$$

since $f(z)$ is analytic within the region shaded and also on the boundary. Then

$$\int_{AQPA} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{BRSTB} f(z)\,dz + \int_{BA} f(z)\,dz = 0 \qquad (1)$$

But $\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_{BA} f(z)\,dz$. Hence (*1*) gives

$$\int_{AQPA} f(z)\,dz = -\int_{BRSTB} f(z)\,dz = \int_{BTSRB} f(z)\,dz$$

i.e.

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

Note that $f(z)$ need not be analytic *within* curve C_2.

۱۳ . ۵ فرمول انتگرال کوشی

مهمترین نتیجهٔ قضیه انتگرال کوشی فرمول انتگرال کوشی است . این فرمول برای محاسبه انتگرالها (مثالهای ذیل) مفید است . نکتهٔ حائز اهمیت آن است که از فرمول انتگرال کوشی یکی از جالبترین نتایج در توابع تحلیلی حاصل می شود. بر طبق این قضیه می توان نشان داد که یک تابع تحلیلی ازهر مرتبه دارای مشتق است (۱۳ . ۶) . این نتیجه در اثبات نمایش به صورت سری تیلور (بخش ۱۴ . ۴) و سایر موارد مفید است . فرمول انتگرال کوشی و اثبات آن به شرح زیر ارائه می گردد .

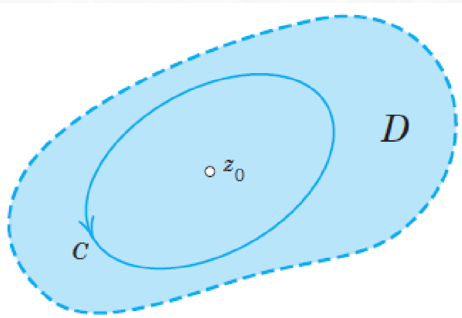
قضیه ۱ (فرمول انتگرال کوشی)

فرض کنید $f(z)$ دردامنهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد . آنگاه به ازای هرنقطه z_0 و هر مسیر بستهٔ ساده C واقع در D که z_0 را شامل باشد (شکل ۳۲۷)،

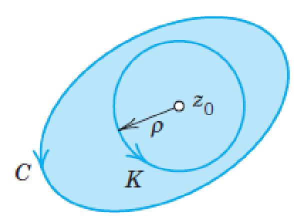
$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0) \qquad (1)$$

(۱) ، (فرمول انتگرال کوشی)

که در آن انتگرالگیری در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت انجام می گیرد .



شکل ۳۲۷ . فرمل انتگرال کو شی



شکل ۳۲۸ . اثبات فرمول انتگرال کوشی

21. (*a*) Prove that $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{if } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$ where C is a simple closed curve bounding a region having $z = a$ as interior point.

(*b*) What is the value of the integral if $n = 0, -1, -2, -3, \ldots$?

(*a*) Let C_1 be a circle of radius ϵ having center at $z = a$ (see Fig. 5-12). Since $(z-a)^{-n}$ is analytic within and on the boundary of the region bounded by C and C_1, we have by Problem 20,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n}$$

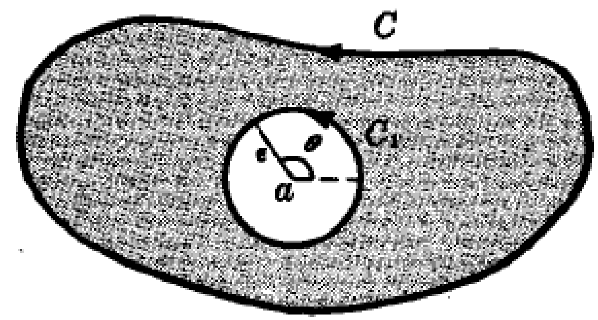


Fig. 5-12

To evaluate this last integral, note that on C_1, $|z-a| = \epsilon$ or $z - a = \epsilon e^{i\theta}$ and $dz = i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta$. The integral equals

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta}{\epsilon^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\epsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta}\,d\theta = \frac{i}{\epsilon^{n-1}} \frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i}\bigg|_0^{2\pi} = 0 \qquad \text{if } n \neq 1$$

If $n = 1$, the integral equals $\displaystyle i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$

(*b*) For $n = 0, -1, -2, \ldots$, the integrand is $1, (z-a), (z-a)^2, \ldots$ and is analytic everywhere inside C_1, including $z = a$. Hence by Cauchy's theorem the integral is zero.

۱۳ . ۶ مشتقات توابع تحلیلی

دراین بخش با استفاده از فرمول انتگرال کوشی، می خواهیم نشان دهیم که یک تابع تحلیلی از هرمرتبه دارای مشتق است.

قضیه ۱ (مشتقات یک تابع تحلیلی)

اگر $f(z)$ دردامنهٔ D تحلیلی باشد، آنگاه f در D ازهر مرتبه ای دارای مشتق است. همه این مشتقات نیز در D تحلیلی می باشند. مشتقات تابع $f(z)$ درنقطه ای مانند z_0 از D برابر است با

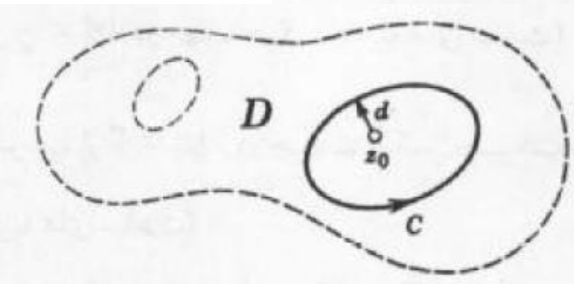
$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz, \qquad (1')$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\, dz, \qquad (1'')$$

و درحالت کلی

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \qquad (n = 1, 2, \cdots); \qquad (1)$$

که در آن $n = 1,2,\ldots$ ، C مسیر بستهٔ سادهٔ دلخواهی واقع در D است که z_0 را در بر می گیرد و منحنی C درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت پیموده می شود(شکل ۳۳۱).



شکل ۳۳۱. قضیه ۱ و اثبات آن

فصل ۱۴

سریهای توانی، سریهای تیلور، سریهای لوران

دنباله ها :

اگر به هر عدد طبیعی n عددی مانند z_n نسبت داده شود آنگاه اعداد ... ... و z_2 و z_1 تشکیل یک دنباله را خواهند داد که آنرا بصورت $\{z_n\}$ نمایش می دهیم.

دنباله $\{z_n\}$ را همگرا گوییم هر گاه $\lim_{n\to\infty} z_n = k < \infty$

دنباله $\{z_n\}$ را کراندار گوییم هر گاه عدد مثبت M ای موجود باشد به قسمی که :

$$\forall\, n \in N \Rightarrow |z_n| \le M$$

مثال ۱ . دنباله های همگرا و واگرا

دنباله $\left\{\frac{i^n}{n}\right\} = \left\{i, -\frac{۱}{۲}, \frac{-i}{۳}, \frac{۱}{۴}, \dots\right\}$ همگرا به سمت صفر است . دنباله های $\{i^n\} = \{i, -۱, -i, ۱, \dots\}$ و $\{z_n\}$ با جملهٔ عمومی $z_n = (۱+i)^n$ واگرا هستند .

Example 5.1.1 THE GEOMETRIC SERIES

The geometrical sequence, starting with a and with a ratio r $(= a_{n+1}/a_n$ independent of $n)$, is given by

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots .$$

The nth partial sum is given by[1]

$$s_n = a\frac{1-r^n}{1-r}. \tag{5.3}$$

Taking the limit as $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}, \quad \text{for } |r| < 1. \tag{5.4}$$

Hence, by definition, the infinite geometric series converges for $|r| < 1$ and is given by

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.} \tag{5.5}$$

On the other hand, if $|r| \geq 1$, the necessary condition $u_n \to 0$ is not satisfied and the infinite series diverges. ■

سری هندسی

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + \dots$$

به ازای $|q| < 1$ همگرا به مجموع $\frac{1}{1-q}$ و به ازای $|q| \geq 1$ واگرا می باشد.

قضیه ۱ (دنباله قسمتهای حقیقی وموهومی)

دنبالهٔ $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ ازاعداد مختلط $z_n = x_n + iy_n$ (که در آن $n = 1, 2, \ldots$) به $c = a + ib$ همگرا است اگر و فقط اگر دنبالهٔ قسمتهای حقیقی $x_1, x_2, \ldots$ به a و دنبالهٔ قسمتهای موهومی $y_1, y_2, \ldots$ به b همگرا باشد.

سریها

به ازای یک دنباله مفروض $z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots$ دنباله ای به صورت یک مجموع به شکل زیرتعریف می کنیم

$$S_n = z_1$$

$$S_2 = z_2 + z_2$$

$$\tag{2}$$

$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$$

این دنباله به دنبالهٔ **حاصلجمع های جزئی سری نامتناهی یا سری**

$$\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \ldots \tag{3}$$

سری همگرا سری ای است که دنبالهٔ حاصل ازحاصلجمع های جزئی آن همگرا باشد، یعنی

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

عدد S را**مجموع یا مقدار** سری می نامند و به صورت زیر می نویسند

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \dots .$$

سری واگرا سری ای است که همگرا نباشد.

اگر جملات S_n را از (۳) حذف کنیم، عبارت باقیمانده به صورت زیر است

$$R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + z_{m+3} + \dots . \quad (۴)$$

این عبارت را **باقیمانده سری (۳) بعداز جملهٔ** z_n می نامند. به وضوح، اگر سری (۳) همگرا و دارای مجموع S می باشد، آنگاه

$S = S_n + R_n$ درنتیجه $R_n = S - S_n$.

قضیه ۲ (قسمتهای حقیقی وموهومی)

سری (۳) با $z_m = x_m + iy_m$ همگرا به $S = u + iv$ است اگر و فقط اگر $x_1 + x_2 + \dots$ به مقدار u و $y_1 + y_2 + \dots$ به مقدار v همگرا باشند.

آزمونهایی برای همگرایی و واگرایی سریها

قضیه ۳ (واگرایی)

هرگاه سری $z_1 + z_2 + \dots$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{m \to \infty} z_m = 0$. ازاین رو هرسری کـه در آن این رابطه برقرار نباشد، واگرا است

قضیه ۵ (آزمون مقایسه)

اگر به ازای سری مفروض $z_1 + z_2 + \dots$ بتوان سری همگرای $b_1 + b_2 + \dots$ که جملات آن اعداد حقیقی نامنفی هستند طوری یافت که به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ داشته باشیم

$$|z_n| \le b_n$$

آنگاه سری مفروض مطلقاً همگرا و درنتیجه همگرا است.

آزمون نسبت

ما بین آزمونهای موجود برای تشخیص همگرایی و واگرایی سریها آزمون نسبت بیشتراز همه کاربرد دارد . این آزمون بامقایسه با سری هندسی حاصل می شود.

قضیه ۸(آزمون نسبت)

اگر سری $z_1 + z_2 + \dots$ با $z_n \neq 0$ $(n = 1,2,\dots)$ طوری باشد که

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L, \qquad (9)$$

آنگاه

(الف) سری مطلقاً همگرا است اگر $L < 1$.

(ب) سری واگرا است اگر $L > 1$.

(ج) به ازای $L = 1$ این آزمون همگرایی و یا واگرایی سری را نتیجه نمی دهد .

مثال۴ . آزمون نسبت

آیا سری زیر همگرا است یا واگرا؟

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(100+75i)^n}{n!} = 1 + (100+75i) + \frac{1}{2!}(100+75i)^2 + \dots .$$

حل. بنا به قضیه ۸ ، سری موردنظر همگرا است، زیرا

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{|100+75i|^{n+1}\,n!}{|100+75i|^n\,(n+1)!} = \frac{|100+75i|}{n+1} = \frac{125}{n+1} \to L = 0 .$$

قضیه ۲ (شعاع همگرایی R)

فرض کنید دنبالهٔ $\left|\frac{a_n + 1}{a_n}\right|$ ، که در آن $n = 1, 2, \ldots$ همگرا بوده و حد آن برابر L^* باشد.

اگر $L^* = 0$ ، آنگاه $R = \infty$ ، یعنی سری توانی (۱) به ازای هر z همگرا است.

اگر $L^* \neq 0$ (ازاینرو $L^* > 0$)، آنگاه

$$R = \frac{1}{L^*} \tag{۵}$$

، **(فرمول کوشی – آدامار**[1]**)** (Cauchy–Hadamard formula[1]).

اگر $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \infty$ ، آنگاه $R = 0$ (یعنی سری فقط درمرکز z_0 همگرا است).

تبصره: اگر $L^* = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$ ، آنگاه از (۵) می یابیم

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{۶}$$

قضیه ۱۰ (آزمون ریشه)

اگر سری $z_1 + z_2 + \dots$ طوری باشد که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L, \quad (12)$$

آنگاه

(الف) به ازای $L < 1$ ، سری مطلقاً همگرا است.

(ب) به ازای $L > 1$ ، سری واگرا است.

(ج) به ازای $L = 1$ همگرایی یا واگرایی سری ازروی این آزمون حاصل نمی شود.

مثال۶ . آزمون ریشه

آیا سری زیر همگرا است یا واگرا؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}+3}(4-i)^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{7}(4-i) + \frac{1}{19}(4-i)^2 - + \dots .$$

حل. بنا به قضیه ۱۰ ، سری فوق واگرا است، زیرا

$$\sqrt[n]{\frac{|(4-i)^n|}{2^{2n}+3}} = \frac{|4-i|}{\sqrt[n]{4^n+3}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt[n]{4^n+3}} \to L = \frac{\sqrt{17}}{4} > 1.$$

دراینجا به پایان بحث مفاهیم اساسی وحقایق مربوط به سریهای مختلط و آزمونهای همگرایی می رسیم . اساس کار درمورد سریها در بخشهای بعدی ارائه خواهند شد.

۲ . ۱۴ سریهای توانی

یک **سری توانی** برحسب توانهای $z - z_\circ$ یک سری به صورت

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (z - z_\circ)^n = a_\circ + a_1 (z - z_\circ) + a_2 (z - z_\circ)^2 + \ldots \qquad (1)$$

می باشد که در آن z متغیر است، $a_\circ, a_1, \ldots$ ثابتهایی هستند که به **ضرایب** سری موسوم اند و $z_\circ$ عدد مختلط ثابتی است که **مرکز** سری نامیده می شود.

حالت $z_\circ = \circ$ ، حالت خاصی از **سری توانی برحسب توانهای** z می باشد:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n z^n = a_\circ + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots . \qquad (2)$$

۱۴-۴ سری تیلور

Taylor and Maclaurin Series

The **Taylor series**[3] of a function $f(z)$, the complex analog of the real Taylor series is

(1) $$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \text{where} \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

or, by (1), Sec. 14.4,

(2) $$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}}\, dz^*.$$

In (2) we integrate counterclockwise around a simple closed path C that contains z_0 in its interior and is such that $f(z)$ is analytic in a domain containing C and every point inside C.

A **Maclaurin series**[3] is a Taylor series with center $z_0 = 0$.

We see that ***Taylor series are power series***.

Writing out the corresponding partial sum of (1), we thus have

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \cdots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + R_n(z). \tag{4}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a) f'(a) \\ &\quad + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n. \end{aligned}}$$

The remainder, R_n, is given by the n-fold integral

$$R_n = \int_a^x dx_n \cdots \int_a^{x_2} dx_1 f^{(n)}(x_1).$$

سری تیلور برخی توابع مهم

مثال۱ . سری هندسی

فــرض کنیــد $f(z) = \frac{1}{1-z}$. آنگاه داریم $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$ ، $f^{(n)}(0) = n!$. بنابراین بسط مکلورن $\frac{1}{1-z}$ یک سری هندسی به صورت زیر می باشد

$$\frac{1}{1-z} = \sum^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots \qquad (|z| < 1). \qquad (11)$$

$z=1$ یک نقطه تکین برای $f(x)$ و این نقطه روی دایره ای که به شعاع واحد می باشد قرار دارد.

EXAMPLE

Trigonometric and Hyperbolic Functions

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$
$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

By substituting (12) into (1) of Sec. 13.6 we obtain

$$\text{(14)}\qquad \begin{aligned} \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots . \end{aligned}$$

When $z = x$ these are the familiar Maclaurin series of the real functions $\cos x$ and $\sin x$. Similarly, by substituting (12) into (11), Sec. 13.6, we obtain

$$\begin{aligned} f(0) &= \cos 0 &&= 1 \\ f'(0) &= -\sin 0 &&= 0 \\ f''(0) &= -\cos 0 &&= -1 \\ f'''(0) &= \sin 0 &&= 0 \\ f^{(4)}(0) &= \cos 0 &&= 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(a) &+ (x-a) f'(a) \\ &+ \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n . \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(0) &+ (x-0) f'(0) \\ &+ \frac{(x-0)^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{(x-0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n . \end{aligned}}$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots.$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

EXAMPLE

Logarithm

From (1) it follows that

$$\text{(16)} \qquad \operatorname{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \cdots \qquad (|z| < 1).$$

Replacing z by $-z$ and multiplying both sides by -1, we get

$$\text{(17)} \qquad -\operatorname{Ln}(1-z) = \operatorname{Ln}\frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \qquad (|z| < 1).$$

By adding both series we obtain

$$\text{(18)} \qquad \operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right) \qquad (|z| < 1).$$

becomes Taylor's series:

جمع بندی

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).^{11} \tag{5.87}$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{where} \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Maclaurin Theorem

If we expand about the origin ($a = 0$), Eq. (5.87) is known as Maclaurin's series:

$$\boxed{f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).} \tag{5.88}$$

An immediate application of the Maclaurin series (or the Taylor series) is in the expansion of various transcendental functions into infinite (power) series.

چند بسط مک لوران

$$\text{برای همه مقادیر } z: \begin{cases} e^{z} = 1 + z + \dfrac{z^{2}}{2!} + \dfrac{z^{3}}{3!} + \dfrac{z^{4}}{4!} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{n}}{n!} \\ \sin z = z - \dfrac{z^{3}}{3!} + \dfrac{z^{5}}{5!} - + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n} z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos z = 1 - \dfrac{z^{2}}{2!} + \dfrac{z^{4}}{4!} - + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n} z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin h z = z + \dfrac{z^{3}}{3!} + \dfrac{z^{5}}{5!} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos h z = 1 + \dfrac{z^{2}}{2!} + \dfrac{z^{4}}{4!} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!} \end{cases}$$

$$|z|<1 \text{ برای}: \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n} = 1 + z + z^{2} + z^{3} + \ldots \\ \dfrac{1}{1+z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} z^{n} = 1 - z + z^{2} - z^{3} + - \ldots \end{cases}$$

۱۴ . ۷ سری لوران

در کاربردها لازم است که تابع $f(z)$ حول نقاطی که درآنها تحلیلی نیست، اما درآنها تکین (همانند تعریف بخش ۱۴ . ۴) است بسط داد. قضیه تیلور را درچنین مواردی نمی توان به کار برد و دراینجا نیاز به سری جدیدی داریم که به **سری لوران** موسوم است. این سری شامل توانهای صحیح مثبت و **منفی** برحسب $z - z_\circ$ و در یک طوق (محصور بین دو دایره به مرکز $z_\circ$) $f(z)$ تحلیلی است، یک سری همگرا می باشد. $f(z)$ نه تنها ممکن است نقاطی تکینی واقع درخارج دایرهٔ بزرگتر داشته باشد(همانند حالت مربوط به سری تیلور) بلکه نقاط منفردی واقع در داخل دایرهٔ کوچکترنیز داشته باشد (که این خاصیت جدیدی است) . درهرصورت دراین ارتباط قضیه زیر را داریم .

قضیه ۱ . قضیه لوران

اگر $f(z)$ روی دو دایرهٔ متحد المرکز[۹] C_1 و C_2 به مرکز z_0 و در طوق بین آنها تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ را می توان با **سری لوران**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \tag{۱}$$

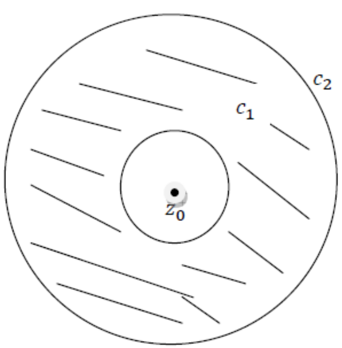
$$= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots$$

نمایش داد. ضرایب سری لوران فوق به صورت انتگرال[۱] بوده وعبارت اند از

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}\,dz^*, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C (z^*-z_0)^{n-1} f(z^*)\,dz^*, \tag{۲}$$

هریک از این انتگرالها روی مسیر بسته ساده دلخواهی مانند C که در طوق قرار دارد ودایرهٔ داخلی را درمیان می گیرد درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت گرفته می شود(شکل ۳۴۲).

این سریها همگرا است و $f(z)$ را در طوقی باز نمایش می دهد که از طوق داده شده به دست می آید اگر دایرهٔ C_1 را آنقدر بزرگ کنیم و دایرهٔ C_2 را آنقدر کوچک کنیم که هریک از دو دایره به نقطه ای که در آن $f(z)$ تکین است برسند.



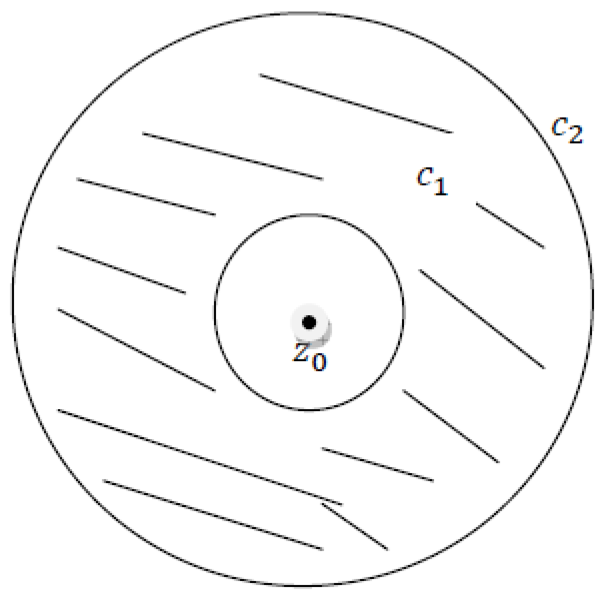
در یک حالت خاص مهم که z_0 تنها نقطهٔ تکین $f(z)$ درداخل C_2 است، آنگاه همگرایی بر کل قرص به جز در z_0 حاکم است.

تبصره. بدیهی است که به جای (۱) و(۲) می توان نوشت (نمایش b_n با a_{-n})

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad (1')$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}\, dz^*. \qquad (2')$$



نکته :

معمولا برای محاسبه بسط لوران یک تابع چند جمله ای از انتگرال های بالا استفاده نمی شود و از بسط زیر استفاده می شود:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{باشرط} \quad |z| < 1$$

نکته :

به ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران تابع $f(z)$, *مانده* تابع $f(z_0)$ در z_0 گفته می شود و با c_{-1} نمایش داده می شود .

مثال ۱ . استفاده از سری مکلورن

سری لوران $z^{-۵} \sin z$ به مرکز صفر را بیابید .

حل. بنا به (۱۴) بخش ۴.۱۴ می یابیم

$$z^{-۵} \sin z = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!} z^{۲n-۴} = \frac{۱}{z^۴} - \frac{۱}{۶z^۲} + \frac{۱}{۱۲۰} - \frac{۱}{۵۰۴۰} z^۲ + - \ldots \qquad (|z| > ۰).$$

دراینجا «طوق» همگرایی سراسر صفحهٔ مختلط بدون مبداء مختصات است .

مثال۶. سری لوران $\frac{1}{1-z^2}$ را طوری بیابید که در طوق $\frac{1}{4} < |z-1| < \frac{1}{2}$ همگرا باشد وناحیه دقیق همگرایی را مشخص کنید.

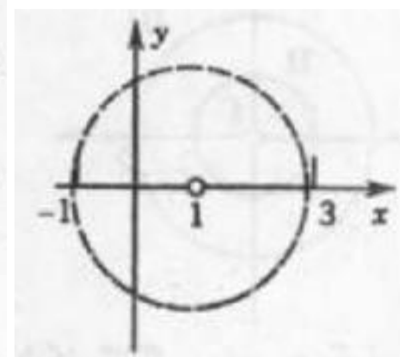
حل. طوق دارای مرکز ۱ می باشد، درنتیجه باید

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z+1)}$$

رابرحسب توانهای $z-1$ بسط دهیم ، داریم

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left[1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n;$$



این سری در قرص $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$ ، یعنی $|z-1| < 2$ همگرا می باشد. با ضرب کردن طرفین تساوی فوق در $-\frac{1}{z-1}$ ، سری مورد نظر به صورت زیر حاصل می شود

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1} = \frac{-1}{2(z-1)} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{1}{16}(z-1)^2 - + \ldots .$$

ناحیه دقیق همگرایی ناحیه $0 < |z-1| < 2$ می باشد، شکل ۳۴۴ را ملاحظه کنید. این موضوع با توجه به اینکه $\frac{1}{z+1}$ از $f(z)$ در -1 ، در فاصله ۲ ازمرکزنقطه تکین سری است، به اثبات می رسد.

نوشتن بسط تیلور و لوران توابع گویا، معتبر در نواحی مختلف

دو بسط زیر که به سری‌های هندسی موسومند، تنها برای $|A| < 1$ اعتبار دارند. لذا هرگاه شرط مذکور برقرار نباشد، مجاز به استفاده از آن‌ها نمی‌باشیم:

$$\frac{1}{1-A} = 1 + A + A^2 + A^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

$$\frac{1}{1+A} = 1 - A + A^2 - A^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n$$

✓ یک قرارداد و نکته

وقتی می‌گویند بسط تابع $f(z)$ را در ناحیه $\alpha < |z - z_0| < \beta$ بنویسید (α می‌تواند صفر و β می‌تواند بی‌نهایت باشد)، منظور آن است که بسط تابع $f(z)$ حول نقطه z_0 (برحسب توان‌های عبارت $(z - z_0)$) نوشته شود که در ناحیه $\alpha < |z - z_0| < \beta$ معتبر باشد.

مثال : برای تابع $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z-4}$ انواع بسطها حول نقطه $z_0=0$ را بنویسید.

حل : با استفاده از روش تجزیه کسرها داریم:

$$f(z)=\frac{2z+3}{(z-1)(z+4)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+4}$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در $z-1$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{2z+3}{z+4}=A+\frac{B(z-1)}{z+4}\xrightarrow{z=1}A=1$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در $z+4$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{2z+3}{z-1}=\frac{A(z+4)}{z-1}+B\xrightarrow{z=-4}B=1$$

پس $f(z)=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z+4}$ می‌باشد.

باتوجه به نقاط تکین تابع فوق که $z=1\,,\,-4$ می‌باشد، سه نوع بسط برای تابع حول $z_0=0$ قابل بیان است که عبارتند از:

۱) معتبر در ناحیه $|z|<1$ که هیچ‌کدام از نقاط تکین در آن نمی‌باشند، لذا بسط‌های $\dfrac{1}{z+4}$ و $\dfrac{1}{z-1}$ تیلوری و کل بسط $f(z)$ نیز تیلوری است.

۲) معتبر در ناحیه $1<|z|<4$ که روی مرز محذوف داخلی $(|z|=1)$، تکین $z=1$ قرار دارد، لذا بسط $\dfrac{1}{z-1}$ لورانی و بسط $\dfrac{1}{z+4}$ تیلوری و کل بسط $f(z)$ نیز لورانی است.

۳) معتبر در ناحیه $|z|>4$ که روی مرز محذوف $|z|=4$، تکین $z=4$ و داخل حفره میانی تکین $z=1$ قرار دارد، لذا بسطهای $\dfrac{1}{z+4}$ و $\dfrac{1}{z-1}$ لورانی و کل بسط $f(z)$ نیز لورانی است.

در ناحیه $|z|<1$ داریم:

$$|z|<1 \quad \to \quad \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$|z|<1 \quad \to \quad \left|\frac{z}{4}\right| < \frac{1}{4} \quad \to \quad \frac{1}{z+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{4}\right)^n$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^{n+1}}$$

در ناحیه $1<|z|<4$ داریم:

$$1<|z|<4 \quad \to \quad \frac{1}{4} < \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \quad \to \quad \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$1<|z|<4 \quad \to \quad \frac{1}{4} < \left|\frac{z}{4}\right| < 1 \quad \to \quad \frac{1}{z+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{4}\right)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^{n+1}}$$

در ناحیه $|z| > 4$ داریم:

$$|z| > 4 \quad \rightarrow \quad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$|z| > 4 \quad \rightarrow \quad \left|\frac{4}{z}\right| < 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{z+4} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\frac{4}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{z}\right)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{z^{n+1}}$$

۸.۱۴ تکینیها و صفرها . بینهایت

به زبان عادی، **نقطه تکین** تابع تحلیلی $f(z)$ نقطه ای مانند z است که $f(z)$ در آن نقطه خاصیت تحلیلی بودن خود را از دست می دهد، و **صفر** تابع تحلیلی $f(z)$ نقطه ای مانند z است که در آن $f(z)=0$ یا

اگر تابع مختلط $f(z)$ در تمام صفحه به جز نقاطی خاص تحلیلی باشد، به آن نقاط، نقاط تکین این تابع مختلط می گوئیم.

تعاریف دقیقتر در ذیل ارائه می شوند.

گوئیم نقطه $z=z_0$ **یک نقطه تکین** یا **یک نقطه منفرد** تابع f است اگر $f(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی نباشد (احتمالاً حتی در آن نقطه تعریف نشده)، اما هرهمسایگی $z=z_0$ شامل نقاطی باشد که $f(z)$ درآن نقاط تحلیلی باشد.

نقطهٔ $z=z_0$ را **نقطه تکین تنها** $f(z)$ نامند اگر $z=z_0$ دارای یک همسایگی بدون تکینیهای دیگر از $f(z)$ را در بر داشته باشد. مثال: $\tan z$ دارای تکینیهای تنها درنقاط $\pm\frac{\pi}{2}$، $\pm\frac{3\pi}{2}$ و غیره است؛ $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$ دارای یک نقطه تکین غیر تنها درصفراست

نقاط تکین به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند:

۱) تکین‌های از نوع تنها که خود به دو گونه قطب و تکین اساسی دسته‌بندی می‌شوند.

۲) تکین‌های از نوع غیرتنها یا از نوع انباشته

(قطب مرتبه بینهایت)

مثال : نقاط تکین توابع زیر را پیدا کرده و نوع آن‌ها را از حیث تنها یا غیرتنها، مشخص کنید:

۱) $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{z^2 - z^3}\right)$

حل : نقاط تکین:

$$z^2 - z^3 = 0 \quad \rightarrow \quad z^2(1-z) = 0 \quad \rightarrow \quad z = 0\,,\,0\,,\,1$$

و همه تکین‌های مذکور از نوع تنها می‌باشند.

۲) $f(z) = \dfrac{1}{1+e^z}$

حل : نقاط تکین:

$$1 + e^z = 0 \quad \rightarrow \quad e^z = -1 \quad \rightarrow \quad z = \ln(-1) \quad \rightarrow \quad z = \ln(1) + i(\pi + 2k\pi) = \pm i\pi\,,\,\pm 3i\pi\,,\,\pm 5i\pi$$

تابع مذکور بی‌شمار نقطه تکین دارد که البته همگی از نوع تنهایند.

انواع تکین‌های تنها

اگر z_0 یک تکین تنها برای تابع $f(z)$ باشد و بتوان mای یافت که $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ حاصلش صفر و بی‌نهایت نشود، z_0 را یک قطب مرتبه mام تابع مذکور گفته و اگر چنین mای موجود نباشد، z_0 را یک تکین اساسی (قطب مرتبه بی‌نهایت) تابع مورد نظر می‌گویند.

مثال : $z = 0$ قطب مرتبه چندم تابع $f(z) = \frac{1 - e^{z^2}}{z^3}$ می‌باشد؟

حل :

$$\lim_{z \to 0} z^3 f(z) = \lim_{z \to 0} 1 - e^{z^2} = 0 \quad \text{غ ق ق}$$

$$\lim_{z \to 0} z^2 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1 - e^{z^2}}{z} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{z \to 0} \frac{-2ze^{z^2}}{1} = 0 \quad (\text{غ ق ق})$$

$$\lim_{z \to 0} z^1 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1 - e^{z^2}}{z^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{z \to 0} \frac{-2ze^{z^2}}{2z} = -1 \neq 0 , \infty$$

یعنی $z = 0$ قطب مرتبه اول تابع مذکور است.

جمع بندی

✓ معرفی بسط لوران یک تابع حول نقطه تکین تنهای آن

اگر $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد، حول این نقطه دارای بسط تیلور است به‌گونه‌ای که تابع را می‌توان به صورت یک سری توانی از $(z-z_0)$ نوشت به طوری که در آن فقط توان‌های صحیح نامنفی از عبارت $(z-z_0)$ پدید می‌آید.

اما اگر z_0 یک نقطه تکین تابع $f(z)$ باشد، امکان نوشتن بسط تیلور حول این نقطه وجود ندارد اما چنانچه z_0 یک تکین تنها برای این تابع باشد، می‌توان بسطی موسوم به بسط لوران تابع $f(z)$ را حول نقطه z_0 بیان نمود.ویژگی بارز این بسط آن است که در آن توان‌های منفی عبارت $(z-z_0)$ نیز پدید می‌آید.

از بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه تکین تنهایی مانند z_0 دو نتیجه به‌دست می‌آید:

الف) ضریب جمله $\frac{1}{z-z_0}$ را مانده تابع در نقطه z_0 گفته و با $\left.\mathrm{Res}\right|_{z_0}$ یا $\left.C_{-1}\right|_{z_0}$ نمایش می‌دهیم.

ب) اگر در این بسط بالاترین توان منفی عبارت $(z-z_0)$ قابل رویت باشد، یعنی z_0 یک قطب تابع $f(z)$ بوده و عدد این بالاترین توان منفی، مرتبه این قطب را نشان می دهد و اگر بالاترین توان منفی برای عبارت $(z-z_0)$ موجود نباشد، یعنی z_0 یک تکین اساسی تابع بوده است.

مثال : بسط توابع زیر را حول نقطه $z = 0$ نوشته و نتایج حاصله را بیان کنید.

$$۱)\ f(z) = z^5 e^{-\frac{1}{z^2}}$$

حل :

$$f(z) = z^5\left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{\left(-\frac{1}{z^2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{1}{z^2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(-\frac{1}{z^2}\right)^4}{4!} + \dots\right) = z^5 - z^3 + \frac{z}{2!} - \frac{1}{z3!} + \frac{1}{z^3 4!} - \dots$$

نتایج:

۱) در بسط مذکور توان‌های منفی عبارت z موجود است لذا چنین بسطی لورانی است و این تأکید می‌کند $z = 0$ نقطه تکین تابع است.

۲) بالاترین توان منفی در این بسط قابل رویت نیست لذا $z = 0$ تکین اساسی است.

$$۲)\ f(z) = \frac{z - \sin hz}{z^3}$$

$$f(z) = \frac{z - \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots\right)}{z^3} = -\left(\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \dots\right)$$

نتایج:

در بسط مذکور هیچ توان منفی از عبارت z موجود نیست لذا جنس بسط از نوع تیلوری است و این تصریح می‌کند $z = 0$ نقطه تکین تابع به احتساب نمی‌آید و به عبارتی تابع در $z = 0$ تحلیلی است.

چند نکته در تعیین نوع نقاط تکین

۱) تابع $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ را در نظر بگرید که در آن $Q(z)$ و $P(z)$ همه‌جا تحلیلی‌اند. اگر z_0 یک صفر مرتبه mام تابع $P(z)$ و z_0 یک صفر مرتبه nام تابع $Q(z)$ باشد، می‌توان گفت:

الف) اگر $m>n$ باشد، آنگاه z_0 یک صفر مرتبه $(m-n)$اُم تابع $f(z)$ است.

ب) اگر $m<n$ باشد، آنگاه z_0 یک قطب مرتبه $(n-m)$اُم تابع $f(z)$ است.

ج) اگر $m=n$ باشد، آنگاه z_0 یک تکین برداشتنی (قطب مرتبه صفرم) تابع $f(z)$ است. (مهم است بدانیم در این حالت z_0 نقطه تکین تابع به احتساب نمی‌آید و به تعبیری تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی بوده و حول این نقطه دارای بسط تیلور می‌باشد.)

مثال : تابع $f(z)=\dfrac{z^3\left(1-e^z\right)}{(1-\cos z)^5}$ مفروض است. $z=0$ چگونه نقطه‌ای برای این تابع است؟

حل :

$$(1-\cos z)\Big|_{z=0}=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} \sin z\Big|_{z=0}=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} \cos z\Big|_{z=0}=1\neq 0$$

$z=0$ برای $1-\cos z$ صفر مرتبه دوم است. لذا برای $(1-\cos z)^5$ صفر مرتبه دهم است.

$$\left(1-e^z\right)\Big|_{z=0}=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} \left(-e^z\right)\Big|_{z=0}=-1\neq 0$$

$z=0$ برای $1-e^z$ صفر مرتبه اول است. لذا برای $z^3\left(1-e^z\right)$ صفر مرتبه چهارم است.

و لذا برای کل $f(z)$، $z=0$ قطب مرتبه $(10-4=6)$ام است.

فصل ۱۵

انتگرالگیری به روش مانده ها :Residue Integration Method

۱۵ . ۱ مانده ها

ابتدا بیان می کنیم که مانده چیست و چگونه برای محاسبه انتگرال زیر مورد استفاده قرار می گیرد .

$$\oint_C f(z)\, dz.$$

این انتگرال یک انتگرال کانتور بر روی مسیر بسته ساده C می باشد .

اگر $f(z)$ همه جا بر C و درون C تحلیلی باشد، آنگاه چنین انتگرالی باتوجه به قضیه انتگرال کوشی (بخش ۱۳ . ۳)، همانطور که مشاهده کردیم برابر صفر است .

اگر $f(z)$ دارای یک نقطه تکینی درنقطه $z = z_0$ و درسایرنقاط واقع بر C و داخل آن تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ دارای سری لورانی به صورت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots$$

می باشد که به ازای تمام نقاط نزدیک $z = z_0$ (به جز خود $z = z_0$)، در دامنه ای به صورت $0 < |z - z_0| < R$ همگرا است. حال انگیزه کلیدی را پی می گیریم. ضریب b_1 اولین توان منفی $\frac{1}{z - z_0}$ این سری لوران با فرمول انتگرالی (۲)، بخش ۷.۱۴، به ازای $n = 1$ به دست می آید، یعنی

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz,$$

(یادآوری) اگر $f(z)$ روی دو دایرهٔ متحد المرکز[۹] C_1 و C_2 به مرکز z_0 و در طوق بین آنها تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ را می توان با **سری لوران**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

$$= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \ldots \qquad (۱)$$

نمایش داد. ضرایب سری لوران فوق به صورت انتگرال[۱] بوده وعبارت اند از

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}}\,dz^*, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C (z^* - z_0)^{n-1} f(z^*)\,dz^*, \qquad (۲)$$

اما از آنجا که سری لوران را می توان به روشهای گوناگون به دست آورد، بدون آنکه لازم باشد برای تعیین ضرایب آن از فرمولهای انتگرالی استفاده کرد(ر. ك. مثالهای بخش ۷.۱۴). بنابراین برای محاسبه انتگرال $\oint_C f(z)dz$ کافی است به یکی از روشها b_1 را محاسبه کرده و باتوجه به تساوی زیر به محاسبه این انتگرال بپردازیم

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i b_1. \qquad (1)$$

انتگرالگیری درآن درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت روی مسیر بستهٔ ساده C که نقطه $z = z_0$ یک نقطه داخلی آن است صورت می گیرد.

ضریب b_1 به **ماندهٔ** $f(z)$ در $z = z_0$ موسوم می باشد و آن را با نماد

The coefficient b_1 is called the **residue** of $f(z)$ at $z = z_0$

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \qquad (2)$$

نمایش می دهند.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

مثال ۱ . محاسبه یک انتگرال به کمک مفهوم مانده

انتگرال تابع $f(z) = z^{-4} \sin z$ روی دایرهٔ واحد C، درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت را به دست آورید .

حل. از(۱۴) بخش ۱۴ . ۴ سری لوران

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + - \dots$$

را به دست می آوریم که به ازای $|z| > 0$ (یعنی، به ازای تمام مقادیر $z \neq 0$) همگرا است .

$$b_1 = \operatorname{Res}_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \Rightarrow \begin{cases} = \lim_{z \to z_0} (z-0)^1 f(z) = not \\ = \lim_{z \to z_0} (z-0)^2 f(z) = not \\ = \lim_{z \to z_0} (z-0)^3 f(z) = 1 \end{cases}$$

سری فوق نشان می دهد که $f(z)$ در $z = 0$ دارای یک قطب مرتبه سوم است ومانده‌ٔ متناظر برابر است با

پس ضریب 1/z برابر است با :

$$b_1 = -\frac{1}{3!}.$$

باتوجه به (۱) داریم

$$\oint \frac{\sin z}{z^4} dz = 2\pi i b_1 = -\frac{\pi i}{3}.$$

$$\boxed{\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i b_1. \quad (1)}$$

دو فرمول برای محاسبه مانده ها در قطبهای ساده

چگونه محاسبه مانده را با قطب ساده آغاز می کنیم. برای این منظور فرض کنید $f(z)$ دارای یک قطب ساده درنقطه $z = z_0$ باشد. باتوجه به این فرض سری لوران متناظر به صورت زیر درمی آید

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \qquad (0 < |z - z_0| < R).$$

دراینجا $b_1 \neq 0$ ،(چرا؟) با ضرب طرفین رابطه فوق در $z - z_0$ می یابیم

$$(z - z_0)f(z) = b_1 + (z - z_0)\left[a_0 + a_1(z - z_0) + \dots\right].$$

حال فرض کنیم $z \to z_0$. دراین صورت طرف راست به سمت b_1 میل می کند. باتوجه به آن می یابیم

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) \qquad (3)$$

مثال۳ . مانده درقطب ساده

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{9z+i}{z(z^2+1)}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{9z+i}{z(z+i)(z-i)}=\left[\frac{9z+i}{z(z+i)}\right]_{z=i}=\frac{10i}{-2}=-5i\,.$$

برخی اوقات می توان از فرمول دیگری برای محاسبه مانده در قطب ساده استفاده نمود.

تابع داده شده دارای نقاط تکین $+i$ و $-i$ و 0 می باشد.

برای بررسی مرتبه قطب هر نقطه تکین می بایست از فرمول زیر استفاده نمود.

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$$

۱- $Z_0=+i$:

$$\lim_{z\to +i}(z-z_0)^m \frac{9z+i}{z(z^2+1)} \xrightarrow{m=1 \text{ انتخاب}} \lim_{z\to +i}\cancel{(z-i)}^{m=1} \frac{9z+i}{z\cancel{(z-i)}(z+i)} =$$

$$= \frac{9i+i}{i(i+i)} = \frac{10i}{-2} = -5i \neq < \infty$$

بنابراین $Z_0=+i$ قطب مرتبه اول تابع است. در این شرایط جواب آزمون مانده‌ی تابع در این نقطه‌ی تکین $(Z_0=+i)$ است.

۲- $z_0=-i$:

$$\lim_{z\to -i}(z-(-i))^m \frac{9z+i}{z(z^2+1)} \xrightarrow{m=1 \text{ انتخاب}} \lim_{z\to -i}\cancel{(z+i)}^{m=1} \frac{9z+i}{z(z-i)\cancel{(z+i)}}$$

$$= \frac{-9i+i}{-i(-i-i)} = \frac{-8i}{-2} = +4i$$

بنابراین $z_0=-i$ قطب مرتبه اول تابع است.

۳- $z_0=0$:

$$\lim_{z\to 0}(z-0)^m \frac{9z+i}{z(z^2+1)} \xrightarrow{m=1 \text{ انتخاب}} \lim_{z\to 0}\cancel{(z-0)}^{m=1} \frac{9z+i}{\cancel{z}(z+i)(z-i)}$$

$$= \frac{i}{1} = i$$

بنابراین $z_0=0$ قطب مرتبه اول تابع است.

راه حل همیشگی برای محاسبه مانده در نقاط تکین استفاده از بسط لوران است. ولی اگر نقطه تکین از نوع قطب باشد داریم:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

که در آن $p(z)$ و $q(z)$ توابع تحلیلی هستند، و $p(z_\circ) \neq \circ$ و $q(z)$ دارای یک صفر ساده در $z = z_\circ$ است. باتوجه به این مفروضات و بر طبق قضیه ۴ بخش ۱۴ .۸ تابع $f(z)$ دارای یک قطب ساده در $z = z_\circ$ است. بنا به تعریف صفر ساده، $q(z)$ دارای سری تیلور به صورت

$$q(z) = (z - z_\circ)q'(z_\circ) + \frac{(z - z_\circ)^۲}{۲}q''(z_\circ) + \ldots$$

است . با جایگزینی آن در $f = \frac{p}{q}$ و سپس با قراردادن f در (۳)، می یابیم

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\circ} f(z) = \lim_{z\to z_\circ}(z - z_\circ)\frac{p(z)}{q(z)}$$

$$= \lim_{z\to z_\circ}\frac{(z - z_\circ)p(z)}{(z - z_\circ)\left[q'(z_\circ) + (z - z_\circ)\frac{q''(z_\circ)}{۲} + \ldots\right]}.$$

حال مشاهده می کنیم که در سمت راست ، عامل $z - z_\circ$ حذف می شود وعبارت حاصل درمخرج کسر فوق دارای حد $q'(z_\circ)$ است . ازاین رو فرمول دوم محاسبه مانده در قطب ساده عبارت است از

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\circ} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_\circ}\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_\circ)}{q'(z_\circ)}. \qquad (۴)$$

مثال۴ . محاسبه مانده در یک قطب ساده با استفاده از فرمول (۴)

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{9z+i}{z(z^2+1)}=\left[\frac{9z+i}{3z^2+1}\right]_{z=i}=\frac{10i}{-2}=-5i$$

(مثال ۳ را ملاحظه کنید.)

فرمولی برای مانده در یک قطب ازمرتبه بالا

راه‌حل همیشگی برای محاسبه مانده در نقاط تکین، استفاده از بسط لوران تابع حول آن نقطه تکین می‌باشد. ولی اگر نقطه تکین مذکور از نوع قطب باشد، راه دیگری نیز موجود است.

هرگاه z_0 یک قطب مرتبه mاُم تابع $f(z)$ باشد، داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right\}. \qquad (5)$$

به خصوص اگر z_0 یک قطب مرتبه اول تابع $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ باشد، خواهیم داشت:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

توجه ۱ : هرگاه z_0 یک قطب مرتبه اول تابع $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ باشد، و مضافاً $P(z_0)$ مخالف صفر باشد (یعنی z_0 یک صفر مرتبه اول تابع $Q(z)$ می‌باشد)، آنگاه داریم:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z_0}=\frac{P(z)}{Q'(z)}\Big|_{z_0} \qquad (*)$$

توجه ۲ : اگر $f(z)$ تابعی زوج باشد $(f(-z)=f(z))$ ،آنگاه در بسط این تابع حول $z=0$ فقط توان‌های زوج (مثبت یا منفی) عبارت z ظاهر می‌شود.

لذا اگر $z=0$ یک نقطه تکین تنها برای تابع زوج $f(z)$ باشد (قطب یا اساسی) در این نقطه مانده تابع که همان ضریب جمله $\frac{1}{z}$ می‌باشد صفر خواهد بود.

درحالت خاص، برای قطب مرتبه دو $(m=۲)$، داریم

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \{[(z-z_0)^2 f(z)]'\}. \qquad (۵^*)$$

توجه: ابتدا با فرمول $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ مرتبه قطب بدست می آید و سپس با فرمول بالا مانده محاسبه می شود.

مثال ۶ . مانده دریک قطب ازمرتبه بالا

تابع f با ضابطه

$$f(z)=\frac{۵۰z}{(z+۴)(z-۱)^۲}$$

دارای یک قطب مرتبهٔ دوم در $z=۱$ است، و از (۵^*) مانده متناظر عبارت است از

$$\operatorname*{Res}_{z=۱} f(z) = \lim_{z\to ۱}\frac{d}{dz}[(z-۱)^۲ f(z)] = \lim_{z\to ۱}\frac{d}{dz}\left(\frac{۵۰z}{z+۴}\right) = ۸.$$

توجه: چون این نقطه قطب مرتبه دوم تابع است (در آزمون با m=2 جواب حاصل شده) مقدار جواب آزمون مانده ی تابع در این نقطه تکین نمی باشد و می بایست از فرمول (۵) صفحه قبل ، مانده ی تابع را در این نقطه تکین بدست آورد.

۲ . ۱۵ قضیه مانده

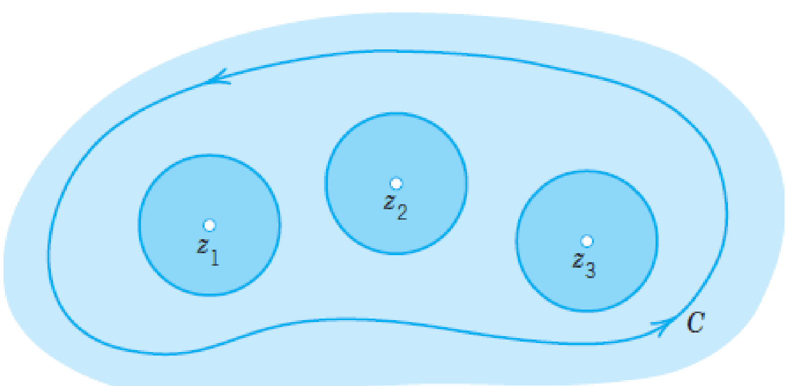
تا اینجا می توان انتگرال توابع تحلیلی $f(z)$ را روی منحنی های بسته C وقتی که $f(z)$ فقط یک نقطه تکین در داخل C دارد، محاسبه کرد. اکنون خواهیم دید که انتگرالگیری به روش مانده را می توان به حالتی که $f(z)$ دارای چند نقطه تکین تنها در داخل C است تعمیم داد. انجام این کار به سادگی به شرح زیر صورت می پذیرد.

قضیه ۱ . قضیه مانده

فرض کنید $f(z)$ تابعی باشد که در داخل مسیر بستهٔ C وروی آن، به جز تعدادی متناهی نقاط تکین z_1 ، z_2 ، . . . ، z_k واقع در داخل C ، تحلیلی باشد، آنگاه

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z), \qquad (1)$$

که در آن انتگرالگیری روی مسیر C درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت صورت می پذیرد.



بنابراین

هرگاه C یک منحنی بسته طی شده در جهت مثلثاتی باشد و $f(z)$ در تمام صفحه مختلط به جز احتمالاً نقاطی خاص تحلیلی باشد و هیچکدام از تکین‌های تابع $f(z)$ روی مرز C قرار نگیرد و مضافاً تمام تکین‌های تابع $f(z)$ که احتمالاً داخل ناحیه محصور به منحنی بسته C هستند، از نوع تکین تنها باشند (قطب یا اساسی)، آنگاه داریم:

$$\int f(z)\,dz = 2\pi i\,\{\text{مجموع مانده‌های تابع } f(z) \text{ در نقاط تکین واقع در داخل مرز بسته } C\}$$

مثال : مطلوبست محاسبه $I=\int_c \frac{\sin \pi z}{(z-1)\left(z^2-\frac{1}{4}\right)}dz$ که در آن c دایره $|z|=2$ می‌باشد.

حل : نقاط تکین تابع عبارتند از:

$z=\pm\frac{1}{2}$ که هر دو قطب مرتبه اولند که هر دو داخل مرز c واقع‌اند.

$$\operatorname{Res}\Big|_{z=-\frac{1}{2}} \overset{*}{=} \frac{\sin \pi z}{(1)\left(z^2-\frac{1}{4}\right)+(z-1)(2z)}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

و البته $z=1$ که صورت و مخرج را یکبار صفر می‌کند، تکین تابع به حساب نمی‌آید.

$$\operatorname{Res}\Big|_{z=\frac{1}{2}} \overset{*}{=} \frac{\sin \pi z}{(1)\left(z^2-\frac{1}{4}\right)+(z-1)(2z)}\Bigg|_{z=\frac{+1}{2}} = -2$$

پس در کل:

$$I=2\pi i\left(-2-\frac{2}{3}\right)=\frac{-16\pi i}{3}$$

مثال : مطلوبست محاسبه $I = \int_c \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}\,dz$ که در آن c بیضی $|z+i| + |z+2| = \frac{10}{3}$ می‌باشد.

حل : نقاط تکین عبارتند از:

$z = 0$ تکین اساسی و داخل مرز c است.

زیرا : $|0+i| + |0+2| = 1 + 2 = 3 < \frac{10}{3}$

$z = 1$ قطب مرتبه اول و خارج مرز c است. زیرا:

$$|1+i| + |1+2| = \sqrt{2} + 3 > \frac{10}{3}$$

برای محاسبه مانده در $z = 0$ باید بسط لوران حول $z = 0$ نوشته شود:

$$e^{\frac{1}{z}} \frac{1}{1-z} = \left\{1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2\,2!} + \frac{1}{z^3\,3!} + \dots\right\}\left\{1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots\right\}$$

$\frac{1}{z}$ ضریب جمله : $\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e - 1$

پس:

$$I = 2\pi i(e-1)$$

دقت داریم:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad \rightarrow \quad e^1 - 1 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

۳.۱۵ محاسبه انتگرالهای حقیقی

انتگرالهای توابعی گویا از $\cos\theta$ و $\sin\theta$

ابتدا انتگرالهایی از نوع

$$I = \int_{0}^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta \tag{1}$$

را که در آن $F(\cos\theta, \sin\theta)$ یک تابع گویای حقیقی از $\cos\theta$ و $\sin\theta$ [به عنوان مثال، $\frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}$] و بر فاصله انتگرالگیری متناهی است، درنظر می گیریم. با قرار دادن $z = e^{i\theta}$ می یابیم

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}),$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}). \tag{2}$$

هم اکنون مشاهده می کنیم که تابع انتگرالده تابعی گویا از z به صورت $f(z)$ است. وقتی θ از ۰ تا 2π تغییر می کند، متغیر z یک بار روی دایرهٔ واحد $|z| = 1$ را درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت حرکت می کند. از آنجا که $\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta}$، داریم $d\theta = \frac{dz}{iz}$ و انتگرال مفروض به صورت زیر درمی آید

$$I = \oint_C f(z) \frac{dz}{iz}, \tag{3}$$

انتگرالگیری روی دایرهٔ واحد درجهت عکس حرکت عقربه های ساعت صورت می پذیرد.

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)} \quad \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

مثال ۱ . انتگرالی ازنوع (۱)

باتوجه به روش مذکور، نشان دهید که

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}=2\pi .$$

حل. با استفاده از روابط $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ و $d\theta=\frac{dz}{iz}$ می یابیم

$$\oint_C\frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}=\oint_C\frac{dz}{-\frac{i}{2}(z^2-2\sqrt{2}z+1)}=-\frac{2}{i}\oint_C\frac{dz}{(z-\sqrt{2}-1)(z-\sqrt{2}+1)}.$$

مشـاهده می کنیم که تـابع انتگرالده دارای دو قطب سـاده، یکی در $z_1=\sqrt{2}+1$ ، که درخـارج دایرهٔ واحد $C:|z|=1$ واقع است و ازاین رو مورد توجه ما نیست و دیگر برابر $z_2=\sqrt{2}-1$ است . که در داخل C قرار داشته ومقدار مانده دراین نقطه برابراست با [بنا به (۳) از بخش ۱۵ . ۱]

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2}\frac{1}{(z-\sqrt{2}-1)(z-\sqrt{2}+1)}=\left[\frac{1}{z-\sqrt{2}-1}\right]_{z=\sqrt{2}-1}=-\frac{1}{2}.$$

باتوجه به ضریب $-\frac{2}{i}$ درکنار انتگرال نتیجه موردنظر به صورت به دست می آید

$$2\pi i(-\frac{2}{i})(-\frac{1}{2})=2\pi .$$

انتگرالهای توسعی یا ناسرهٔ توابع گویا

حال انتگرالهای حقیقی ازنوع

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \tag{۴}$$

را مورد بررسی قرار می دهیم. چنین انتگرالی، که فاصله انتگرالگیری در آن متناهی نیست، به **انتگرال ناسره(توسعی)** موسوم می باشد و چنین تعریف می شود

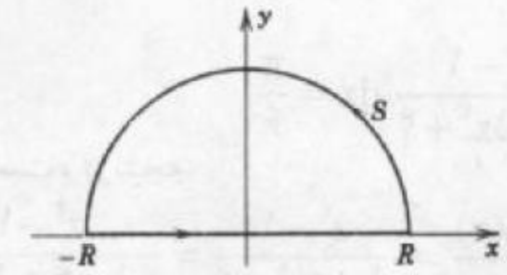
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)\, dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} f(x)\, dx. \tag{۵'}$$

هرگاه هر دو حد در طرف راست موجود باشند، آنگاه می توان میل کردن به $-\infty$ و ∞ را درهم ادغام کرده وچنین نوشت[1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx. \tag{۵}$$

فرض کنید تابع $f(x)$ که در (۴) ظاهر شده است یک تابع گویای حقیقی باشد که مخرجش به ازای هر مقدار حقیقی x مخالف صفر است و درجهٔ آن لااقل دو درجه بیشتراز درجهٔ صورت است. آنگاه حدودهایی که در ('۵) آمده اند وجود دارند، ومی توان انتگرالگیری را از(۵) شروع کرد. انتگرال کانتورمتناظر

$$\oint_C f(z)\, dz \tag{۵*}$$



شکل ۳۴۷ . مسیر C از انتگرال کانتور در (۵*)

روی مسیر C ، مطابق شکل ۳۴۷ ، را درنظر می گیریم . از آنجا که f(x) گویا است، f(x) دارای تعدادی متناهی قطب درنیم صفحهٔ فوقانی است، واگر R را به قدر کافی بزرگ اختیار کنیم، در آن صورت C این قطبها را دربر می گیرد. آنگاه بنا به قضیه مانده می یابیم

$$\oint_C f(x)\,dz = \int_S f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, f(z)$$

که در آن مجموع فوق همهٔ مانده های f(z) را درنقاطی ازنیم صفحهٔ فوقانی که در آن f(z) دارای قطب است دربرمی گیرد. باتوجه به آن می یابیم

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, f(x) - \int_S f(z)\,dz. \qquad (۶)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \oint_c f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \oint_s f(z)\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\,(f(z))}$$

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \operatorname*{Res}_{z=z_\circ} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_\circ} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_\circ)}{q'(z_\circ)}.$$

مثال۳ . یک انتگرال ناسره دیگر

با استفاده از (۷)، نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{6}.$$

حل. درجه مخرج دو واحد از درجه صورت بیشتر است، درنتیجه

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4} = \frac{z^2-1}{(z^2+4)(z^2+1)}$$

دارای قطبهای ساده $2i$ و i درنیم صفحه فوقانی و $-2i$ و $-i$ درنیم صفحه تحتانی است که دراینجا به آنها نیاز نداریم. باتوجه به $q'(z) = 4z^3+10z$ و (۴) بخش ۱۵ . ۱ داریم

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \left[\frac{z^2-1}{4z^3+10z}\right]_{z=2i} = \frac{5}{12i}, \quad \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \left[\frac{z^2-1}{4z^3+10z}\right]_{z=i} = \frac{-2}{6i}.$$

درنتیجه جواب نهایی عبارت است از

$$2\pi i\left(\frac{5}{12i} - \frac{1}{3i}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

محاسبه برخی انتگرال‌ها با روش مانده‌ها

۲) در محاسبه انتگرال‌هایی به صورت $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ که در آن $Q(x)$ و $P(x)$ دو چند جمله‌ای از x هستند که درجه $Q(x)$ لااقل دو واحد از درجه $P(x)$ بیشتر است و مضافاً $Q(x)$ هیچ صفر حقیقی ندارد، می‌توان نشان داد:

$$I = 2\pi i \left\{ \text{مجموع مانده‌های تابع } \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ در نقاط تکین واقع بر نیم صفحه فوقانی} \right\}$$

۳) در محاسبه انتگرال‌هایی به صورت $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\, dx$ که در آن α عددی ثابت و مثبت است و $Q(x)$ و $P(x)$ دو چند جمله‌ای از x هستند به طوری‌که درجه $Q(x)$ لااقل یک واحد از درجه $P(x)$ بیشتر است و مضافاً $Q(x)$ یا هیچ صفر حقیقی ندارد و یا اگر دارد صفری ساده و منطبق بر یکی از صفرهای $\cos\alpha x$ یا $\sin\alpha x$ می‌باشد، می‌توان نشان داد:

$$I = 2\pi i \left\{ \begin{array}{c} \text{مجموع مانده‌های تابع } e^{i\alpha z}\frac{P(z)}{Q(z)} \\ \text{در نقاط تکین واقع بر نیم صفحه فوقانی} \end{array} \right\} + \pi i \left\{ \begin{array}{c} \text{مجموع مانده‌های تابع } e^{i\alpha z}\frac{P(z)}{Q(z)} \\ \text{در نقاط تکین روی محور حقیقی} \end{array} \right\}$$

توجه کنید داریم $e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i \sin\alpha x$. لذا طبیعی است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos\alpha x\, dx = \operatorname{Re}(I) \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin\alpha x\, dx = \operatorname{Im}(I)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \oint_c f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \oint_s f(z)\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\,(f(z))$$

مثال : مطلوبست محاسبه $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx$.

حل :

$$e^{i\alpha}\frac{P(z)}{Q(z)} = e^{iz}\frac{\sin z}{z(z^2+1)} \quad \rightarrow \quad z = 0\,,\ z = \pm i$$

همگی قطب مرتبه اولند و البته $z = 0$ واقع بر محور حقیقی و $z = i$ واقع بر نیم‌صفحه فوقانی است.

$$\mathrm{Res}\,\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\bigg|_{z=0} \overset{*}{=} \frac{e^{iz}}{3z^2+1}\bigg|_{z=0} = 1$$

$$\mathrm{Res}\,\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\bigg|_{z=i} \overset{*}{=} \frac{e^{iz}}{3z^2+1}\bigg|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{-2}$$

حال می‌گوئیم:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix}\frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = 2\pi i\left(\frac{e^{-1}}{-2}\right) + \pi i(1) = \frac{-\pi i}{e} + \pi i$$

حال می‌توان گفت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx = \mathrm{Im}(I) = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

۱۵ . ۴ انواع دیگری از انتگرالهای حقیقی

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta,$$

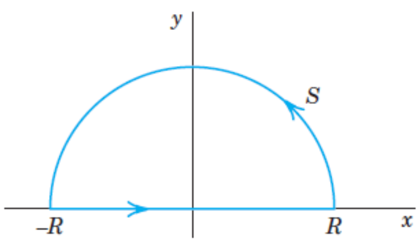
انتگرالهای حقیقی که به شکل

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\, dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\, dx \qquad (\text{s حقیقی}) \qquad (۱)$$

می باشند در ارتباط با انتگرال فوریه روی می دهند

هرگاه f(x) تابعی گویا باشد می توان انتگرال متناظر را به صورت

$$\oint_C f(z)e^{isz}dz \qquad (\text{s حقیقی ومثبت})$$



روی کانتور C از شکل ۳۴۷ درنظر گرفت (بخش ۱۵ . ۳). باجایگزینی (۷) ،بخش ۱۵ . ۳، به دست می آوریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx = ۲\pi i\sum \text{Res}\left[f(z)e^{isz}\right] \qquad (s > ۰),(۲)$$

که درآن جمع روی مانده های $f(z)e^{isz}$ در قطبهای آن درنیم صفحه فوقانی محاسبه می شود . با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی وموهومی در طرفین (۲) می یابیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\, dx = -۲\pi\sum \text{Im}\,\text{Res}\left[f(z)e^{isz}\right],$$

$$(s > ۰) \qquad (۳)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\, dx = ۲\pi\sum \text{Re}\,\text{Res}\left[f(z)e^{isz}\right].$$

قضیه ۱ . قطبهای ساده روی محور حقیقی

اگر f(z) دارای یک قطب ساده در z =a واقع بر محور حقیقی باشد ، آنگاه (شکل ۳۵۱)

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_r} f(z)\, dz = \pi i \operatorname{Res}_{z=a} f(z).$$

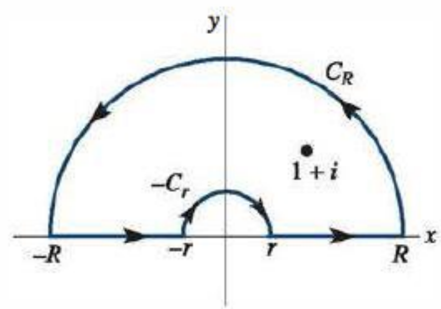
EXAMPLE 5 Using an Indented Contour

Evaluate the Cauchy principal value of $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx.$

SOLUTION Since the integral is of form (3), we consider the contour integral $\oint_C e^{iz}\, dz/z(z^2 - 2z + 2)$. The function $f(z) = 1/z(z^2 - 2z + 2)$ has simple poles at $z = 0$ and at $z = 1 + i$ in the upper half-plane. The contour C shown in **FIGURE 19.6.4** is indented at the origin. Adopting an obvious notation, we have

$$\oint_C = \int_{C_R} + \int_{-R}^{-r} + \int_{-C_r} + \int_r^R = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 1 + i), \tag{13}$$

where $\int_{-C_r} = -\int_{C_r}$. Taking the limits of (13) as $R \to \infty$ and as $r \to 0$, we find from Theorems 19.6.2 and 19.6.3 that



$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x(x^2-2x+2)}\,\mathrm{dx} = \oint_c \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res} f(z)\right]$$

$$\Rightarrow \oint_c \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}\,dz = \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}\,dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)}\,\mathrm{dx} + \int_{-C_r} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}\,dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)}\,\mathrm{dx}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^{i(1+i)}}{2(i-1)}\right]$$

$$\Rightarrow \int_r^R \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x(x^2-2x+2)}\,\mathrm{dx} + \underbrace{\underset{R\to\infty}{Lim}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}\,dz}_{=0} - \underset{r\to 0}{Lim}\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}\,dz = \frac{\pi i e^{i(1+i)}}{i-1}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}{2i\int_r^R \frac{\sin(x)}{x(x^2-2x+2)}}\,\mathrm{dx} = \pi i\left[\operatorname{Res}_{z\to 0} f(z)\right] + \frac{\pi i e^{i(1+i)}}{i-1}$$

$$\Rightarrow 2i\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x(x^2-2x+2)}\,\mathrm{dx} = \pi i\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi i e^{i(1+i)}}{i-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x(x^2-2x+2)}\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi e^{i(1+i)}}{2(i-1)} \Rightarrow\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(x)}{x(x^2-2x+2)}\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi e^{i(1+i)}}{(i-1)}$$

13.35. Show that $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

The method of Problem 13.34 leads us to consider the integral of e^{iz}/z around the contour of Problem 13.27. However, since $z = 0$ lies on this path of integration and since we cannot integrate through a singularity, we modify that contour by indenting the path at $z = 0$, as shown in Fig. 13-19, which we call contour C' or $ABDEFGHJA$.

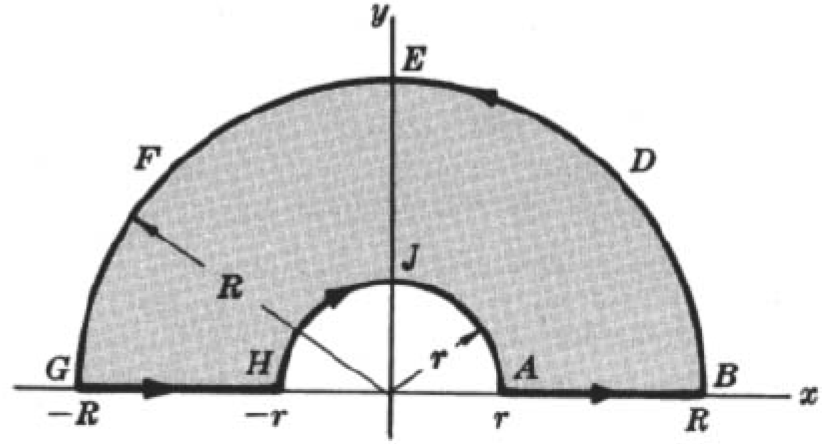


Fig. 13-19

Since $z = 0$ is outside C', we have

$$\int_{C'} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

or

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

Replacing x by $-x$ in the first integral and combining with the third integral, we find,

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\,dx + \int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

or

$$2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_{HJA} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{BDEFG} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

13.16. Evaluate (*a*) $\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz$, (*b*) $\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz$ where C is the circle $|z-1| = 3$.

(*a*) Since $z = \pi$ lies within C, $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz = \cos\pi = -1$ by Problem 13.15 with $f(z) = \cos z$, $a = \pi$. Then $\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz = -2\pi i$.

(*b*)
$$\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz = \oint_C e^z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)dz = \oint_C \frac{e^z}{z}\,dz - \oint_C \frac{e^z}{z+1}\,dz$$
$$= 2\pi i e^0 - 2\pi i e^{-1} = 2\pi i(1-e^{-1})$$

by Problem 13.15, since $z = 0$ and $z = -1$ are both interior to C.

13.17. Evaluate $\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz$ where C is any simple closed curve enclosing $z = 1$.

Method 1. By Cauchy's integral formula, $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$.

If $n = 2$ and $f(z) = 5z^2 - 3z + 2$, then $f''(1) = 10$. Hence

$$10 = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz \quad \text{or} \quad \oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz = 10\pi i$$

Method 2. $5z^2 - 3z + 2 = 5(z-1)^2 + 7(z-1) + 4$. Then

$$\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz = \oint_C \frac{5(z-1)^2+7(z-1)+4}{(z-1)^3}\,dz$$
$$= 5\oint_C \frac{dz}{z-1} + 7\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2} + 4\oint_C \frac{dz}{(z-1)^3} = 5(2\pi i) + 7(0) + 4(0)$$
$$= 10\pi i$$

by Problem 13.13.

ت. الف ۴ ریاضی مهندسی

۱- درستی قضیه گرین را برای تابع انتگرال $\oint_C (3xy-y^2)dx+(y^2+x)dy$ ثابت نمایید که C مسیر بسته‌ی بین دو تابع $y^2=x$ و $y=x^3$ می‌باشد.

۲- اگر تابع $f(z)=\frac{1}{z^n}$ باشد مقدار انتگرال $\oint_C \frac{dz}{z^n}$ را بدست آورید.

۳- همگرایی، عدم همگرایی و در صورت همگرا بودن شعاع همگرایی توابع زیر را بدست آورید:

الف) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)2^n z^{3n}$ ، ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4-2i}{1+5i}\right)^n z^n$

پ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{2^n (n!)^3} z^n$ ، ت) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{2^n(n+2)(n+1)} z^{2n}$

۴- سری تیلور $\cos^2 z$ را حول $\frac{\pi}{2}$ محاسبه نمایید.

۵- ضریب جمله $\frac{1}{z}$ در سری لوران تابع زیر را محاسبه کنید:

$$f(z)=\frac{\sin z}{1-z}z^6$$

6- مقدار، نوع تکینگی‌های تابع $\frac{\sin^2 z}{z^2}$ را بدست آورید و نوع قطب آنها را محاسبه کنید.

۷- نقاط تکین و مرتبه قطب هر کدام را در تابع $\dfrac{1}{(z^2+1)^2(z-1)}$ را بدست آورید.

۸- نقاط تکین و مرتبه قطب هر کدام را در تابع $\dfrac{z^4}{z^2-iz+2}$ بدست آورید.

۹- نقاط تکین و مرتبه قطب هر کدام را در تابع $f(z)=\dfrac{z+1}{z^4-2z^3}$ بدست آورید و نهایتاً انتگرال $\oint_{C:|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz$ را حساب کنید.

۱۰- انتگرال $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}\,d\theta$ را حساب کنید.

۱۱- انتگرال $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$ را حساب کنید.

۱۲- انتگرال $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{13-12\cos2\theta}\,d\theta$ را حساب کنید.

۱۳- نقاط تکین و مرتبه قطب را در توابع زیر حساب کنید.

الف) $\dfrac{z^2-2z}{(z-2)(z^2-4z-5)}$

ب) $\dfrac{z^2}{z^4+2z^2+3}$